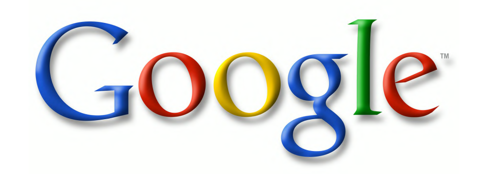
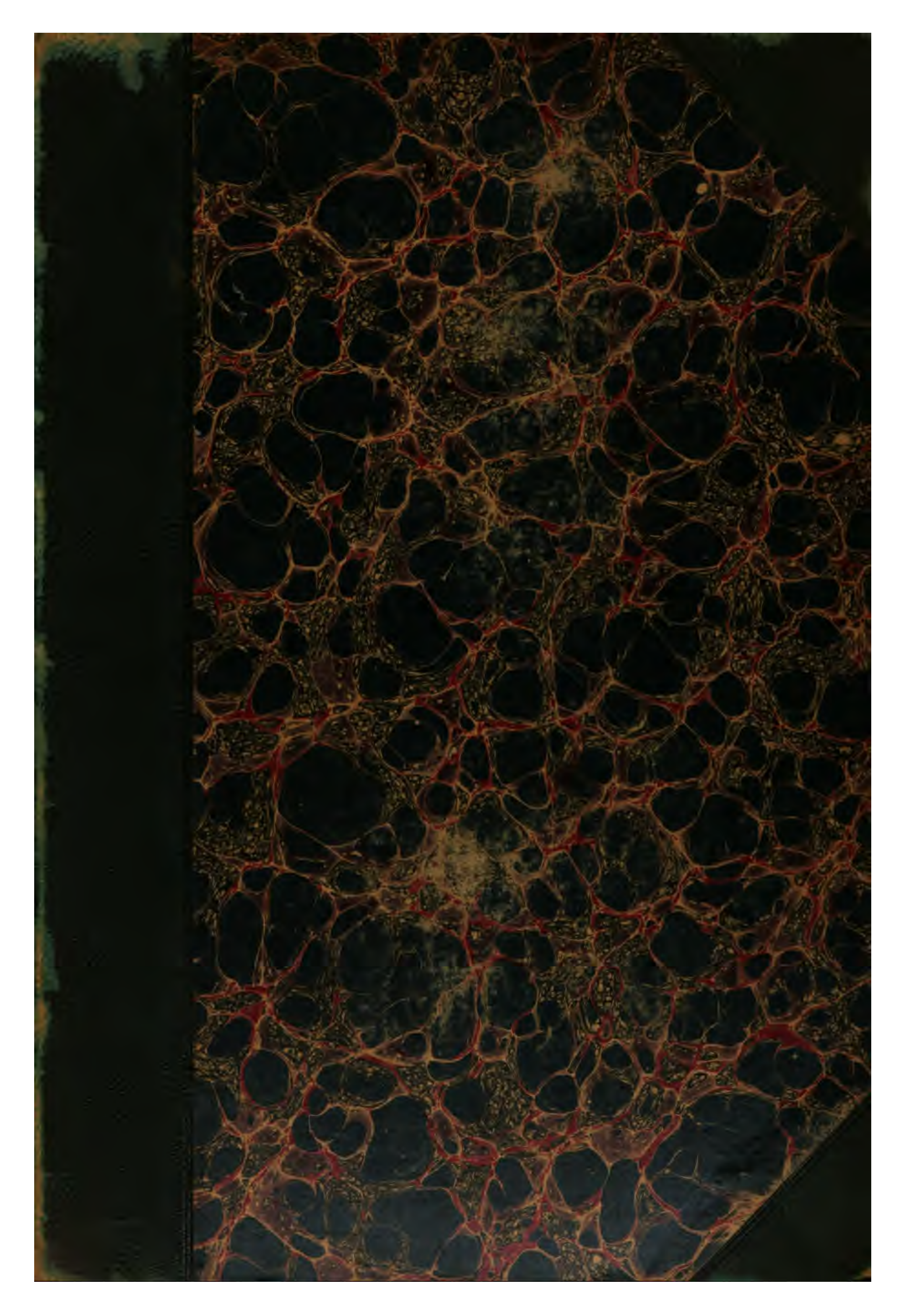
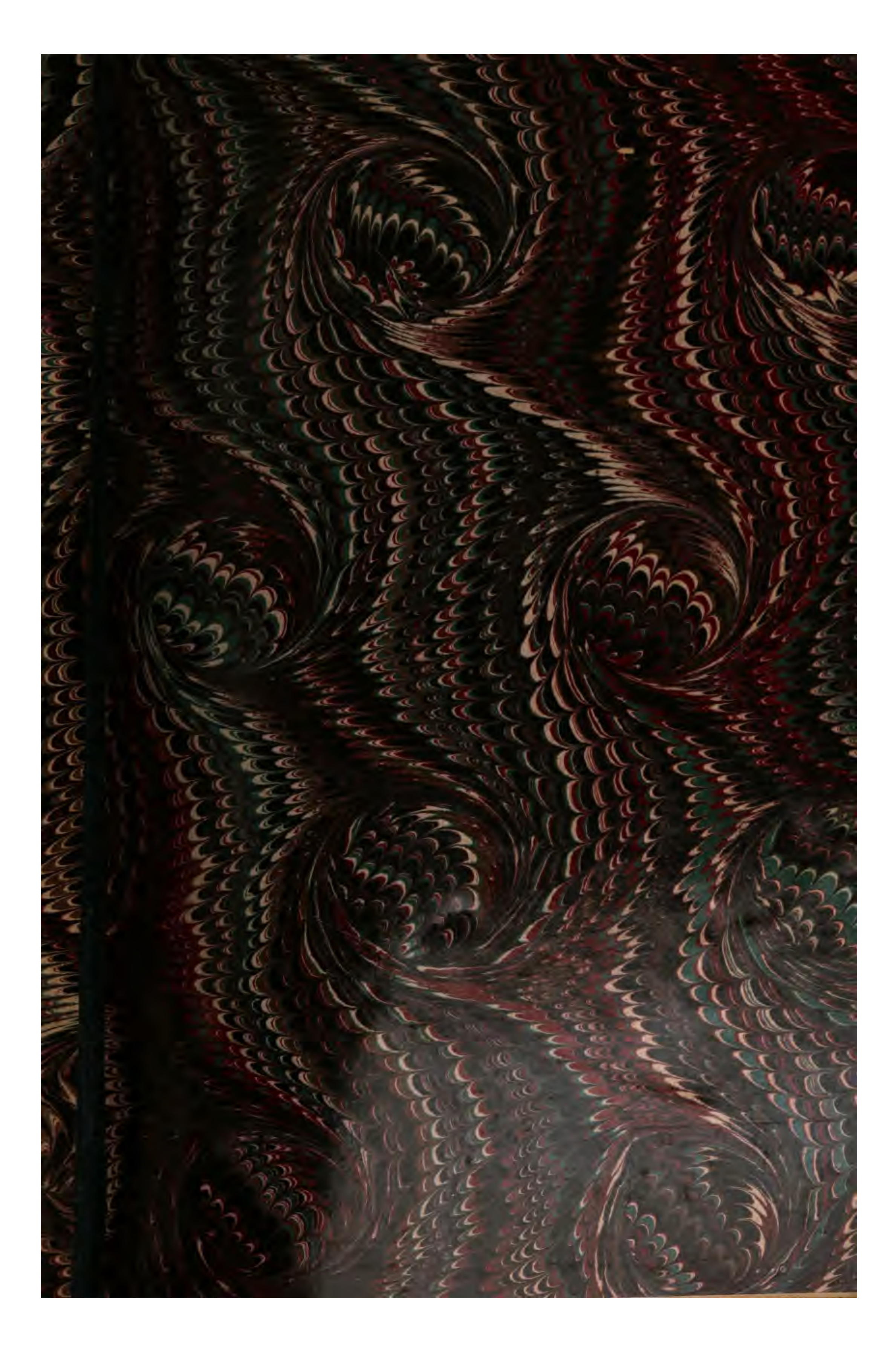

Google




SCIENCE CENTER LIBRARY
Math 9008.84
SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE
BOUGHT WITH
THE BEQUEST OF
HORACE APPLETON HAVEN,
OF PORTSMOUTH, N. H.
(Class of 1842.)
SEP 14 1885



Dr. Otto Böklen,

Analytische Geometrie des Raumes.

Zweite Auflage.

Analytische

Geometrie des Raumes.

I. Theil.

Die allgemeine Theorie der Flächen und Curven; die Eigenschaften der Flächen zweiten Grades.

II. Theil.

Disquisitiones generales circa superficies curvas von C. F. Gauß, ins Deutsche übertragen mit Anwendungen und Zusätzen.
Die Fresnel'sche Wellenfläche.

Von

Dr. Otto Böklen,

Rektor der k. Realanstalt in Reutlingen.

Mit in den Text gedruckten Holzschnitten und 4 lithographirten Tafeln.

Zweite Auflage.

Stuttgart.
Verlag von Albert Koch.
1884.

Druck von G. Lemppenau in Stuttgart.

Vorrede.

Der erste Theil dieses Werks erscheint hier nahezu in derselben Weise, wie in der ersten Auflage; es wurde nur der letzte §. über krummlinige Coordinaten, sowie der Anhang weggelassen und der letztere dafür durch einen besonderen II. Theil ersetzt, so daß Theil I jetzt aus zwei Abschnitten besteht, wovon der eine bis §. 18 die allgemeine Theorie der Flächen und Curven, und der andere speciell die Flächen zweiten Grades enthält. Die Darstellung richtet sich durchaus nach dem Muster und Vorgang französischer Mathematiker, insbesondere von Monge; das Charakteristische derselben besteht in der engen Verbindung zwischen Analysis und Geometrie und zwar in der Weise, daß die geometrische Bedeutung der Formeln im Einzelnen mit Leichtigkeit verfolgt und nachgewiesen werden kann. Daß diese Auffassung der analytischen Geometrie viele Vortheile darbietet und sich auch bei solchen Studirenden practisch erweist, deren Anlage mehr nach der geometrischen als nach der analytischen Seite hinneigt, ist unbestritten, allein auf der andern Seite kann nicht geleugnet werden, daß sie namentlich hinsichtlich der allgemeinen Verwendbarkeit der Formeln sich zu ihrem Nachtheil von derjenigen Behandlungsweise unterscheidet, deren Hauptrepräsentant Gauß in seinen Disq. ist. Von dieser berühmten Abhandlung, welche eine neue Aera in der analytischen Geometrie eröffnete und nach und nach eine eigene Litteratur hervorgerufen hat, existirt nur eine französische Übersetzung, es dürfte also der Versuch, welcher hier gemacht wurde, etwas zu weiterer Verbreitung derselben beizutragen, an sich schon nicht ungerechtfertigt sein. Außerdem kommt aber auch der Umstand in Betracht, daß die Disq. in doppelter Beziehung eine Ergänzung des ersten Theils bilden, der Form nach, indem die Behandlungsweise sich auf eine allgemeinere Auffassung gründet, und dem Inhalt nach, insofern als der zweite Abschnitt des ersten Theils, welcher von §. 21 an die Theorie der elliptischen Coordinaten und ihre Anwendung auf die Flächen II. Grads enthält, eigentlich nur ein specielles Beispiel ist für den in Art. IV der Disq. angeregten so außerordentlich fruchtbaren Gedanken, wonach die Bestimmung der Lage eines Punkts auf einer Fläche auf zwei Arten gezeigt ist, einmal durch die Cartesischen Coordinaten nach der bisherigen Weise, und dann durch Einführung von zwei neuen Variabeln, von welchen die ersteren als Functionen betrachtet werden.

Zur Zeit, als Gauß seine Disq. schrieb, kannte man die elliptischen Coordinaten noch nicht; seitdem aber, und namentlich in den letzten Jahrzehnten, haben sie nicht bloß in der Geometrie, sondern auch vermöge ihrer allgemeinen Verwendung in der mathematischen Physik und Mechanik sich als ein geradezu unentbehrliches Hilfsmittel erwiesen. Die Zusammenstellung der mannigfachen

Eigenschaften von Flächen zweiten Grades in Theil I von §. 21 an, welche aus der Anwendung dieser Coordinaten hervorgehen, liefert ein ergiebiges Material für weitere Untersuchungen auf diesem Gebiete; um hiefür ein Beispiel zu geben, wurde am Schluß des Werkes eine Abhandlung über die Fresnel'sche Wellenfläche und einige andere mit ihr in Verbindung stehende Flächen angefügt, welche sich mehrfach auf die elliptischen Coordinaten stützt. Außerdem ist in den Erläuterungen zu den Disq. gezeigt, in wiefern letztere sich eignen, für die allgemeine, Gauß eigenthümliche, Auffassung der Coordinaten-Transformation, von Art. XXI an, einen speciellen Anhaltspunkt zu geben, wodurch die Übertragung der Cartesischen Coordinaten nicht bloß auf die Kugel, und auf Rotationsflächen überhaupt mit Hilfe von Polarcoordinaten, welche Gauß zunächst und vorzugsweise im Auge hatte, sondern auch hinsichtlich aller Flächen zweiten Grads erleichtert wird.

Da bei der Übersetzung der Disq. keine Veränderung am Original vorgenommen und also auch die Gauß'sche Bezeichnungsweise beibehalten wurde, welche von derjenigen nach Monge, die im ersten Theil durchaus befolgt ist, sich unterscheidet, so erscheint es nothwendig, um Verwechslungen zu verhüten, hierauf aufmerksam zu machen. Dieselben Differenzialquotienten erster und zweiter Ordnung, welche der letztere mit p, q; r, s, t bezeichnet, heißen bei Gauß t, u; T, U, V; während andererseits die neuen Gauß'schen Variabeln p und q sind. Obgleich dadurch eine Schwierigkeit für den Leser entsteht, so wäre es doch mißlich gewesen, hieran etwas zu ändern.

Die drei letzten Abschnitte von Theil II sind mit wenigen Ausnahmen Zusammenstellungen von Aufsätzen, welche früher im Grunert'schen Archiv, in neuerer Zeit im Programm der hiesigen Realanstalt 1881, in der Zeitschrift von Schlömilch, Cantor und Kahl und im Journal für reine und angewandte Mathematik von Kronecker und Weierstraß erschienen sind. Wenn man das Gauß'sche Übertragungsprincip mit Benützung einer Hülfskugel in Verbindung bringt mit der Methode der conjugirten Tangenten nach der Dupin'schen Auffassung, so lassen sich nicht bloß die Hauptsätze der Disq. durch einfache geometrische Betrachtungen beweisen, sondern man gewinnt hiedurch auch Anhaltspunkte zur Ausbildung einer besondern und in sich abgeschlossenen Art von Geometrie der Linien auf den Flächen. Im vierten Abschnitt dagegen wurde der Versuch gemacht, die Geometrie der Ebene so darzustellen, daß sie einer direkten Übertragung auf beliebige Flächen fähig ist, indem die Gerade, der Kreis, die Ellipse und Hyperbel durch die entsprechenden geodätischen Linien ersetzt werden.

Unter den Flächen höheren Grads ist die Wellenfläche die bekannteste und zugleich durch ihre vielfachen Beziehungen zur Optik und Mechanik vorläufig wenigstens die interessanteste; vermöge ihrer Entstehungsweise ist sie der Behandlung durch elliptische Coordinaten leicht zugänglich, und da sie außerdem die einfachste von den aus ellipsoidischen Krümmungslinien gebildeten höheren Formen ist, so schließt sich ihre Darstellung unmittelbar an diejenige der Flächen zweiter Ordnung an.

Reutlingen, November 1883.

Der Verfasser.

Inhalts-Verzeichniß.

I. Theil.

II. Theil.

§. 1. Von den Winkeln zwischen Geraden und Ebenen.

Wir nehmen 3 sich rechtwinklig schneidende Axen an, OX, OY, OZ. Durch den Ursprung O geht eine Gerade, welche mit den Axen der x, y, z der Reihe nach die Winkel α, β, γ bildet, und deren Gleichungen

1. $x + pz = o \qquad y + qz = o$ sind,

so ist

2. $\cos \alpha = -\frac{p}{k}; \cos \beta = -\frac{q}{k}; \cos \gamma = \frac{1}{k}$

wo der im Folgenden häufig vorkommende Ausdruck $p^2 + q^2 + 1 = k^2$ gesetzt wurde. Die Tangenten jener Winkel sind

3. $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{q^2 + 1}}{p}$, $\operatorname{tg} \beta = -\frac{\sqrt{p^2 + 1}}{q}$, $\operatorname{tg} \gamma = \sqrt{p^2 + q^2}$

Aus 2 und 3 erhält man sofort für die Sinus

4. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{q^2 + 1}}{k}$, $\sin \beta = \frac{\sqrt{p^2 + 1}}{k}$, $\sin \gamma = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{k}$

Wir ziehen durch den Coordinatenursprung O eine zweite Gerade, welche mit der ersten den Winkel ω bildet und deren Gleichungen

5. $x + p_{,}z = o \qquad y + q_{,}z = o$ sind,

und setzen, ähnlich wie oben, $p_{,}^2 + q_{,}^2 + 1 = k_{,}^2$, so haben wir die Relationen

6. $\cos \omega = \frac{pp_{,} + qq_{,} + 1}{kk_{,}}$

7. $\operatorname{tg} \omega = \frac{\sqrt{(p-p_{,})^2 + (q-q_{,})^2 + (pq_{,}-p_{,}q)^2}}{pp_{,} + qq_{,} + 1}$

Aus 6 und 7 erhalten wir ferner

8. $\sin \omega = \frac{\sqrt{(p-p_{,})^2 + (q-q_{,})^2 + (pq_{,}-p_{,}q)^2}}{kk_{,}}$

Wenn beide Gerade sich rechtwinklig schneiden sollen, so findet die Bedingungsgleichung statt:

9. $pp_{,} + qq_{,} + 1 = o$

welche nach 8. identisch ist mit

10. $\sqrt{(p-p_{,})^2 + (q-q_{,})^2 + (pq_{,}-p_{,}q)^2} = kk_{,}$

Durch den Punkt O gehe eine Ebene, deren Gleichung ist

11. $z = px + qy$

und welche mit den Coordinaten Ebenen der zy, zx, yx der Reihe nach die Winkel α, β, γ bildet, so hat man

12. $\cos\alpha = -\frac{p}{k}$, $\cos\beta = -\frac{q}{k}$, $\cos\gamma = \frac{1}{k}$

13. $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{q^2+1}}{p}$, $\operatorname{tg}\beta = -\frac{\sqrt{p^2+1}}{k}$, $\operatorname{tg}\gamma = \sqrt{p^2+q^2}$

14. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{q^2+1}}{k}$, $\sin\beta = \frac{\sqrt{p^2+1}}{k}$, $\sin\gamma = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{k}$

Eine zweite Ebene werde durch O gelegt, welche mit der ersten den Winkel ω bildet, und deren Gleichung

15. $z = p_{,}x + q_{,}y$ sei, so ist

16. $\cos\omega = \frac{pp_{,} + qq_{,} + 1}{kk_{,}}$

17. $\operatorname{tg}\omega = \frac{\sqrt{(p-p_{,})^2 + (q-q_{,})^2 + (pq_{,}-p_{,}q)^2}}{pp_{,} + qq_{,} + 1}$

18. $\sin\omega = \frac{\sqrt{(p-p_{,})^2 + (q-q_{,})^2 + (pq_{,}-p_{,}q)^2}}{kk_{,}}$

Die Bedingungsgleichung dafür, daß beide Ebenen sich senkrecht schneiden, ist

19. $pp_{,} + qq_{,} + 1 = o$ oder

20. $\sqrt{(p-p_{,})^2 + (q-q_{,})^2 + (pq_{,}-p_{,}q)^2} = kk_{,}$

Die Gerade $x + pz = o$. $y + qz = o$

und die Ebene $z = px + qy$

sind gegenseitig senkrecht, weil die Projektionen der Geraden auf den Ebenen der zx und zy beziehungsweise senkrecht stehen auf den Durchschnitten

$z = px$ und $z = qy$

welche die gegebene Ebene auf den Ebenen der zx und zy hervorbringt.

Vorstehende Gleichungen gelten allgemein für beliebige Gerade und Ebenen im Raum, deren Gleichungen sind

21. $x + pz + m = o$ $y + qz + n = o$

22. $z = p'x + q'y + m'$

Soll die Gerade mit der Ebene parallel sein, so ist sie senkrecht auf jeder Geraden, welche auch auf der Ebene senkrecht steht, also findet die Bedingungsgleichung statt

23. $pp' + qq' + 1 = o$

Soll aber die Ebene die Gerade enthalten, so kommt noch die Bedingung hinzu

24. $p'm + q'n - m' = o$

Der Abstand des Ursprungs von der Ebene $z = px + qy + m$ ist gleich

25. $\frac{m}{k}$

Der Abstand des Punkts (ξ,η,ζ) von dieser Ebene ist gleich

26. $\frac{\zeta - p\xi - q\eta - m}{k}$

Dieß ist auch der Abstand von zwei beliebigen, durch die Punkte (x, y, z) und (ξ, η, ζ) gelegten parallelen Ebenen $z = px + qy + m'$ und $\zeta = p\xi + q\eta + m - m'$

Der Abstand des Ursprungs von der Geraden $x + pz + m = o$, $y + qz + n = o$ ist

27. $\frac{1}{k}\sqrt{m^2 + n^2 + \left(qm - pn\right)^2}$

Der Abstand des Punkts (ξ, η, ζ) von dieser Geraden ist

28. $\frac{1}{k}\sqrt{\left(\xi + p\zeta + m\right)^2 + \left(\eta + q\zeta + n\right)^2 + \left(q\xi - p\eta + qm - pn\right)^2}$

Dieß ist auch der Abstand der beiden parallelen Geraden

$$\begin{matrix} x + pz + m = o \\ y + qz + n = o \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} x + pz - (\xi + p\zeta) = o \\ y + qz - (\eta + q\zeta) = o \end{matrix}$$

Vorstehende Formeln sind geeignet bei vielen Untersuchungen der analytischen Geometrie, namentlich in der Theorie der Flächen. Bei den Curven hingegen wird gewöhnlich eine andere Form angewendet. Die Cosinus der Winkel, welche zwei Gerade mit den Axen der x, y, z bilden, bezeichnen wir mit a, b, c; α, β, γ. Der Winkel beider Geraden sei gleich ω, so haben wir

29. $\cos\omega = a\alpha + b\beta + c\gamma$

30. $\sin\omega = \sqrt{(b\gamma - \beta c)^2 + (c\alpha - \gamma a)^2 + (a\beta - \alpha b)^2}$

Die Cosinus der Winkel, welche die Normale einer beiden Geraden parallelen Ebene mit den Axen macht, seien A, B, C, so ist

31. $A = \frac{b\gamma - \beta c}{\sin\omega}$; $B = \frac{c\alpha - \gamma a}{\sin\omega}$; $C = \frac{a\beta - \alpha b}{\sin\omega}$

Die Gleichung dieser Ebene ist

32. $Ax + By + Cz = \text{const.}$,

PQ ist die Linie, welche die genannten Geraden in den Punkten $P\ (x, y, z)$ und $Q\ (x', y', z')$ senkrecht schneidet

33. $PQ = \frac{1}{\sin\omega}\left\{(x - x')(b\gamma - \beta c) + (y - y')(c\alpha - \gamma a) + (z - z')(a\beta - \alpha b)\right\}$

34. $PQ = (x - x')\,A + (y - y')\,B + (z - z')\,C$

Durch den Ursprung O ziehen wir drei Gerade, welche eine concentrische Kugel, deren Halbmesser $= 1$, in den Punkten M, M', M'' treffen. Die Cosinus der Winkel, welche die Geraden OM, OM', OM'' mit den Axen bilden, sind beziehungsweise gleich a, b, c; α, β, γ; $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$. Man setze der Einfachheit wegen

$$\begin{matrix} b\gamma - \beta c = A \sin\omega & c\alpha - \gamma a = B \sin\omega & a\beta - \alpha b = C \sin\omega \\ b\mathfrak{c} - \mathfrak{b}c = A' \sin\omega' & c\mathfrak{a} - \mathfrak{c}a = B' \sin\omega' & \mathfrak{a}b - a\mathfrak{b} = B' \sin\omega' \\ \beta\mathfrak{c} - \mathfrak{b}\gamma = A'' \sin\omega'' & \gamma\mathfrak{a} - \mathfrak{c}\alpha = B'' \sin\omega'' & \alpha\mathfrak{b} - \mathfrak{a}\beta = C'' \sin\omega'' \end{matrix}$$

$\omega = \text{Winkel } MOM'$; $\omega' = MOM''$; $\omega'' = M'OM''$

die Werthe von $\sin\omega$, $\sin\omega'$, $\sin\omega''$ folgen aus 30.

Die Winkel des sphärischen Dreiecks $MM'M''$ bezeichnen wir mit M, M', M''

35. $\cos M = AA' + BB' + CC'$
$\cos M' = AA'' + BB'' + CC''$
$\cos M'' = A'A'' + B'B'' + C'C''$

36. $\sin M = \sqrt{(BC' - B'C)^2 + (CA' - C'A)^2 + (AB' - A'B)^2}$
$\sin M' = \sqrt{(B''C - BC'')^2 + (C''A - CA'')^2 + (A''B - AB'')^2}$
$\sin M'' = \sqrt{(B'C'' - B''C')^2 + (C'A'' - C''A')^2 + (A'B'' - A''B')^2}$

Zur Abkürzung setzen wir

37. $J = a\beta\mathfrak{c} + \alpha\mathfrak{b}c + \mathfrak{a}b\gamma - c\beta\mathfrak{a} - \gamma\mathfrak{b}a - \mathfrak{c}b\alpha$

So ist

38. $\sin M = \frac{J}{\sin \omega.\ \sin \omega'}$ $\sin M' = \frac{J}{\sin \omega.\ \sin \omega''}$ $\sin M'' = \frac{J}{\sin \omega'.\ \sin \omega''}$

Bezeichnen wir die Winkel zwischen den Halbmessern OM, OM', OM'' und den ihnen gegenüberliegenden Seiten M'OM'', MOM'', MOM' mit μ, μ', μ'', so ist

39. $\sin \mu = \frac{J}{\sin \omega''} = aA'' + bB'' + cC''$

$\sin \mu' = \frac{J}{\sin \omega'} = \alpha A' + \beta B' + \gamma C'$

$\sin \mu'' = \frac{J}{\sin \omega} = \mathfrak{a}A + \mathfrak{b}B + \mathfrak{c}C$

Die Bedingung dafür, daß die drei Geraden OM, OM', OM'' in Einer Ebene liegen sollen, ist

40. $J = o$

und daß sie aufeinander senkrecht stehen

41. $J = 1$

Bartels: Aperçu abrégé des formules fondamentales de la géometrie à trois dimensions (Académie de Petersbourg 1825).

Statt J kann man auch schreiben:

$a(\beta\mathfrak{c} - \mathfrak{b}\gamma) + b(\gamma\mathfrak{a} - c\alpha) + c(\alpha\mathfrak{b} - \mathfrak{a}\beta)$; ebenso sei

$J' = a'(\beta'\mathfrak{c}' - \mathfrak{b}'\gamma') + b'(\gamma'\mathfrak{a}' - c'\alpha') + c'(\alpha'\mathfrak{b}' - \mathfrak{a}'\beta')$ so ist

42. $J.J' = L(M'N'' - M''N') + M(N'L'' - N''L') + N(L'M'' - L''M)$

zur Abkürzung wurde hier gesetzt:

$L = aa' + bb' + cc'$ $L' = a\alpha' + b\beta' + c\gamma'$ $L'' = a\mathfrak{a}' + b\mathfrak{b}' + c\mathfrak{c}'$

$M = \alpha a' + \beta b' + \gamma c'$ $M' = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$ $M'' = \alpha\mathfrak{a}' + \beta\mathfrak{b}' + \gamma\mathfrak{c}'$

$N = \mathfrak{a}a' + \mathfrak{b}b' + \mathfrak{c}c'$ $N' = \mathfrak{a}\alpha' + \mathfrak{b}\beta' + \mathfrak{c}\gamma'$ $N'' = \mathfrak{a}\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}\mathfrak{b}' + \mathfrak{c}\mathfrak{c}'$

Die Gleichung 42 läßt sich auch so schreiben:

$JJ' = L(M'N'' - M''N') + L'(M''N - MN'') + L''(MN' - MN)$

Vier weitere Formen dieser Gleichung ergeben sich, wenn man der Reihe nach die Größen L'M'N', L''M''N'', MM'M'', NN'N'' außerhalb der Parenthesen setzt.

Nachdem nun die Hauptformeln der Uebersicht wegen ohne Beweis zusammengestellt worden sind, folgt noch eine kurze Demonstration derselben:

Durch den Ursprung O gehen zwei Gerade, welche eine concentrische Kugel vom Halbmesser 1 in M und M' treffen, und die mit den Axen Winkel bilden, deren Cosinus gleich a, b, c; α, β, γ sind. Man lege durch M drei zu den Axen senkrechte Ebenen, so erhält man ein Parallelepiped, dessen Diagonale OM ist, und dessen Kanten gleich a, b, c sind. Die Projektion von OM auf OM' ist gleich cos MOM' = cos ω. Man kann aber von O nach M auf einer gebrochenen Linie gelangen, welche aus drei Kanten gleich a, b und c besteht, und deren Projektion auf OM' ebenfalls = cos ω ist. Die Projektionen von a, b, c auf OM' sind = $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ mithin ist

$$\cos \omega = a\alpha + b\beta + c\gamma$$

Der Inhalt des Dreiecks MOM' ist $= \frac{1}{2} \sin \omega$; auch ist nach einem bekannten Satze dieser Inhalt gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate seiner Projektionen auf den drei Coordinaten Ebenen. Es sei z. B. NON' die Projektion von MOM' auf der xy Ebene. Wir ziehen durch

N und N' je zwei Linien parallel mit der x und y Axe, und erhalten dadurch 2 Rechtecke, deren Seiten a, β und α, b sind. Eine leichte geometrische Untersuchung führt nun darauf, daß Dreieck NON' $= \frac{1}{2}(a\beta - \alpha b)$ ist. Ebenso findet man für die Projektionen von MOM' auf den beiden andern Ebenen die Werthe $\frac{1}{2}(c\alpha - \gamma a)$ und $\frac{1}{2}(b\gamma - \beta c)$, also ist

$$\sin\omega = \sqrt{(a\beta - \alpha b)^2 + (c\alpha - \gamma a)^2 + (b\gamma - \beta c)^2}$$

Hiemit sind die Fundamentalformeln erwiesen, von welchen insbesondere die Cosinusformel in der analytischen Geometrie eine wichtige Rolle spielt. Sehr häufig begegnet man einer Summe von drei Produkten mit je zwei Faktoren. Ein solcher Ausdruck stellt fast immer den Cosinus eines Winkels vor. Es seien z. B. M (x, y, z) und M' (x', y', z') zwei Punkte einer Ebene. Die Cosinus der Winkel, welche die Gerade MM' mit den Axen bildet, sind gleich

$$\frac{x-x'}{MM'},\ \frac{y-y'}{MM'},\ \frac{z-z'}{MM'}\qquad MM' = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

Die Cosinus der Winkel, welche die Normale der Ebene mit den Axen bildet, bezeichne man mit A, B, C. Da nun die Normale auf allen Geraden der Ebene senkrecht steht, so ist der Cosinus der betreffenden Winkel = o oder

$$A(x-x') + B(y-y') + C(z-z') = o$$

die Gleichung der Ebene; nehmen wir hier x, y, z als die laufenden Coordinaten an, und den Punkt M' als fest, so haben wir auch

$$Ax + By + Cz = \text{const.}$$

Mittelst dieser Betrachtungen wird man sich leicht die Formeln 1—20 erklären können. Beim Uebergang von der Geraden 1 zur Ebene 11 ist zu berücksichtigen, daß, wenn eine Gerade auf einer Ebene senkrecht steht, die Projektion der Geraden auf einer Coordinaten Ebene auch senkrecht steht auf dem Durchschnitt der letzteren mit der gegebenen Ebene.

Die Formeln 31 lassen sich auf folgende Art beweisen: Man ziehe durch den Ursprung die Halbmesser OM, OM', welche mit den gegebenen Geraden (a, b, c) und (α, β, γ) parallel sind. Die Cosinus der Winkel zwischen der Normale der Ebene MOM' und den Axen sind nach unserer Bezeichnung gleich A, B, C. Nun ist der Winkel φ zwischen der Fläche MOM' und ihrer Projektion NON' auf der xy Ebene gleich dem Winkel zwischen dieser Normale und der z Axe, oder $\cos\varphi = C$; andererseits ist $\cos\varphi = \frac{NON'}{MOM'}$ oder nach dem Obigen gleich $\frac{a\beta - \alpha b}{\sin\omega}$; mithin $C = \frac{a\beta - \alpha b}{\sin\omega}$; ebenso werden die Ausdrücke für B und A bewiesen. Die Gleichungen 33 und 34 beruhen darauf, daß der Winkel zwischen PQ und der Normale der, beiden Geraden parallelen, Ebene gleich Null, also der Cosinus des Winkels gleich 1 ist. Statt 34 kann man auch setzen

$$A\frac{x-x'}{PQ} + B\frac{y-y'}{PQ} + C\frac{z-z'}{PQ} = 1$$

$\frac{x-x'}{PQ}$, $\frac{y-y'}{PQ}$, $\frac{z-z'}{PQ}$ sind die Cosinus der Winkel zwischen PQ und den Axen.

Die Gleichungen 35 und 36 folgen direkt aus 29 und 30; denn die Grössen A, B, C, A'... sind die Cosinus der Winkel, welche die Normalen der Ebenen MOM', MOM'', M'OM'' mit den Axen machen, und der Winkel zwischen zwei solchen Normalen ist gleich dem Winkel zwischen den entsprechenden Ebenen. Die Gleichung 37 kann auch so geschrieben werden:

$$J = a(\beta c - b\gamma) + b(\gamma a - c\alpha) + c(\alpha b - a\beta)$$
$$= (aA'' + bB'' + cC'') \sin\omega''$$

Sin μ ist gleich dem Cosinus des Winkels zwischen OM und der Normale von M'OM'', oder nach der Cosinusformel $\sin\mu = aA'' + bB'' + cC''$, da A'', B'', C'' die Cosinus der Winkel sind, welche die Normale von M'OM'' mit den Axen macht. Somit wären die Formeln 39 erwiesen; nun führen ganz einfache geometrische Betrachtungen darauf, daß $\sin\mu \sin\omega''$ gleich dem Inhalt des durch die Kanten OM, OM', OM'' bestimmten Parallelepipeds ist $\left(\frac{1}{2} \sin\omega'' = \text{Dreieck } M'OM''\right)$; mithin ist auch J gleich diesem Inhalt. Daraus folgt, daß wenn die Geraden OM, OM', OM'' in Einer Ebene liegen, J = Null sein muß. Stehen sie aber auf einander senkrecht, so ist das genannte Parallelepiped ein Würfel, dessen Kanten OM = OM' = OM'' = 1 sind, und dessen Inhalt also auch = 1 ist.

Die Formel 42 ist eine identische Gleichung zwischen den 18 beliebigen Größen

$$a\,b\,c, \quad \alpha\beta\gamma, \quad \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c},$$
$$a'b'c', \quad \alpha'\beta'\gamma', \quad \mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}',$$

man überzeugt sich davon durch Ausführung der Multiplikationen, was hier unterbleibt, da diese Rechnung, abgesehen von ihrer Weitläufigkeit, ohne alle Schwierigkeit ist. Wenn die 18 Größen die Bedingungen erfüllen: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ u. s. f., so sind sie die Cosinus von 6 Geraden im Raum, und die Bedeutung der Gleichung 42 in der analytischen Geometrie besteht darin, daß aus ihr eine Reihe von einfacheren Beziehungen sich ableiten lassen, durch Annahme spezieller Fälle. Es können also eine oder mehrere dieser 6 Geraden zusammenfallen, oder auf einander senkrecht stehen.

Bei der Formel 25 ist zu bemerken, daß m der Abstand des Ursprungs von dem Durchschnitt der zAxe mit der Ebene $z = px + qy + m$ ist, und nach 12. bedeutet $\frac{1}{k}$ den Cosinus des Winkels zwischen dieser Axe und der vom Ursprung auf die Ebene herabgelassenen Senkrechten. Die durch den Punkt (ξ, η, ζ) gehende parallele Ebene hat die Gleichung $\zeta = p\xi + q\eta + m'$, und $m' - m = \zeta - p\xi - q\eta - m$ ist dasjenige Stück der zAxe, welches zwischen beiden Ebenen enthalten ist, woraus sich die Relation 26. erklärt.

Die Ebene, welche durch den Ursprung senkrecht auf die Gerade $x + pz + m = o$, $y + qz + n = o$ gelegt wird, hat die Gleichung (11) $z = px + qy$; die Coordinaten des Durchschnittspunktes sind also

$$z = -\frac{1}{k^2}(pm + qn) \qquad y = \frac{1}{k^2}\left\{p(qm - pn) - n\right\}$$
$$x = -\frac{1}{k^2}\left\{q(qm - pn) + m\right\}$$

nach einigen leichten Reduktionen ergibt sich hieraus mit Berücksichtigung der Gleichung $k^2 = 1 + p^2 + q^2$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{k^2} \left\{ m^2 + n^2 + (qm - pn)^2 \right\}$$

welches der Ausdruck 27 ist.

Um den Abstand des Punkts (ξ, η, ζ) von der Geraden $x + pz + m = o$, $y + qz + n = o$ zu finden, verlegen wir den Coordinaten Ursprung nach diesem Punkt, indem wir statt x, y, z, die neuen Coordinaten $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ setzen, hiedurch verwandeln sich die Gleichungen der Geraden in folgende

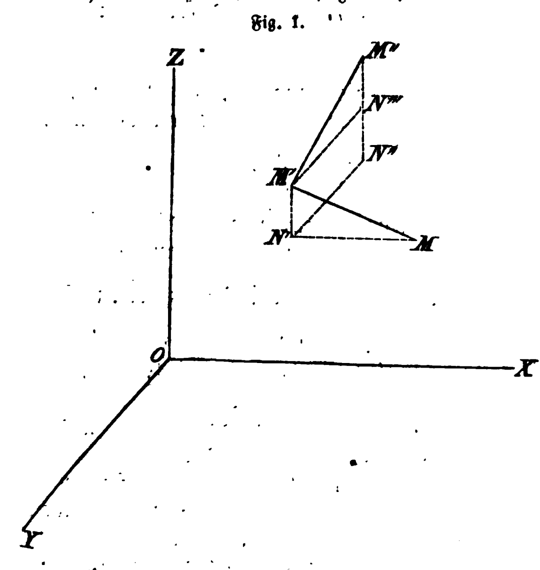
$$x + pz + (\xi + p\zeta + m) = o \quad y + qz + (\eta + q\zeta + n) = o$$

Mithin dürfen wir, um von der Formel 27 auf 28 überzugehen, nur statt m und n die Größen $\xi + p\zeta + m$ und $\eta + q\zeta + n$ setzen, wodurch wir die letztere Form erhalten.

§. 2. Die Tangential-Ebene und Normale einer Fläche.

In einem Punkte M einer Fläche denken wir uns die Berührungsebene und nehmen auf dieser noch zwei Punkte M′ und M″ an, so daß MM′ parallel der zx Ebene und M″M′ parallel der zy Ebene ist; durch M wird eine Ebene gelegt parallel der xy Ebene und von M′ und M″ aus fällen wir darauf die Perpendikel M′N′ und M″N″; endlich lege man durch M′ eine Ebene, ebenfalls parallel der xy Ebene, welche M″N″ in N‴ schneidet. Nun ist $M''N'' = M''N''' + N'''N'' = M''N''' + M'N'$ Aber $M'N' = p.MN'$ und $M''N''' = q.N'''M'$ wo $tg\ M'MN' = p$ und $tg\ M''M'N''' = q$ gesetzt wurde. Es seien xyz die Coordinaten von M und x′y′z′ diejenigen von M″, so haben wir die Gleichung der Berührungsebene

Fig. 1.



1. $z' - z = p(x' - x) + q(y' - y)$

Wenn der Punkt M fest ist, so bleiben die Werthe p und q ungeändert, wo auch M″ auf der Tangential-Ebene liegt; ist M″ unendlich nahe bei M, und nennt man die Differenzen $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$ beziehungsweise dx, dy, dz, so erhält man die Gleichung der Tangential-Ebene in folgender Form:

2. $dz = p\,dx + q\,dy$

Die Größen p und q werden nun aus der Gleichung der Fläche $z = f(x,y)$ bestimmt, indem man zuerst y unverändert läßt und die partielle Ableitung von z nach x $\frac{dz}{dx} = p$ setzt, hierauf bleibt x unveränderlich und dann ist die partielle Ableitung von z nach y $\frac{dz}{dy} = q$.

Die Projektionen der Linie, welche in M die Tangential-Ebene oder die Fläche senkrecht schneidet, auf den Ebenen der zx und zy müssen die Durchschnitte der Tangential-Ebene mit diesen Ebenen ebenfalls senkrecht treffen, hieraus ergeben sich unmittelbar die Gleichungen der Normale in M

3. $x' - x + p(z' - z) = o \quad y' - y + q(z' - z) = o$

Die Gleichungen 2, 3, 4 in § 1 geben die Werthe der Winkel α, β, γ an, welche die Normale einer Fläche mit den Coordinatenaxen bildet; sie sind identisch mit den Gleichungen 12, 13, 14 in § 1, die sich auf die Winkel α, β, γ beziehen, welche die Berührungs-Ebene einer Fläche mit den Coordinaten-Ebenen macht.

Wir fällen von M aus auf die xy Ebene das Perpendikel MN und nehmen auf dessen Richtung den Punkt μ an, so daß $N\mu = \text{const. } p$ ist, dehnen dieses Verfahren auf sämmtliche Punkte M der gegebenen Fläche aus, so liegen die entsprechenden Punkte μ auf der abgeleiteten Fläche, die wir mit (μ) bezeichnen wollen. Eine zweite abgeleitete Fläche (ν) ergibt sich, wenn auf den Ordinaten MN die Punkte ν angenommen werden, so daß $N\nu = \text{const. } q$ ist. Die Gleichungen der Tangential-Ebenen dieser Flächen sind folgende:

4. $dp = r\,dx + s\,dy$

5. $dq = s\,dx + t\,dy$

Die Größen r, s, t werden aus der Gleichung der gegebenen Fläche $z = f(x, y)$ bestimmt, durch zweimalige partielle Differenziation von z; und zwar ist

$$r = \frac{d^2z}{dx^2} \quad s = \frac{d^2z}{dxdy} \quad t = \frac{d^2z}{dy^2}$$

Man braucht, um sich hievon zu überzeugen, nur nach 2 die Gleichungen der Tangential-Ebenen von (μ) und (ν) zu bestimmen; indem man statt z, p, q zuerst die Größen p, $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dp}{dy}$ setzt und hierauf bei der zweiten Fläche q, $\frac{dq}{dx}$, $\frac{dq}{dy}$; und berücksichtigt, daß $\frac{dp}{dx} = \frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx} = \frac{d^2z}{dzdy}$, $\frac{dq}{dy} = \frac{d^2z}{dy^2}$ ist.

Die Ableitungen von p und q sind gleichfalls partiell, d. h. bei der Differenziation von p oder q nach x ist y als constant anzusehen, und bei der Differenziation von p oder q nach y bleibt x unveränderlich.

Auf dieselbe Weise, wie aus der gegebenen Fläche die Hülfsflächen (μ) und (ν) abgeleitet worden sind, entstehen aus (μ) die weiteren Hülfsflächen (μ') und (μ'') und aus (ν) die Flächen (ν') und (ν''); es werden nämlich auf der Richtung der Ordinate $N\mu$ die Punkte μ' und μ'' angenommen, so daß $N\mu' = \text{const. } r$ und $N\mu'' = \text{const. } s$ ist. Wenn dieses Verfahren auf alle Punkte der Fläche (μ) ausgedehnt wird, so bestimmen die entsprechenden Punkte μ' und μ'' die abgeleiteten Flächen (μ') und (μ''). Ferner nehmen wir auf der Richtung der Ordinate $N\nu$ die Punkte ν' und ν'' an, so daß $N\nu' = \text{const. } s$ und $N\nu'' = \text{const. } t$ ist, so liegen ν' und ν'' auf den abgeleiteten Flächen (ν') und (ν''). Den Tangential-Ebenen von (μ'), (μ'') oder (ν'), (ν'') entsprechen nachstehende Gleichungen:

6. $dr = u\,dx + \mathfrak{w}\,dy \quad (\mu')$

7. $ds = \mathfrak{w}\,dy + v\,dy \quad (\mu'')$ oder (ν')

8. $dt = v\,dx + w\,dy \quad (\nu'')$

Die Größen u, $\mathfrak{w}$, v, w werden aus der Gleichung der gegebenen Fläche bestimmt, $z = f(x, y)$, durch dreimalige partielle Differenziation von x, und zwar ist

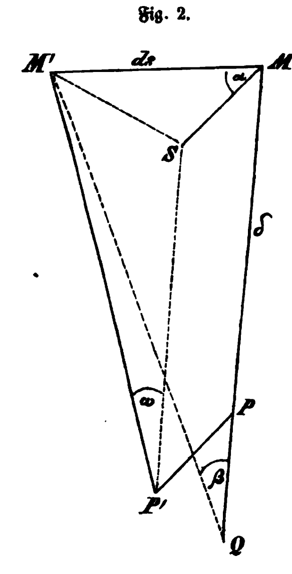
$$u = \frac{d^3z}{dx^3},\ \mathfrak{w} = \frac{d^3z}{dx^2dy},\ v = \frac{d^3z}{dxdy^2},\ w = \frac{d^3z}{dy^3}$$

Die Gleichungen 6, 7, 8 für die Tangential-Ebenen der neuen Hülfsflächen bestimmen sich ganz analog der Gleichung 2 der gegebenen Fläche. Statt z, p, q werden nämlich der Reihe nach r, $\frac{dr}{dx}$, $\frac{dr}{dy}$; s, $\frac{ds}{dx}$, $\frac{ds}{dy}$; t, $\frac{dt}{dx}$, $\frac{dt}{dy}$ gesetzt, wo $\frac{dr}{dx} = \frac{d^3z}{dx^3}$; $\frac{dr}{dy} = \frac{d^3z}{dx^2dy} = \frac{ds}{dx}$; $\frac{ds}{dy} = \frac{d^3z}{dxdy^2} = \frac{dt}{dx}$; $\frac{dt}{dy} = \frac{d^3z}{dy^3}$ ist. Alle diese Ableitungen sind partiell, d. h. bei der Differenziation von r, s, t nach x ist y und bei der Differenziation nach y ist x als constant zu betrachten.

§. 3. Konjugirte Tangenten.

Auf einer Fläche liegen zwei unendlich nahe Punkte, M und M′, deren Tangential-Ebenen mit einander den Winkel ω bilden und sich in MS schneiden; die Linien MM′ und MS sind zwei konjugirte Tangenten des Punkts M, der Winkel M′MS sei $= \alpha$, ferner nehmen wir an, daß M′S senkrecht auf MS stehe. Das Linien-Element MM′ bezeichnen wir mit ds. Man ziehe in den Punkten M und M′ die Normalen der Fläche; auf denselben liegen zwei Punkte, P und P′, welche die Eigenschaft haben, daß die Linie PP′ senkrecht steht sowohl auf MP als auch auf M′P′ und also die kürzeste Entfernung zwischen beiden Normalen angibt. Diese Linie ist parallel und gleich MS, der Punkt P wird der Pol des Linienelements ds genannt, und MP die Poldistanz. Wir haben mithin folgende Gleichungen, indem wir MP mit δ und PP′ mit λ bezeichnen:

Fig. 2.



1. $\lambda = ds \,.\, \cos \alpha$
2. $\delta = ds \,.\, \sin \alpha \,.\, \mathrm{cotg}\, \omega$

In der Ebene PMM′ werde M′Q senkrecht auf M′M gezogen, Q liegt auf der Richtung der Normale MP; nun heißt MQ der Krümmungshalbmesser des dem Element ds entsprechenden Normalschnitts der Fläche. Wenn wir denselben mit ϱ bezeichnen, und den Winkel MQM′ mit β, so ist $\frac{1}{\varrho} = \frac{\beta}{ds}$. Für β läßt sich aber durch einige von selbst sich darbietende geometrische Betrachtungen sogleich der Werth finden

$$\beta = \frac{ds \,.\, \sin \alpha \,.\, \mathrm{tg}\, \omega}{ds} \text{ oder}$$

3. $\beta = \sin \alpha \,.\, \mathrm{tg}\, \omega$
4. $\frac{1}{\varrho} = \frac{\sin \alpha \,.\, \mathrm{tg}\, \omega}{ds}$

Den Winkel zwischen M′P′ und der Ebene PMM′, welcher die Abweichung der Normale am Ende des Elements ds von der durch seinen Anfangspunkt M gelegten Normalebene der Fläche vorstellt, bezeichnen wir mit γ und erhalten

$$\gamma = \frac{PP' \,.\, \sin \alpha}{MP} = \frac{\lambda \,.\, \sin \alpha}{\delta} \text{ oder}$$

5. $\gamma = \cos\alpha \,.\, \operatorname{tg}\omega$

Die Gleichung der Tangential-Ebene des Punkts M sei $dz = p\,dx + q\,dy$; beim Uebergang auf den Punkt M' verwandeln sich p und q in $p + dp$ und $q + dq$. Die Gleichung der Tangential-Ebene in M' ist also

$$dz = (p + dp)\,dx + (q + dq)\,dy$$

Wir wenden nun die Formeln 17 und 18 des §. 1 an, indem wir statt p und q, $p + dp$ und $q + dq$ setzen und bemerken, daß in den Nennern jener Ausdrücke $pp, + qq, + 1$ und kk, die unendlich kleinen Größen dp und dq neben den endlichen Werthen von p und q verschwinden, hiedurch erhalten wir die Formel

6. $$\operatorname{tg}\omega = \sin\omega = \frac{1}{k^2}\sqrt{A}$$

indem wieder der Einfachheit wegen $k^2 = 1 + p^2 + q^2$ und der im Folgenden häufig vorkommende Ausdruck $(1 + q^2)\,dp^2 + (1 + p^2)\,dq^2 - pq\,dp\,dq = A$ gesetzt wird.

Um den Winkel α zu bestimmen, haben wir für die Linie MM' zunächst die Gleichungen

7. $$(x - x') - \frac{dx}{dz}(z - z') = 0; \quad (y - y') - \frac{dy}{dz}(z - z') = 0$$

Die Gleichungen der Linie MS, welche auf beiden Tangential-Ebenen von M und M' zugleich liegt, sind

$$dz = p\,dx + q\,dy \text{ und } dz = (p + dp)\,dx + (q + dq)\,dy \text{ oder}$$
$$0 = dp\,dx + dq\,dy$$

welche Ausdrücke sich auch unter folgender Form darstellen lassen:

8. $$dx + \frac{dq}{q\,dp - p\,dq}\,dz = 0 \quad dy - \frac{dp}{q\,dp - p\,dq}\,dz = 0$$

Nach Anwendung der Formeln 6, 7, 8 in § 1, indem man setzt

$$p = -\frac{dx}{dz}, \quad q = -\frac{dy}{dz}; \; p' = \frac{dq}{q\,dp - p\,dq}, \; q' = -\frac{dp}{q\,dp - p\,dq};$$

ergibt sich

9. $$\cos\alpha = \frac{(q\,dz + dy)\,dp - (p\,dz + dx)\,dq}{ds\sqrt{A}}$$

10. $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{(dp\,dx + dq\,dy)\;k}{(q\,dz + dy)\,dp - (p\,dz + dx)\,dq}$$

11. $$\sin\alpha = \frac{(dp\,dx + dq\,dy)\;k}{ds\sqrt{A}}$$

Bei der Entwicklung des Werths von $\operatorname{tg}\alpha$ ist die Gleichung $dz = p\,dx + q\,dy$ zu berücksichtigen.

Wir haben also für λ, δ, β, $\frac{1}{\varrho}$, γ die Gleichungen

12. $$\lambda = \frac{(q\,dz + dy)\,dp - (p\,dz + dx)\,dq}{\sqrt{A}}$$

13. $$\delta = \frac{k^3}{A}(dp\,dx + dq\,dy)$$

14. $$\beta = \frac{dp\,dx + dq\,dy}{k\,ds}$$

15. $\frac{1}{\varrho} = \frac{dp\,dx + dq\,dy}{k\,ds^2}$

16. $\gamma = \frac{(q\,dz + dy)\,dp - (p\,dz + dx)\,dq}{ds\,k^2}$

§. 4. Die Krümmungslinien.

In den Formeln 9, 10, 11 des §. 3, welche die Werthe des Winkels α angeben, den zwei konjugirte Tangenten in einem Punkt einer Fläche mit einander bilden, setzen wir $\alpha = \text{const.}$ und erhalten dadurch die Differenzial-Gleichungen derjenigen Linien, welche durch die Eigenschaft charakterisirt sind, daß in jedem Punkt derselben der Winkel zwischen der Tangente der Linie und der konjugirten Tangente der Fläche constant ist. In dem speziellen Fall, wo dieser Winkel $= 90^0$, erhält man aus 9 oder 10.

1. $(q\,dz + dy)\,dp - (p\,dz + dx)\,dq = o$

und aus der Gleichung 11 des vorhergehenden Paragraphen

2. $dp\,dx + dq\,dy = \frac{ds\sqrt{A}}{k}$

Die Linien $\alpha = 90^0$ werden Krümmungslinien genannt; ihre Gleichungen sind in 1 und 2 dargestellt, und ihre erste Eigenschaft besteht darin, daß die Tangente der Krümmungslinie auf der konjugirten Tangente der Fläche senkrecht steht. Durch Vergleichung der vorstehenden Formeln mit den Numern 12—16 des §. 3 erhalten wir weiter:

3. $\lambda = \gamma = o$

hierin ist die zweite Eigenschaft der Krümmungslinien enthalten, daß zwei aufeinanderfolgende Normalen sich schneiden, oder daß die Normale am Endpunkt eines Elements der Krümmungslinie nicht aus der Ebene heraustritt, welche sich durch dieses Element und die Normale der Fläche im Anfangspunkt desselben legen läßt. Durch Anwendung von 2 auf die Werthe von δ und $\frac{1}{\varrho}$ ergibt sich

4. $\delta = \varrho = \frac{k^2\,ds}{\sqrt{A}}$

Der Gleichung 1 läßt sich eine andere Form geben, wenn man die Gleichungen 2, 4 und 5 in § 2 benützt, nämlich $dz = p\,dx + q\,dy$ $dp = r\,dx + s\,dy$ $dq = s\,dx + t\,dy$

Man erhält dann nachstehende Gleichung der Krümmungslinien, wie sie von Monge häufig angewendet worden ist:

5. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \left\{(1 + q^2)\,s - pqt\right\} - \frac{dy}{dx}\left\{(1 + q^2)\,r - (1 + p^2)\,t\right\} - (1 + p^2)\,s + pqr = 0$

Dieß ist die Differenzialgleichung der Projektion der Krümmungslinien auf der xy Ebene; da sie in Beziehung auf $\frac{dy}{dx}$ vom zweiten Grade ist, und also 2 Wurzeln hat, so folgt daraus, daß sich in jedem Punkt M einer Fläche 2 Krümmungslinien schneiden. Wir nehmen diesen Punkt als Coordinatenursprung, die Berührungsebene von M als xy Ebene, also die Normale als z Axe an; und setzen demgemäß in der Gleichung 5 $p = q = o$, welche sich dadurch in

6. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dx}\left(\frac{r-t}{s}\right) - 1 = o$ verwandelt.

Das Produkt der beiden Werthe von $\frac{dy}{dx}$ ist hier $= -1$, mithin schneiden sich die Tangenten der Krümmungslinien in M rechtwinklig, wodurch eine weitere Eigenschaft derselben bewiesen ist: die Krümmungslinien bilden auf jeder Fläche zwei orthogonale Liniensysteme. Wählt man die Tangenten der in M sich schneidenden Krümmungslinien zur x und y Axe, so ist in 6. $\frac{dy}{dx} = o$ zu setzen, woraus sich sofort ergibt

7. $s = o$

Für dieses Axensystem wollen wir nun die Werthe der Größen λ, δ, β, $\frac{1}{\varrho}$, γ ermitteln, indem wir in den Ausdrücken 12 — 16 des §. 3 zunächst $p = q = s = o$ setzen und für dp und dq demgemäß r dx und t dy substituiren, und erhalten so:

8. $\lambda = \frac{r\,dx\,dy - t\,dx\,dy}{\sqrt{r^2dx^2 + t^2dy^2}}$

9. $\delta = \frac{r\,dx^2 + t\,dy^2}{\sqrt{r^2dx^2 + t^2dy^2}}$

10. $\beta = \frac{r\,dx^2 + t\,dy^2}{ds}$

11. $\frac{1}{\varrho} = \frac{r\,dx^2 + t\,dy^2}{ds^2}$

12. $\gamma = \frac{r\,dx\,dy - t\,dx\,dy}{ds}$

Wir bezeichnen den Winkel, welchen das Linienelement ds mit der x Axe bildet, durch a und die zwei Werthe von ϱ, welche den Krümmungslinien entsprechen, mit R und R′, so hat man $\frac{dx}{ds} = \cos a$ und $\frac{dy}{ds} = \sin a$. Die Werthe von R und R′ ergeben sich aus 11, indem man darin zuerst $\frac{dx}{ds} = 1$ und $\frac{dy}{ds} = o$ setzt, hierauf $\frac{dx}{ds} = o$ und $\frac{dy}{ds} = 1$, wodurch man erhält

13. $\frac{1}{R} = r$; $\frac{1}{R_,} = t$;

Obige Gleichungen verwandeln sich nun in folgende:

14. $\lambda = \frac{1}{2}\sin 2a \frac{\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}}{\sqrt{\frac{1}{R^2}\cos^2 a + \frac{1}{R_,^2}\sin^2 a}}\,ds$

15. $\delta = \frac{\frac{1}{R}\cos^2 a + \frac{1}{R_,}\sin^2 a}{\frac{1}{R^2}\cos^2 a + \frac{1}{R_,^2}\sin^2 a}$

$$16. \quad \beta = ds \left(\frac{1}{R} \cos^2 a + \frac{1}{R_,} \sin^2 a\right)$$

$$17. \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R} \cos^2 a + \frac{1}{R_,} \sin^2 a$$

$$18. \quad \gamma = \frac{1}{2} \sin 2a \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_,}\right) ds$$

Die Gleichung 17 zeigt an, daß die beiden äußersten Werthe von ϱ gleich R und $R_,$ sind, weßhalb letztere Krümmungshalbmesser **Hauptkrümmungshalbmesser** genannt werden und **hiemit wäre die 4. Haupteigenschaft der Krümmungslinien bewiesen**, wovon sie ihren Namen erhalten haben, und welche darin besteht, **daß ihre Tangenten in jedem Punkte die Richtung der größten und kleinsten Krümmung angeben.**

Aus der Gleichung der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ erhalten wir $p = -\frac{x}{z}$, $q = -\frac{y}{z}$, $dp = \frac{xdz - zdx}{z^2}$, $dq = \frac{ydz - zdy}{z^2}$

Durch Elimination von x, y, z ergibt sich

19. $(qdz + dy)\, dp - (pdz + dx)\, dq = o$

Dieser Ausdruck, als zweite Differenzial-Gleichung der Kugel betrachtet, gilt für jeden Werth von dx und dy, d. h. wenn man einen bestimmten Punkt M der Kugel als Mittelpunkt eines unendlich kleinen Kreises betrachtet, dessen Halbmesser MM' ist, so kann der Punkt M', dessen Coordinaten von denjenigen von M um dx, dy, dz differiren, irgendwo auf der Peripherie dieses Kreises liegen, und bei jeder Lage wird jene Gleichung befriedigt sein; von jedem Punkt der Kugel aus lassen sich also nach allen Richtungen hin Krümmungslinien ziehen, oder, was dasselbe ist, alle Normalen der Kugel schneiden sich in Einem Punkte. Wenn aber die Gleichung 19 einer andern Fläche angehört, so wird sie blos für zwei bestimmte Werthe von $\frac{dy}{dx}$ befriedigt, und der Punkt M' kann nur so liegen, daß die Richtungen MM' diesen zwei Werthen entsprechen; von allen übrigen Punkten des unendlich kleinen Kreises, auf welchem M' liegt, treffen die Normalen der Fläche diejenigen von M nicht.

Eine weitere Methode, die Gleichung der Krümmungslinien zu entwickeln, besteht nach **Monge** darin, die Gleichungen der Normale zu differenziiren. Diese Gleichungen sind nach §. 2, 2

$$x' - x + p(z' - z) = o; \quad y' - y + q(z' - z) = o$$

Betrachtet man hier die laufenden Coordinaten x'y'z' als constant, und xyz als veränderlich, so ist die Bedingung erfüllt, daß die Normalen in den aufeinanderfolgenden Punkten M und M', deren Coordinaten beziehungsweise x,y,z und x + dx, y + dy, z + dz sind, sich schneiden, und zwar in den Punkten x'y'z'. Man erhält dadurch, mit Berücksichtigung von

$$dz = pdx + qdy; \quad dp = rdx + sdy; \quad dq = sdx + tdy$$

20. $dx + p^2 dx + pqdy + (z - z')(rdx + sdy) = o$

21. $dy + pqdx + q^2 dy + (z - z')(sdx + tdy) = o$

oder, wenn das einemal $z - z'$ und das anderemal $\frac{dy}{dx}$ eliminirt wird,

22. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \left\{(1 + p^2)s - pqt\right\} + \frac{dy}{dx} \left\{(1 + q^2)r - (1 + p^2)t\right\} - (1 + p^2)s + pqr = o$

23. $(z - z')^2 g + (z - z') h + k^2 = o$

indem der Kürze wegen gesetzt wird:

$$g = rt - s^2;\; h = (1 + q^2) r + (1 + p^2) t - 2pqs$$

Nach dem Obigen ist der Winkel γ zwischen der Normale und der z Axe bestimmt durch $\cos \gamma = \frac{1}{k}$, mithin ist der Hauptkrümmungs-Halbmesser $R = (z - z') k$, also

$$gR^2 + hkR + k^4 = o$$

24. $R = \frac{k}{2g}\left(- h \pm \sqrt{h^2 - 4k^2g}\right) = \frac{-2k^3}{h \pm \sqrt{h^2 - 4k^2g}}$

Die Gleichung 20 liefert 2 Werthe von R, je nachdem man das obere oder untere Zeichen bei der Quadratwurzel nimmt. Sind beide Werthe von gleichem Vorzeichen, so ist die Fläche gleichartig gekrümmt, wie z. B. das Ellipsoid; sind sie von entgegengesetzten Vorzeichen, so ist die Fläche ungleichartig gekrümmt, d. h. in der Richtung der Einen Krümmungslinie konkav und in der Richtung der andern Krümmungslinie konvex, wie das einmantlige Hyperboloid. Ein dritter Fall ist endlich der, wo der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen gleich h^2 ist; alsdann ist der eine Krümmungshalbmesser gleich unendlich, die entsprechende Krümmungslinie ist gerade, und die Fläche heißt entwickelbare Fläche. Wir haben also folgende Eintheilung:

$h^2 > h^2 - 4k^2g$ oder $rt > s^2$ bei Flächen von gleichartiger Krümmung.
$h^2 < h^2 - 4k^2g$ oder $rt < s^2$ bei Flächen von ungleichartiger Krümmung.
$h^2 = h^2 - 4k^2g$ oder $rt = s^2$ bei entwickelbaren Flächen.

Aus 22 erhält man

25. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\{(1+q^2)s - pqt\}}\left\{(1+q^2)r - (1+p^2)t \pm \sqrt{h^2 - 4k^2g}\right\}$

Die Gleichung 22 kann auch noch in dieser Weise geschrieben werden:

26. $\frac{d\frac{p}{k}}{dy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\frac{p}{k}}{dx} - \frac{d\frac{q}{k}}{dy}\right)\frac{dy}{dx} - \frac{d\frac{q}{k}}{dx} = o$

hier sind die Ableitungen von $\frac{p}{k}$ oder $\frac{q}{k}$ partiell entweder nach x oder nach y genommen.

Nach den Formeln 2 des §. 1 ist $\cos \alpha = -\frac{p}{k}$; $\cos \beta = -\frac{q}{k}$; α und β sind die Winkel zwischen der Normale und den Axen der x und y. Wir haben somit noch eine weitere Form für die Gleichung der Krümmungslinien:

27. $\frac{d \cos \alpha}{dy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d \cos \alpha}{dx} - \frac{d \cos \beta}{dy}\right)\frac{dy}{dx} - \frac{d \cos \beta}{dx} = o$

Wenn die Gleichung $gR^2 + hkR + k^4 = o$ für R gleiche Werthe gibt, so hat die Fläche in dem Punkt alle Krümmungshalbmesser der Normalschnitte gleich, d. h. es ist ein Nabelpunkt vorhanden. Hiedurch ergibt sich die Bedingung $h^2 = 4gk^2$, welche Gleichung sich unter die Form bringen läßt:

$$\left\{(1+p^2)t - (1+q^2)r + 2pq\left(\frac{pqr}{1+p^2} - s\right)\right\}^2 + 4k^2\left(\frac{pqr}{1+p^2} - s\right)^2 = o$$

oder

28. $\frac{r}{1 + p^2} = \frac{t}{1 + q^2} = \frac{s}{pq}$

Die Nabelpunkte oder Punkte sphärischer Krümmung genügen also außer der Gleichung der Fläche noch zwei andern Gleichungen, und scheinen mithin im Allgemeinen in begrenzter Zahl auf einer Fläche vorhanden zu sein. (Siehe § 15.)

Nennen wir die beiden Werthe von R, welche die Gleichung 24 gibt, R und R', so ist

29. $\frac{1}{R \cdot R'} = \frac{g}{k^4}$ 30. $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{h}{k^3}$

Die geometrische Bedeutung der Gleichung der Krümmungslinien

$$(qdz + dy)\, dp - (pdz + dx)\, dq = o$$

kann noch in anderer Weise aufgefaßt werden. Man kann diese Gleichung auch so schreiben:

$$-dq \cdot dx + dp \cdot dy + (qdp - pdq)\, dz = o \text{ oder auch}$$

31. $$\frac{-dq}{\sqrt{A}} \frac{dx}{ds} + \frac{dp}{\sqrt{A}} \frac{dy}{ds} + \frac{qdp - pdq}{\sqrt{A}} \frac{dz}{ds} = o$$

Hier bedeutet ds das Linienelement auf der Fläche, mithin sind $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ die Cosinus der Winkel, welche dieses Element mit den Axen bildet. Die Größe A hat dieselbe Bedeutung, wie oben, nämlich

$$A = (1 + q^2)\, dp^2 + (1 + p^2)\, dq^2 - 2pq\, dp\, dq = dq^2 + dp^2 + (qdp - pdq)^2$$

Die Größen $\frac{-dq}{\sqrt{A}}$, $\frac{dp}{\sqrt{A}}$, $\frac{qdp - pdq}{\sqrt{A}}$ sind somit gleichfalls die Cosinus von 3 Winkeln, welche eine Linie mit den Axen bildet, da man identisch hat

$$\frac{dq^2}{A} + \frac{dp^2}{A} + \frac{(qdp - pdq)^2}{A} = 1$$

Die Gleichungen dieser Linie sind

$$dx + \frac{dq}{qdp - pdq}\, dz = o; \qquad dy - \frac{dp}{qdp - pdq}\, dz = o$$

$$\text{oder } dz = pdx + qdy;\ dpdx + dqdy = o$$

Diese Linie ist mithin der Durchschnitt der durch die zwei Endpunkte des Elements ds gelegten Tangentialebenen, und die Gleichung 31 drückt also aus, daß der Cosinus zwischen ds und diesem Durchschnitt gleich o, oder daß der Winkel zwischen der Tangente der Krümmungslinie und der konjugirten Tangente der Fläche = 90° ist.

Wenn wir, wie oben, den Winkel zwischen zwei konjugirten Tangenten α nennen, so haben wir

32. $$\cos \alpha = \frac{-dq\, dx + dp\, dy + (qdp - pdq)\, dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}\sqrt{(1 + q^2)\, dp^2 + (1 + p^2)\, dq^2 - 2pq\, dp\, dq}}$$

Setzt man hier $\alpha = \text{const.}$, so erhält man die Gleichung derjenigen Linien, bei welchen der Winkel konstant ist, welchen in jedem Punkt die Tangente der Linie mit der konjugirten Tangente der Fläche bildet.

§. 5. Ueber die unendlich nahen Normalen einer Fläche.

Die Theorie dieser Normalen ist in den Gleichungen 14—18 des § 4 enthalten, welche die Werthe der Größen λ, δ, β, $\frac{1}{\varrho}$, γ angeben, mit Rücksicht auf folgendes Coordinatensystem: Der Punkt M der Fläche ist der Ursprung und die Normale dieses Punktes die z Axe. Die Tangenten der zwei durch M gehenden Krümmungslinien sind die beiden übrigen Axen, und zwar entspricht der zx Ebene der Hauptkrümmungshalbmesser R, und der zy Ebene der Hauptkrümmungshalbmesser $R_,$. M ist der Mittelpunkt eines unendlich kleinen Kreises auf der Fläche, dessen Peripherie der Punkt M′ beschreibt, und dessen Halbmesser MM′ = ds ist. Der Winkel zwischen ds und der x Axe wird mit a bezeichnet. Wir betrachten zunächst die Größe λ. Man differenziire den Ausdruck

$$\beta = \frac{1}{2} \sin 2a \frac{\frac{1}{R} - \frac{1}{R_,}}{\sqrt{\frac{\cos^2 a}{R^2} + \frac{\sin^2 a}{R_,^2}}} ds$$

indem man a als Variable betrachtet und setze das Differenzial gleich o, so erhält man

$$1. \quad o = \frac{\cos^4 a}{R^2} - \frac{\sin^4 a}{R_,^2} \quad \text{oder } tg^2 a = \pm \frac{R_,}{R}$$

je nachdem die beiden Hauptkrümmungshalbmesser gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben. Aus 1 folgt weiter

$$2. \quad \sin^2 a = \frac{R_,}{R + R_,} \quad \cos^2 a = \frac{R}{R + R_,} \quad \frac{\cos^2 a}{R^2} + \frac{\sin^2 a}{R_,^2} = \frac{1}{RR_,}$$

Die Gleichung $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R} \cos^2 a + \frac{1}{R_,} \sin^2 a$ verändert sich in folgende

$$3. \quad \varrho = \frac{1}{2} (R + R_,)$$

für λ erhält man den speziellen Werth

$$4. \quad \lambda = \pm \frac{R_, - R}{R_, + R} ds$$

Vorstehende Formeln gelten für den Fall, daß R und $R_,$ gleiche Zeichen haben; sind die Zeichen entgegengesetzt, so ist

$$5. \quad \cos^2 a = \frac{R}{R - R_,} \quad \sin^2 a = - \frac{R_,}{R - R_,}$$

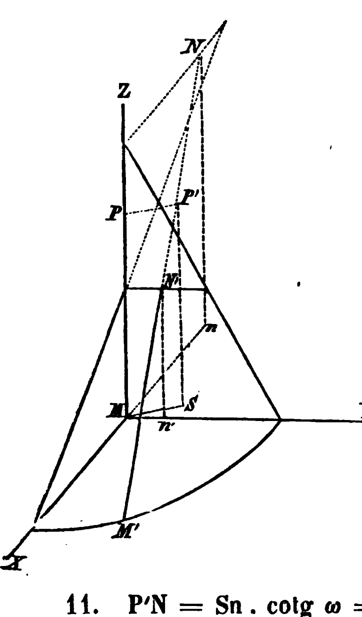
$$6. \quad \lambda = ds; \quad \varrho = \infty \text{ (unendlich)}.$$

In diesen Gleichungen ist nachstehendes Theorem (von Joachimsthal, Journal de M. Liouville, 1848 tome XIII,) enthalten:

Wenn sich eine bewegliche Normale einer Fläche um eine feste so dreht, daß der Fußpunkt der ersten einen unendlich kleinen Kreis vom Halbmesser ds um den Fußpunkt der letzten, als Mittelpunkt, beschreibt, so ist das Maximum der Linie, welche auf beiden Normalen senkrecht steht, entweder gleich der Differenz der Hauptkrümmungshalbmesser dividirt durch ihre Summe,

mal ds; oder gleich ds, je nachdem die Fläche in dem genannten Mittelpunkt gleichartig, oder ungleichartig gekrümmt ist. Die Krümmungshalbmesser derjenigen Normalschnitte, welche durch die Fußpunkte beider Normalen gehen, sind im ersten Fall gleich der halben Summe der Hauptkrümmungshalbmesser, im andern gleich unendlich.

Fig. 3.



Wir haben oben die Punkte auf den Normalen in M und M', welche die kürzeste Entfernung λ derselben angeben, P und P' genannt; die Durchschnittspunkte der beweglichen Normale M'P' mit den Ebenen der zx und der zy nennen wir N und N', und die Projektionen der Punkte N; N'; P' auf der xy Ebene sollen mit n; n'; S bezeichnet werden; dann sind nach dem Vorhergehenden MM' und MS konjugirte Tangenten, deren Winkel gleich α gesetzt wurde. $M'Mx = a$; und $M'Nn = \omega$ Es bestehen jetzt folgende Relationen:

$$MM' = ds,\ MS = \lambda$$

7. $Mn = \lambda \,.\, \sec(\alpha + a)$
8. $Mn' = \lambda \,.\, \operatorname{cosec}(\alpha + a)$
9. $Sn = -\lambda \,.\, \operatorname{tg}(\alpha + a)$
10. $Sn' = -\lambda \,.\, \operatorname{cotg}(\alpha + a)$
11. $P'N = Sn \,.\, \operatorname{cotg}\omega = -\lambda \,.\, \operatorname{tg}(\alpha + a) \,.\, \operatorname{cotg}\omega$
12. $P'N' = Sn' \,.\, \operatorname{cotg}\omega = -\lambda \,.\, \operatorname{cotg}(\alpha + a) \,.\, \operatorname{cotg}\omega$
13. $Nn = M'P' + P'N = \delta - \lambda \,.\, \operatorname{tg}(\alpha + a) \,.\, \operatorname{cotg}\omega$
14. $N'n' = M'P' - P'N' = \delta - \lambda \,.\, \operatorname{cotg}(\alpha + a) \operatorname{cotg}\omega$

Den Frühern zufolge ist $\cos\alpha = \cos a \,.\, \sin a \dfrac{\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{R,}}{\sqrt{\dfrac{\cos^2 a}{R^2} + \dfrac{\sin^2 a}{R,^2}}}$

$$\sin\alpha = \frac{\dfrac{\cos^2 a}{R} + \dfrac{\sin^2 a}{R,}}{\sqrt{\dfrac{\cos^2 a}{R^2} + \dfrac{\sin^2 a}{R,^2}}} \text{ also}$$

15. $\sin(\alpha + a) = \dfrac{1}{R} \dfrac{\cos a}{\sqrt{\dfrac{\cos^2 a}{R^2} + \dfrac{\sin^2 a}{R,^2}}}$; $\cos(\alpha + a) = -\dfrac{1}{R,} \dfrac{\sin a}{\sqrt{\dfrac{\cos^2 a}{R^2} + \dfrac{\sin^2 a}{R,^2}}}$

16. $\operatorname{cotg}\omega = \dfrac{1}{ds\sqrt{\dfrac{\cos^2 a}{R^2} + \dfrac{\sin^2 a}{R,^2}}}$

Die obigen Ausdrücke verwandeln sich nun in folgende:

17. $Mn = -ds \,.\, \cos a \dfrac{R, - R}{R}$

18. $Mn' = ds \,.\, \sin a \, \frac{R' - R}{R_{,}}$

19. $Sn = ds \,.\, \cos^2 a \, \frac{\frac{R_{,} - R}{R^2}}{\sqrt{\frac{\cos^2 a}{R^2} + \frac{\sin^2 a}{R_{,}^2}}}$

20. $Sn' = ds \,.\, \sin^2 a \, \frac{\frac{R_{,} - R}{R_{,}^2}}{\sqrt{\frac{\cos^2 a}{R^2} + \frac{\sin^2 a}{R_{,}^2}}}$

21. $P'N = \cos^2 a \, \frac{\frac{R_{,} - R}{R^2}}{\frac{\cos^2 a}{R^2} + \frac{\sin^2 a}{R_{,}^2}}$

22. $P'N' = \sin^2 a \, \frac{\frac{R_{,} - R}{R_{,}^2}}{\frac{\cos^2 a}{R^2} + \frac{\sin^2 a}{R_{,}^2}}$

23. $Nn = R_{,}$

24. $N'n' = R$

Die beiden letzten Gleichungen in Verbindung mit 17 und 18 enthalten nachstehendes Theorem:

Wenn sich ein Linien-Element auf einer Fläche um einen seiner Endpunkte dreht, so beschreibt die Normale des beweglichen Endpunkts eine Fläche, deren Leitlinien ein Kreis und zwei Gerade sind. Der Kreis ist der Weg dieses beweglichen Endpunkts auf der gegebenen Oberfläche; die geraden Leitlinien sind parallel mit den Tangenten der Krümmungslinien, welche durch den festen Endpunkt des Linien-Elements gehen, und schneiden die Normale dieses Endpunkts, von welcher sie halbirt werden, in den Höhen = $R_{,}$ und R. Die erste dieser geraden Leitlinien liegt in der Ebene des dem Hauptkrümmungshalbmesser R entsprechenden Krümmungskreises und ist gleich $2 ds \frac{R_{,} - R}{R}$; die andere liegt in der Ebene des dem Hauptkrümmungshalbmesser $R_{,}$ entsprechenden Krümmungskreises und ist gleich $2 ds \frac{R_{,} - R}{R_{,}}$.

Durch diesen Satz ist die Bewegung einer Normale, deren Fußpunkt sich auf einem unendlich kleinen Kreis auf einer Fläche dreht, bestimmt, und vollkommen anschaulich gemacht. Wir können hiebei einige spezielle Fälle unterscheiden:

Wenn $R_{,} = R$ ist, so vereinigen sich die beiden geraden Leitlinien in einem Punkt, und die von der Normale beschriebene Fläche ist ein gerader Kegel, dessen Seite = R und dessen Basis der unendlich kleine Kreis ist, dessen Halbmesser = ds. Die gegebene Fläche ist eine Kugel.

Wenn $R_{,} = \infty$ ist, so wird die erste der geraden Leitlinien $= \infty$ und die andere $= 2\,ds$

Die Normale bleibt in ihrer Bewegung stets der zx Ebene, oder der Ebene des Krümmungskreises parallel, welcher vom Hauptkrümmungshalbmesser R beschrieben wird. Die Fläche der Normale ist also ein senkrechtes Conoid. Dieser Fall bezieht sich auf die entwickelbaren Flächen.

$R_{,} = -R$. Die geraden Leitlinien sind gleich $\pm 4\,ds$; sie schneiden die Normale des festen Endpunkts in gleichen Entfernungen auf beiden Seiten ihres Fußpunkts.

§. 6. Die Krümmungshalbmesser der Normalschnitte.

Das Gesetz dieser Krümmungshalbmesser ist in der Gleichung

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R} \cos^2 a + \frac{1}{R_{,}} \sin^2 a$$ (von Euler) enthalten.

Der Krümmungshalbmesser eines zweiten Normalschnitts, dessen Ebene auf derjenigen des ersten senkrecht steht, ist gegeben durch

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{R} \sin^2 a + \frac{1}{R_{,}} \cos^2 a$$ also

$$1. \quad \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_{,}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_{,}}$$ d. h.

Die Summe der reciproken Werthe von zwei Krümmungshalbmessern, deren Ebenen auf einander senkrecht stehen, ist konstant.

Wir haben oben den Winkel zwischen zwei konjugirten Elementen (oder Tangenten) mit α bezeichnet, und wollen die Krümmungshalbmesser der diesen Elementen entsprechenden Normalschnitte ϱ und $\varrho_{,,}$ nennen, so haben wir für $\varrho_{,,}$ die Gleichung

$$2. \quad \frac{1}{\varrho_{,,}} = \frac{1}{R} \cos^2 (\alpha + a) + \frac{1}{R_{,}} \sin^2 (\alpha + a)$$

Oder mit Benützung der Formeln 15 in §. 5

$$3. \quad \frac{1}{\varrho_{,,}} = \frac{1}{RR_{,}} \; \frac{\dfrac{\cos^2 a}{R} + \dfrac{\sin^2 a}{R_{,}}}{\dfrac{\cos^2 a}{R^2} + \dfrac{\sin^2 a}{R_{,}^2}}$$

Wir betrachten den Punkt M auf der Fläche als den Mittelpunkt eines Kegelschnitts, dessen Ebene mit der Berührungsebene zusammenfällt, und dessen Axen gleiche Richtung haben, wie die Tangenten der Krümmungslinien von M. Die Gleichung dieses Kegelschnitts ist

$$4. \quad \frac{x^2}{R} + \frac{y^2}{R_{,}} = 1$$

Die Axen desselben sind also proportional den Größen $\sqrt{R}$ und $\sqrt{R_{,}}$, der Werth des Semidiameters, welcher mit der x Axe den Winkel a bildet, ist, und den wir mit $\sqrt{\varrho}$ bezeichnen, ist gegeben durch die Gleichung

$$5. \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R} \cos^2 a + \frac{1}{R_{,}} \sin^2 a$$

Für zwei sich senkrecht kreuzende Semidiameter $\sqrt{\rho}$ und $\sqrt{\rho_{,}}$ gilt die Formel:

$$6. \quad \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_{,}} = \text{const.}$$

Für zwei konjugirte Semidiameter, $\sqrt{\rho}$ und $\sqrt{\rho_{,,}}$, welche mit der großen Axe beziehungsweise die Winkel a und $\alpha + a$ bilden, bestehen die Relationen

$$7. \quad \sin(\alpha + a) = \frac{1}{R} \frac{\cos a}{\sqrt{\frac{\cos^2 a}{R^2} + \frac{\sin^2 a}{R_{,}^2}}}; \quad \cos(\alpha + a) = -\frac{1}{R_{,}} \frac{\sin a}{\sqrt{\frac{\cos^2 a}{R^2} + \frac{\sin^2 a}{R_{,}^2}}}$$

$$8. \quad \frac{1}{\rho_{,,}} = \frac{1}{RR_{,}} \frac{\frac{\cos^2 a}{R} + \frac{\sin^2 a}{R_{,}}}{\frac{\cos^2 a}{R^2} + \frac{\sin^2 a}{R_{,}^2}}$$

Die Quadrate der Semidiameter unseres Kegelschnitts befolgen also dasselbe Gesetz, wie die Krümmungshalbmesser der Nrrmalschnitte. Zwei konjugirte Tangenten der Fläche fallen mit zwei konjugirten Semidiametern des Kegelschnitts zusammen, welcher eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist, je nachdem die Fläche gleichartig, ungleichartig gekrümmt, oder entwickelbar ist. (Satz von Dupin, welcher den genannten Kegelschnitt die indicatrice nennt.)

Wir geben dem Winkel a die Werthe 45^0, $45^0 + b$, $45^0 - b$ und bezeichnen die entsprechenden Krümmungshalbmesser mit ρ_0 ρ_1 ρ_2, so bestehen folgende Gleichungen

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_{,}}\right)$$

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{R} \cos^2(45 + b) + \frac{1}{R_{,}} \sin^2(45 + b)$$

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{R} \sin^2(45 + b) + \frac{1}{R_{,}} \cos^2(45 + b)$$

$$9. \quad \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_{,}} = \frac{2}{\rho_0}$$

Die drei Krümmungsmittelpunkte, welche den Halbmessern ρ_0, ρ_1, ρ_2 entsprechen, bilden also in Verbindung mit dem Punkt M auf der Fläche vier harmonische Punkte. Nehmen wir noch zwei weitere Krümmungsmittelpunkte auf der Normale an, für welche α die Werthe $45 \pm c$ hat, so sind diese mit den vorhergehenden vier Punkten in Involution.

Die Gleichung 9 läßt sich auch in dieser Form schreiben:

$$10. \quad \left(\rho_1 - \frac{\rho_0}{2}\right)\left(\rho_2 - \frac{\rho_0}{2}\right) = \left(\frac{\rho_0}{2}\right)^2$$

Die Formeln 7 führen zu der Gleichung

$$11. \quad \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg}(\alpha + a) = -\frac{R_{,}}{R}$$

Ferner erhält man aus 3:

12. $\varrho + \varrho_{,,} = R + R_{,}$

d. h. die Summe von je zwei konjugirten Krümmungshalbmessern ist konstant.

Die in den Gleichungen 1 und 12 enthaltenen Sätze sind einer Erweiterung fähig, welche durch diese Formeln ausgedrückt ist

13. $\frac{1}{\varrho_{,}} + \frac{1}{\varrho_{,,}} + \frac{1}{\varrho_{,,,}} + \ldots\ldots \frac{1}{\varrho_{2m}} = m \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_{,}}\right)$

14. $\varrho_{,} + \varrho_{,,} + \varrho_{,,,} + \ldots\ldots \varrho_{2m} = m\,(R + R_{,})$

Im ersten Fall sind $\varrho_{,}\ \varrho_{,,} \ldots \varrho_{2m}$ solche Krümmungshalbmesser, welchen die Werthe $a = \frac{90^0}{m}$; $2\,\frac{90^0}{m}$; $3\,\frac{90^0}{m} \ldots\ldots\ 2m\,\frac{90^0}{m}$ entsprechen; im andern Fall sind $\varrho_{,}\ \varrho_{,,} \ldots\ldots \varrho_{2m}$ Krümmungshalbmesser, welchen die Werthe $a_{,} = \frac{90^0}{m}$; $2\,\frac{90^0}{m}$; $3\,\frac{90^0}{m} \ldots\ldots\ 2m\,\frac{90^0}{m}$ zukommen. Diese Winkel a, werden gebildet durch die x Axe und durch die Durchschnitte der Ebenen der Krümmungskreise von $\varrho_{,}\ \varrho_{,,} \ldots\ \varrho_{2m}$ mit einer durch die x Axe gelegten Ebene, welche mit der Tangentialebene einen Winkel macht, dessen Cosinus $= \sqrt{\frac{R_{,}}{R}}$.

Auf dem Theorem von Euler beruht nachstehende Veranschaulichung der Krümmungs-Verhältnisse in einem Punkt einer Fläche:

In der Tangentialebene einer Fläche beschreibe man einen unendlich kleinen Kreis, dessen Mittelpunkt der Berührungspunkt ist. Dieser Kreis ist die Basis eines Cylinders, dessen Erzeugende von der Tangentialebene und der Fläche begrenzt sind; diese Erzeugenden sind also den reciproken Werthen der Krümmungshalbmesser ϱ proportional. Die Summe von je zwei Erzeugenden, deren Fußpunkte auf dem unendlich kleinen Kreis einen Quadranten begrenzen, ist konstant; hieraus und aus 9. geht hervor, daß die Durchschnittslinie des Cylinders und der Fläche eine Schraubenlinie ist, welche die Erzeugenden des Cylinders unter konstantem Winkel schneidet. Würde man den Mantel des Cylinders abwickeln, so löste sich die Schraubenlinie in 4 gleiche Gerade auf, welche ein Zikzak bilden; die höchsten und die niedrigsten Punkte entsprechen den 4 Erzeugenden, welche die Fläche in ihren Krümmungslinien schneiden; die mittleren Punkte entsprechen 4 anderen Erzeugenden, deren Fußpunkte auf dem unendlich kleinen Kreis mit den Fußpunkten der erstgenannten 4 Erzeugenden ein reguläres Achteck bilden. Mlle. Sophie Germain: Sur la courbure des surfaces (Crelle's Journal Bd. 7. 1).

§. 7. Die Größen δ und γ.

Für die Poldistanz δ haben wir oben die Gleichung gefunden:

$$1.\quad \delta = \frac{\frac{\cos^2 a}{R} + \frac{\sin^2 a}{R_{,}}}{\frac{\cos^2 a}{R^2} + \frac{\sin^2 a}{R_{,}^2}} = \varrho \,.\, \sin^2 \alpha$$

Es seien $\delta_{,}$ und $\varrho_{,}$ die Poldistanz und der Krümmungshalbmesser für ein Linienelement der Fläche senkrecht auf ds, so ist

$$\frac{1}{\delta\varrho} = \frac{\cos^2 a}{R^2} + \frac{\sin^2 a}{R_{,}^2};\quad \frac{1}{\delta_{,}\varrho_{,}} = \frac{\sin^2 a}{R^2} + \frac{\cos^2 a}{R_{,}^2} \text{ also}$$

2. $\frac{1}{\delta\varrho} + \frac{1}{\delta_,\varrho_,} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R_,^2}$

Mit $\delta_{,,}$ und $\varrho_{,,}$ bezeichnen wir den Werth von δ und ϱ für das konjugirte Element und erhalten $\delta_{,,} = \varrho_{,,} . \sin^2\alpha$, also

3. $\frac{\delta}{\delta_{,,}} = \frac{\varrho}{\varrho_{,,}}$

Bei zwei konjugirten Elementen verhalten sich die Poldistanzen wie die Krümmungshalbmesser. Durch Elimination von a zwischen den Gleichungen

$$\delta = \frac{\frac{\cos^2 a}{R} + \frac{\sin^2 a}{R_,}}{\frac{\cos^2 a}{R^2} + \frac{\sin^2 a}{R_,^2}} \text{ und } \frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2 a}{R} + \frac{\sin^2 a}{R_,} \text{ ergibt sich}$$

4. $\delta = \frac{RR_,}{R + R_, - \varrho}$

Ferner ist $\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta_{,,}} = \frac{1}{\varrho . \sin^2\alpha} + \frac{1}{\varrho_{,,} . \sin^2\alpha}$

Nun ist aber $\varrho\varrho_{,,} . \sin^2\alpha = R . R_,$ mithin nach §. 6, 12

5. $\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta_{,,}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_,}$

Für zwei konjugirte Elemente ist die Summe der reciproken Werthe der Poldistanzen konstant.

Nach der Formel 9 des vorigen §. ist demnach

6. $\frac{1}{\delta_,} + \frac{1}{\delta_{,,}} = \frac{2}{\varrho_0}$

Die Pole, welche den Poldistanzen von zwei konjugirten Elementen entsprechen, bilden in Verbindung mit dem Fußpunkt der Normale und dem Krümmungsmittelpunkt von ϱ_0 4 harmonische Punkte. Hieraus folgt unmittelbar der Satz (von Joachimsthal) Journal de M. Liouville XIII, 514.

Die Pole von 6 paarweise konjugirten Elementen sind in Involution.

Der Winkel, welchen die Normale am Endpunkt des Elements ds mit der durch dieses Element bestimmten Normalebene bildet, wurde mit γ bezeichnet, und für denselben der Ausdruck gefunden

$$\gamma = \frac{1}{2} \sin 2a \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_,}\right) ds$$

Es sei $\gamma_,$ der Werth dieses Winkels für einen auf dem ersten senkrecht stehendes Element, so ist

7. $\gamma + \gamma_, = 0$

Ferner entspreche $\gamma_{,,}$ dem konjugirten Element, so ist

8. $\gamma_{,,} = \sin(\alpha + a)\cos(\alpha + a)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_,}\right)ds = -\frac{1}{RR_,} \frac{\sin a . \cos a . ds}{\frac{\cos^2 a}{R^2} + \frac{\sin^2 a}{R_,^2}}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_,}\right)$

$$= -\frac{1}{RR_,} \frac{\gamma}{\frac{\cos^2 a}{R^2} + \frac{\sin^2 a}{R_,^2}}$$

16. $\beta = ds \left(\frac{1}{R} \cos^2 a + \frac{1}{R,} \sin^2 a\right)$

17. $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R} \cos^2 a + \frac{1}{R,} \sin^2 a$

18. $\gamma = \frac{1}{2} \sin 2a \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R,}\right) ds$

Die Gleichung 17 zeigt an, daß die beiden äußersten Werthe von ϱ gleich R und R, sind, weßhalb letztere Krümmungshalbmesser Hauptkrümmungshalbmesser genannt werden und hiemit wäre die 4. Haupteigenschaft der Krümmungslinien bewiesen, wovon sie ihren Namen erhalten haben, und welche darin besteht, daß ihre Tangenten in jedem Punkte die Richtung der größten und kleinsten Krümmung angeben.

Aus der Gleichung der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ erhalten wir $p = -\frac{x}{z}$, $q = -\frac{y}{z}$, $dp = \frac{xdz - zdx}{z^2}$, $dq = \frac{ydz - zdy}{z^2}$

Durch Elimination von x, y, z ergibt sich

19. $(qdz + dy)\, dp - (pdz + dx)\, dq = o$

Dieser Ausdruck, als zweite Differenzial-Gleichung der Kugel betrachtet, gilt für jeden Werth von dx und dy, d. h. wenn man einen bestimmten Punkt M der Kugel als Mittelpunkt eines unendlich kleinen Kreises betrachtet, dessen Halbmesser MM′ ist, so kann der Punkt M′, dessen Coordinaten von denjenigen von M um dx, dy, dz differiren, irgendwo auf der Peripherie dieses Kreises liegen, und bei jeder Lage wird jene Gleichung befriedigt sein; von jedem Punkt der Kugel aus lassen sich also nach allen Richtungen hin Krümmungslinien ziehen, oder, was dasselbe ist, alle Normalen der Kugel schneiden sich in Einem Punkte. Wenn aber die Gleichung 19 einer andern Fläche angehört, so wird sie blos für zwei bestimmte Werthe von $\frac{dy}{dx}$ befriedigt, und der Punkt M′ kann nur so liegen, daß die Richtungen MM′ diesen zwei Werthen entsprechen; von allen übrigen Punkten des unendlich kleinen Kreises, auf welchem M′ liegt, treffen die Normalen der Fläche diejenigen von M nicht.

Eine weitere Methode, die Gleichung der Krümmungslinien zu entwickeln, besteht nach Monge darin, die Gleichungen der Normale zu differenziiren. Diese Gleichungen sind nach §. 2, 2

$$x' - x + p\,(z' - z) = o;\quad y' - y + q\,(z' - z) = o$$

Betrachtet man hier die laufenden Coordinaten x′y′z′ als constant, und xyz als veränderlich, so ist die Bedingung erfüllt, daß die Normalen in den aufeinanderfolgenden Punkten M und M′, deren Coordinaten beziehungsweise x,y,z und x + dx, y + dy, z + dz sind, sich schneiden, und zwar in den Punkten x′y′z′. Man erhält dadurch, mit Berücksichtigung von

$$dz = pdx + qdy;\ dp = rdx + sdy;\ dq = sdx + tdy$$

20. $dx + p^2dx + pqdy + (z - z')(rdx + sdy) = o$

21. $dy + pqdx + q^2dy + (z - z')(sdx + tdy) = o$

oder, wenn das einemal $z - z'$ und das anderemal $\frac{dy}{dx}$ eliminirt wird,

22. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \left\{(1 + p^2)s - pqt\right\} + \frac{dy}{dx} \left\{(1 + q^2)r - (1 + p^2)t\right\} - (1 + p^2)s + pqr = o$

4. $o = A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2 + \ldots\ldots$

Stellt dieselbe eine Linie vor, welche durch den Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems geht, so ist $A = o$; berührt die Linie die Axe der x im Ursprung, so ist auch $B = o$. Wir differenziiren die Gleichung zweimal nach x und setzen $x = y = \frac{dy}{dx} = o$, so ist

$$o = \frac{Cd^2y}{dx^2} + 2D$$

5. $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2D}{c} = \frac{1}{\varrho}$

ϱ ist der Krümmungshalbmesser im Ursprung.

Die allgemeine Gleichung mit 3 Variabelen ist

6. $o = A + Bx + Cy + Dz + Exy + Fxz + Gyz + Hx^2 + Jy^2 + Kz^2 + \ldots$

Stellt diese Gleichung eine Fläche vor, bezogen auf 3 rechtwinklige Axen, die sich in O schneiden, so ist $A = o$, wenn die Fläche durch O geht; berührt sie zugleich die Ebene der xy in O, so ist auch $B = C = o$. Wir setzen nun in $o = Dz + Exy + Fxz \ldots\ldots$ $x = o$ und erhalten wie zuvor aus der Gleichung 4

7. $\frac{1}{\varrho} = -\frac{2J}{D}$

wenn ϱ der Krümmungshalbmesser des durch die Ebene zy in der Fläche hervorgebrachten Schnitts ist. Man lege durch die y Axe eine Ebene, welche mit der zy Ebene den Winkel μ bildet und die Fläche in einer Linie L schneidet, deren Coordinaten z' und y sind. Setzt man $z = z' \cos\mu$ und $x = z' \sin\mu$ in die Gleichung der Fläche,

8. $o = Dz + Exy + Fxz + Gyz + Hx^2 + Jy^2 + Kz^2 + \ldots.$

so ergibt sich nach dem Vorhergehenden

$$\frac{1}{\varrho_,} = -\frac{2J}{D\cos\mu},$$ und durch Vergleichung mit 6

9. $\varrho_, = \varrho \cos\mu$

$\varrho_,$ ist der Krümmungshalbmesser von L für den Punkt O.

Durch einen Punkt M einer Fläche lassen sich unendlich viele Ebenen legen, wovon jede eine besondere Schnittkurve enthält, und mithin auch den Krümmungsmittelpunkt des dieser Kurve für den Punkt M entsprechenden Krümmungskreises. Die Krümmungsmittelpunkte aller jener Ebenen liegen auf einer Fläche, welche die Eigenschaft hat, zufolge des Theorems von Meunier, daß ihre sämmtlichen durch die Normale von M gelegten Schnitte Kreise sind. Die Polargleichung dieser Fläche, welche man die Fläche der Krümmungsmittelpunkte nennen kann, wird erhalten durch die Vergleichung der Sätze

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R}\cos^2 a + \frac{1}{R_,}\sin^2 a$$ und $\varrho_, = \varrho\cos\mu$ und heißt

10. $\frac{1}{\varrho_,} = \frac{1}{\cos\mu}\left(\frac{1}{R}\cos^2 a + \frac{1}{R_,}\sin^2 a\right)$

Die Variabelen sind hier $\varrho_,$, μ und a. $\varrho_,$ ist ein beliebiger Radiusvektor der Fläche vom Ursprung M aus gezogen, der mit der Normale von M den Winkel μ bildet. a ist der Winkel zwischen der durch diese Normale

28. $\frac{r}{1+p^2} = \frac{t}{1+q^2} = \frac{s}{pq}$

Die Nabelpunkte oder Punkte sphärischer Krümmung genügen also außer der Gleichung der Fläche noch zwei andern Gleichungen, und scheinen mithin im Allgemeinen in begrenzter Zahl auf einer Fläche vorhanden zu sein. (Siehe § 15.)

Nennen wir die beiden Werthe von R, welche die Gleichung 24 gibt, R und R', so ist

29. $\frac{1}{R \cdot R'} = \frac{g}{k^4}$ 30. $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{h}{k^3}$

Die geometrische Bedeutung der Gleichung der Krümmungslinien

$$(qdz + dy)\, dp - (pdz + dx)\, dq = o$$

kann noch in anderer Weise aufgefaßt werden. Man kann diese Gleichung auch so schreiben:

$$-dq \cdot dx + dp \cdot dy + (qdp - pdq)\, dz = o \text{ oder auch}$$

31. $\frac{-dq}{\sqrt{A}}\frac{dx}{ds} + \frac{dp}{\sqrt{A}}\frac{dy}{ds} + \frac{qdp - pdq}{\sqrt{A}}\frac{dz}{ds} = o$

Hier bedeutet ds das Linienelement auf der Fläche, mithin sind $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ die Cosinus der Winkel, welche dieses Element mit den Axen bildet. Die Größe A hat dieselbe Bedeutung, wie oben, nämlich

$$A = (1+q^2)\,dp^2 + (1+p^2)\,dq^2 - 2pq\,dp\,dq = dq^2 + dp^2 + (qdp - pdq)^2$$

Die Größen $\frac{-dq}{\sqrt{A}}$, $\frac{dp}{\sqrt{A}}$, $\frac{qdp - pdq}{\sqrt{A}}$ sind somit gleichfalls die Cosinus von 3 Winkeln, welche eine Linie mit den Axen bildet, da man identisch hat

$$\frac{dq^2}{A} + \frac{dp^2}{A} + \frac{(qdp - pdq)^2}{A} = 1$$

Die Gleichungen dieser Linie sind

$$dx + \frac{dq}{qdp - pdq}\, dz = o; \qquad dy - \frac{dp}{qdp - pdq}\, dz = o$$

$$\text{oder } dz = pdx + qdy; \; dpdx + dqdy = o$$

Diese Linie ist mithin der Durchschnitt der durch die zwei Endpunkte des Elements ds gelegten Tangentialebenen, und die Gleichung 31 drückt also aus, daß der Cosinus zwischen ds und diesem Durchschnitt gleich o, oder daß der Winkel zwischen der Tangente der Krümmungslinie und der konjugirten Tangente der Fläche = 90° ist.

Wenn wir, wie oben, den Winkel zwischen zwei konjugirten Tangenten α nennen, so haben wir

32. $\cos\alpha = \frac{-dq\,dx + dp\,dy + (qdp - pdq)\,dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}\sqrt{(1+q^2)\,dp^2 + (1+p^2)\,dq^2 - 2pq\,dp\,dq}}$

Setzt man hier α = const., so erhält man die Gleichung derjenigen Linien, bei welchen der Winkel konstant ist, welchen in jedem Punkt die Tangente der Linie mit der konjugirten Tangente der Fläche bildet.

§. 5. Ueber die unendlich nahen Normalen einer Fläche.

Die Theorie dieser Normalen ist in den Gleichungen 14—18 des § 4 enthalten, welche die Werthe der Größen λ, δ, β, $\frac{1}{\varrho}$, γ angeben, mit Rücksicht auf folgendes Coordinatensystem: Der Punkt M der Fläche ist der Ursprung und die Normale dieses Punktes die z Axe. Die Tangenten der zwei durch M gehenden Krümmungslinien sind die beiden übrigen Axen, und zwar entspricht der zx Ebene der Hauptkrümmungshalbmesser R, und der zy Ebene der Hauptkrümmungshalbmesser R,. M ist der Mittelpunkt eines unendlich kleinen Kreises auf der Fläche, dessen Peripherie der Punkt M' beschreibt, und dessen Halbmesser MM' = ds ist. Der Winkel zwischen ds und der x Axe wird mit a bezeichnet. Wir betrachten zunächst die Größe λ. Man differenziire den Ausdruck

$$\beta = \frac{1}{2} \sin 2a \frac{\frac{1}{R} - \frac{1}{R_,}}{\sqrt{\frac{\cos^2 a}{R^2} + \frac{\sin^2 a}{R_,^2}}} ds$$

indem man a als Variable betrachtet und setze das Differenzial gleich o, so erhält man

1. $o = \frac{\cos^4 a}{R^2} - \frac{\sin^4 a}{R_,^2}$ oder $tg^2 a = \pm \frac{R_,}{R}$

je nachdem die beiden Kauptkrümmungshalbmesser gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben. Aus 1 folgt weiter

2. $\sin^2 a = \frac{R_,}{R + R_,}$ $\cos^2 a = \frac{R}{R + R_,}$ $\frac{\cos^2 a}{R^2} + \frac{\sin^2 a}{R_,^2} = \frac{1}{RR_,}$

Die Gleichung $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R} \cos^2 a + \frac{1}{R_,} \sin^2 a$ verändert sich in folgende

3. $\varrho = \frac{1}{2} (R + R_,)$

für λ erhält man den speziellen Werth

4. $\lambda = \pm \frac{R_, - R}{R_, + R} ds$

Vorstehende Formeln gelten für den Fall, daß R und R, gleiche Zeichen haben; sind die Zeichen entgegengesetzt, so ist

5. $\cos^2 a = \frac{R}{R - R_,}$ $\sin^2 a = - \frac{R_,}{R - R_,}$

6. $\lambda = ds$; $\varrho = \infty$ (unendlich).

In diesen Gleichungen ist nachstehendes Theorem (von Joachimsthal, Journal de M. Liouville, 1848 tome XIII,) enthalten:

Wenn sich eine bewegliche Normale einer Fläche um eine feste so dreht, daß der Fußpunkt der ersten einen unendlich kleinen Kreis vom Halbmesser ds um den Fußpunkt der letzten, als Mittelpunkt, beschreibt, so ist das Maximum der Linie, welche auf beiden Normalen senkrecht steht, entweder gleich der Differenz der Hauptkrümmungshalbmesser dividirt durch ihre Summe,

mal ds; oder gleich ds, je nachdem die Fläche in dem genannten Mittelpunkt gleichartig, oder ungleichartig gekrümmt ist. Die Krümmungshalbmesser derjenigen Normalschnitte, welche durch die Fußpunkte beider Normalen gehen, sind im ersten Fall gleich der halben Summe der Hauptkrümmungshalbmesser, im andern gleich unendlich.

Fig. 3.

Wir haben oben die Punkte auf den Normalen in M und M', welche die kürzeste Entfernung λ derselben angeben, P und P' genannt; die Durchschnittspunkte der beweglichen Normale M'P' mit den Ebenen der zx und der zy nennen wir N und N', und die Projektionen der Punkte N; N'; P' auf der xy Ebene sollen mit n; n'; S bezeichnet werden; dann sind nach dem Vorhergehenden MM' und MS konjugirte Tangenten, deren Winkel gleich α gesetzt wurde. M'Mx = a; und M'Nn = ω Es bestehen jetzt folgende Relationen:

$$MM' = ds, \quad MS = \lambda$$

7. $Mn = \lambda \,.\, \sec(\alpha + a)$

8. $Mn' = \lambda \,.\, \mathrm{cosec}\,(\alpha + a)$

9. $Sn = -\lambda \,.\, \mathrm{tg}\,(\alpha + a)$

10. $Sn' = -\lambda \,.\, \mathrm{cotg}\,(\alpha + a)$

11. $P'N = Sn \,.\, \mathrm{cotg}\,\omega = -\lambda \,.\, \mathrm{tg}\,(\alpha + a) \,.\, \mathrm{cotg}\,\omega$

12. $P'N' = Sn' \,.\, \mathrm{cotg}\,\omega = -\lambda \,.\, \mathrm{cotg}\,(\alpha + a) \,.\, \mathrm{cotg}\,\omega$

13. $Nn = M'P' + P'N = \delta - \lambda \,.\, \mathrm{tg}\,(\alpha + a) \,.\, \mathrm{cotg}\,\omega$

14. $N'n' = M'P' - P'N' = \delta - \lambda \,.\, \mathrm{cotg}\,(\alpha + a)\, \mathrm{cotg}\,\omega$

Den Frühern zufolge ist $\cos\alpha = \cos a \,.\, \sin a \dfrac{\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{R,}}{\sqrt{\dfrac{\cos^2 a}{R^2} + \dfrac{\sin^2 a}{R,^2}}}$

$$\sin\alpha = \frac{\dfrac{\cos^2 a}{R} + \dfrac{\sin^2 a}{R,}}{\sqrt{\dfrac{\cos^2 a}{R^2} + \dfrac{\sin^2 a}{R,^2}}} \text{ also}$$

15. $\sin(\alpha + a) = \dfrac{1}{R} \dfrac{\cos a}{\sqrt{\dfrac{\cos^2 a}{R^2} + \dfrac{\sin^2 a}{R,^2}}}; \ \cos(\alpha + a) = -\dfrac{1}{R,} \dfrac{\sin a}{\sqrt{\dfrac{\cos^2 a}{R^2} + \dfrac{\sin^2 a}{R,^2}}}$

16. $\mathrm{cotg}\,\omega = \dfrac{1}{ds\sqrt{\dfrac{\cos^2 a}{R^2} + \dfrac{\sin^2 a}{R,^2}}}$

Die obigen Ausdrücke verwandeln sich nun in folgende:

17. $Mn = -ds \,.\, \cos a \dfrac{R, - R}{R}$

Berührungsebenen und demgemäß gerade; auch folgt hieraus unmittelbar, daß sie die Tangenten einer Kurve sind. Die durch die Gleichung 6 charakterisirten Flächen werden entwickelbare Flächen genannt.

Die Gleichung 20 des §. 4 gibt für den Hauptkrümmungshalbmesser R, wenn $g = rt - s^2 = o$ gesetzt wird

11. $R = -\frac{k^2}{h}$ oder $= \infty$

Diese Werthe von R zeigen, daß der Kegelschnitt, dessen konjugirte Durchmesser mit den konjugirten Tangenten harmoniren, bei den entwickelbaren Flächen eine Parabel ist.

Zweiter Fall:

12. $s^2 > rt$

Die hieher gehörigen Flächen haben zwei Systeme von Linien $\alpha = o$, da die Gleichung 5 zwei reelle Werthe für $\frac{dy}{dx}$ ergibt. Der Kegelschnitt von Dupin ist eine Hyperbel, deren Asymtoten mit den Tangenten der Linien $\alpha = o$ zusammen fallen. Die Krümmungshalbmesser der diesen Tangenten entsprechenden Normalschnitte sind ebenfalls unendlich groß, mithin ist

13. $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R} \cos^2 a + \frac{1}{R,} \sin^2 a = o$;

14. $tg\, a = \sqrt{\frac{-R,}{R}}$

Die Fläche ist ungleichartig gekrümmt, da die beiden Hauptkrümmungshalbmesser entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Dritter Fall:

15. $s^2 < rt$

Beide Werthe von $\frac{dy}{dx}$ aus der Gleichung 5 sind imaginär, also besitzt die Fläche keine Linien $\alpha = o$; der betreffende Kegelschnitt ist eine Ellipse, von welcher kein Paar konjugirte Durchmesser zusammenfallen können; beide Krümmungshalbmesser haben gleiche Vorzeichen, also ist die Fläche gleichartig gekrümmt.

§. 11. Andere Form der Gleichungen für die Normale und Tangential-Ebene.

In dem Bisherigen wurde vorausgesetzt, daß die Gleichung der Fläche $f(x,y) = z$ sei; die durch Differenziation dieser Gleichung abgeleiteten Formeln sind für die geometrische Anschauung zwar leicht zugänglich, allein sie sind weniger symmetrisch, als diejenigen Formeln, welche man erhält, wenn man von der Gleichung der Fläche in ihrer allgemeinen Form ausgeht.

1. $f(x,y,z) = o$

Wenn in dieser Gleichung x zunimmt, so bezeichnen wir den Coefficienten der ersten Potenz des Zuwachses mit X; ebenso sind Y, Z die durch partielle Zunahme von y oder z entstehenden Differenzialcoefficienten, mithin erhalten wir durch Differenziation von 1

2. $Xdx + Ydy + Zdz = o$

Diese Gleichung kann auch so geschrieben werden

3. $$\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\frac{dx}{ds}+\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\frac{dy}{ds}+\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\frac{dz}{ds}=o$$

wo, wie gewöhnlich $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ gleich dem Linienelement auf der Fläche gesetzt wurde, dessen Projektionen auf den Axen der x, y, z beziehungsweise dx, dy, dz, sind. Die Gleichung 3 ist eine Summe von drei Produkten mit je zwei Faktoren; eine solche Summe bedeutet in der analytischen Geometrie sehr häufig den Cosinus zweier Geraden; und da dieser Cosinus gleich o ist, so stehen beide Gerade auf einander senkrecht. Die eine derselben bildet mit den Axen Winkel, deren Cosinus $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ sind; sie ist also das Element ds oder auch die demselben entsprechende Tangente der Fläche. Da nun die Gleichungen 2 und 3 für unendlich viele Werthe von dx, dy, dz gelten, oder für alle diejenigen Linienelemente, die sich durch einen Punkt einer Fläche auf derselben ziehen lassen, so müssen $\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$, $\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$, $\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$ die Cosinus der Winkel sein, welche eine auf allen jenen Linienelementen senkrecht stehende Gerade mit den Axen bildet. Diese Gerade ist mithin die Normale der Fläche, und da die Gleichung 2 für alle Linienelemente gilt, die sich von einem Punkt aus auf der Fläche ziehen lassen, so ist sie die Gleichung ihrer Tangentialebene, welche auch so geschrieben werden kann:

4. $$X(x'-x)+Y(y'-y)+Z(z'-z)=o$$

wo x, y, z die Coordinaten des Berührungspunkts und x′, y′, z′ die laufenden Coordinaten bedeuten.

Die Gleichung der Normale schreiben wir in dieser Form

5. $$x'-x : y'-y : z'-z = X : Y : Z$$

hier sind x′, y′, z′ die laufenden Coordinaten der Normale und x, y, z diejenigen ihres Fußpunkts auf der Fläche.

Die Gleichung einer unendlich nahen Tangentialebene ergibt sich durch Differenziation von 2

$$dXdx + dYdy + dZdz + Xd^2x + Yd^2y + Zd^2z = o$$

Für die Durchschnittslinie dieser Ebene mit der ersten Tangentialebene bleiben dx, dy, dz konstant. Also sind die Gleichungen dieser Durchschnitts-Linie

6. $$Xdx + Ydy + Zdz = o;\quad dXdx + dYdy + dZdz = o$$

Wenn man durch den Ursprung zwei Ebenen legt,

$$ax + by + cz = o;\quad \alpha x + \beta y + \gamma z = o$$

so ist die Gleichung des Durschnitts dieser Ebenen

$$(a\beta - b\alpha)x + (c\beta - b\gamma)z = o;\quad (a\beta - b\alpha)y + (c\alpha - a\gamma)z = o$$

Die Cosinus der Winkel, welche diese Linie mit den Axen der x, y, z macht, sind also

$$-\frac{c\beta - b\gamma}{M},\ -\frac{c\alpha - a\gamma}{M},\ \frac{a\beta - b\alpha}{M},\ M=\sqrt{(a\beta-b\alpha)^2+(c\alpha-a\gamma)^2+(c\beta-b\gamma)^2}$$

Die Cosinus der Winkel, welche die Linie der Gleichung 6 oder die Durchschnittslinie von zwei unendlich nahen Tangentialebenen

$$Xdx + Ydy + Zdz = o\quad (X + dX)dx + (Y + dY)dy + (Z + dz)dz = o$$

mit den Axen macht, sind daher

$$\frac{ZdY - YdZ}{M'}, \quad \frac{XdZ - ZdX}{M'}, \quad \frac{YdX - XdY}{M'}$$

$$M' = \sqrt{(ZdY - YdZ)^2 + (XdZ - ZdX)^2 + (YdX - XdY)^2}$$

Nennen wir nun, wie früher, den Winkel zwischen dieser Durchschnittslinie und dem Element ds oder den Winkel zwischen zwei konjugirten Tangenten der Fläche α, so ist

$$7. \quad \cos\alpha = \frac{1}{M'.ds}\left\{(ZdY - YdZ)\,dx + (XdZ - ZdX)\,dy + (YdX - XdY)\,dz\right\}$$

Diese Gleichung ist identisch mit der Gleichung 9 des §. 3. Setzt man darin α = const., so ergibt sich ebenfalls die Differenzialgleichung solcher Linien auf den Flächen, bei welchen der Winkel konstant ist zwischen der Tangente der Linie und der konjugirten Tangente der Fläche. In dem speziellen Fall $\alpha = 90^0$ oder $\cos\alpha = o$ ist

$$8. \quad (ZdY - YdZ)\,dx + (XdZ - ZdX)\,dy + (YdX - XdY)\,dz = o$$

Dieß ist die Gleichung der Krümmungslinien.

Die Größe M' ist der Sinus des Winkels zwischen den zwei unendlich nahen Tangentialebenen, oder auch, was dasselbe ist, zwischen ihren Normalen; diesen Winkel bezeichneten wir früher mit ω, demnach ist

$$9. \quad \sin\omega = \sqrt{(ZdY - YdZ)^2 + (XdZ - ZdX)^2 + (YdX - XdY)^2}$$

Die Gleichungen der Normale der Fläche im Punkt x, y, z sind nach 5

$$x' - x : y' - y : z' - z = X : Y : Z$$

Diejenigen der Tangenten, oder der Verlängerung des Elements ds sind

$$10. \quad x' - x : y' - y : z' - z = dx : dy : dz$$

Mithin sind die Gleichungen der Linie, welche auf der Normale und der Tangente zugleich senkrecht steht:

$$11. \quad x' - x : y' - y : z' - z = Zdy - Ydz : Xdz - Zdx : Ydx - Xdy$$

Also ist die Gleichung der Ebene, welche die Normale und die Tangente enthält

$$12. \quad (Zdy - Ydz)(x' - x) + (Xdz - Zdx)(y' - y) + (Ydx - Xdy)(z' - z) = o$$

In allen diesen Gleichungen bezeichnen x, y, z die Coordinaten des Punkts auf der Fläche und x', y', z' die laufenden Coordinaten der betreffenden Linie oder Ebene. Die Gleichung 12 bedeutet, daß jede durch (x y z) in dieser Normalebene gezogene Linie auf der Linie der Gleichung 11 senkrecht steht, denn die Cosinus der Winkel, welche jene Linie mit den Axen bildet, sind den Größen $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$ proportional.

§. 12. Die gewundenen Kurven.

Die Cosinus der Winkel, welche die Tangente in einem Punkt der Kurve mit den Axen bildet, sind

$$1. \quad \frac{dx}{ds}; \quad \frac{dy}{ds}; \quad \frac{dz}{ds}$$

Es sei m' dieser Punkt und mm', m'm'' seien zwei auf einander folgende Elemente der Kurve, so ist die durch diese zwei Elemente bestimmte Ebene die Oskulationsebene der Kurve im Punkt m'; und der Halbmesser des Kreises, welcher durch die drei Punkte m, m', m'' geht, der Krümmungshalbmesser der Kurve im Punkt m'; wir bezeichnen den Mittelpunkt dieses Kreises mit O und seinen Halbmesser mit ϱ; eine in O auf der Oskulationsebene errichtete

Senkrechte ist die Axe derselben. Der Winkel $mm'm''$, den wir ω nennen, ist der Contingenzwinkel. Man verlängere mm' über m' hinaus nach t und $m'm''$ nach t'; $m't = m't' = 1$; die Projektionen von $m't$ auf den Axen sind beziehungsweise gleich $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ und denjenigen von $m't'$ sind $\frac{dx}{ds} + d\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds} + d\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds} + d\frac{dz}{ds}$; daraus folgt, daß die Projektionen von $tt' = \omega$ auf den Axen gleich $d\frac{dx}{ds}$, $d\frac{dy}{ds}$, $d\frac{dz}{ds}$ sind, oder

$$2.\quad \omega = \sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}$$

Durch Differenziation ergibt sich $d\frac{dx}{ds} = \frac{ds\,d^2x - dx\,d^2s}{ds^2}$, $d\frac{dy}{ds} = \frac{ds\,d^2y - dy\,d^2s}{ds^2}$, $d\frac{dz}{ds} = \frac{ds\,d^2z - dz\,d^2s}{ds^2}$, hiernach ist

$$3.\quad \omega = \frac{1}{ds^2}\sqrt{(ds\,d^2x - dx\,d^2s)^2 + (ds\,d^2y - dy\,d^2s)^2 + (ds\,d^2z - dz\,d^2s)^2}$$

Man kann aber auch die Kurve in gleiche Elemente $mm' = m'm'' \ldots = ds$ eintheilen, oder ds als unabhängige Variabele betrachten, dann ist $d^2s = 0$ und man erhält den einfacheren Ausdruck

$$4.\quad \omega = \frac{1}{ds}\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}$$

Wenn man den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen in 3. entwickelt, mit Berücksichtigung von

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2;\quad ds\,d^2s = dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z$$

so erhält man folgende Formel

$$5.\quad \omega = \frac{1}{ds^2}\sqrt{(dy\,d^2z - d^2y\,dz)^2 + (dz\,d^2x - d^2z\,dx)^2 + (dx\,d^2y - d^2x\,dy)^2}$$

Dieser Werth läßt sich noch auf eine andere Weise finden; bezeichnet man allgemein durch a, b, c; α, β, γ die Cosinus der drei Winkel, welche zwei beliebige Gerade im Raum mit einander bilden, so ist der Sinus des Winkels, welchen diese Gerade unter sich machen, durch die Formel gegeben

$$\sqrt{(b\gamma - \beta c)^2 + (c\alpha - \gamma a)^2 + (a\beta - \alpha b)^2}$$

Sind nun diese beiden Geraden die Elemente mm' und $m'm''$, so ist

$$a = \frac{dx}{ds}\quad b = \frac{dy}{ds}\quad c = \frac{dz}{ds}$$

$$\alpha = \frac{dx + d^2x}{ds} - \frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{ds^3}dx,$$

$$\beta = \frac{dy + d^2y}{ds} - \frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{ds^3}dy,$$

$$\gamma = \frac{dz + d^2z}{ds} - \frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{ds^2}dz,$$

wodurch man für $\omega = \sin mm'm''$ den genannten Werth erhält.

Wenn man den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen in 3 entwickelt, und bedenkt, daß

$$-2ds\,d^2s\,(dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z) = -2ds^2d^2s^2$$

ist, so ergibt sich

6. $\omega = \frac{1}{ds}\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2}$

Die vorhergehenden Gleichungen 2—6 erhalten eben so viele Ausdrücke für den Krümmungshalbmesser, indem

7. $\varrho = \frac{ds}{\omega}$ ist.

Man kann dem Werthe von ω noch eine andere Form geben, indem man einen neuen Winkel i einführt; da die Bedingungsgleichung $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$ statt findet, so ist es erlaubt, $\frac{dy}{ds} = \sin\alpha \, . \sin i$ und $\frac{dz}{ds} = \sin\alpha \, . \cos i$ zu setzen, wobei wir den Winkel, dessen Cosinus $\frac{dx}{ds}$ ist, α nennen. Nun ist $\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2 = d\alpha^2 + \sin\alpha^2 \, di^2$ Also nach 2

8. $\omega = \sqrt{d\alpha^2 + \sin^2\alpha \, di}$

Diese Formel kann dazu dienen, die Kurven zu finden, für welche der Krümmungshalbmesser ϱ eine gegebene Funktion des Bogens s ist; man hat nämlich $\sqrt{d\alpha^2 + \sin^2\alpha \, di^2} = \frac{ds}{\varrho}$ und kann also $d\alpha = \sin\varphi(s)\frac{ds}{\varrho}$ und $\sin\alpha \, di = \cos\varphi(s)\frac{ds}{\varrho}$ setzen.

Die oben betrachtete Linie tt′, welche mit den Axen Winkel bildet, deren Cosinus gleich

$$\frac{d\frac{dx}{ds}}{\omega}, \quad \frac{d\frac{dy}{ds}}{\omega}, \quad \frac{d\frac{dz}{ds}}{\omega}$$

sind, ist parallel der Halbirungslinie des Winkels mm′m″, welche durch den Mittelpunkt o des Krümmungskreises mm′m″ geht, om′ ist $= \varrho$. Die Projektionen von ϱ auf den x, y, z Axen sind also durch folgende Relationen gegeben:

9. $\varrho^2 \frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}, \quad \varrho^2 \frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}, \quad \varrho^2 \frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}$

Die Cosinus der Winkel, welche die Oskulationsebene mm′m″ mit den zy, zx, xy Ebenen bildet, oder was dasselbe ist, die Cosinus der Winkel, welche die Axe dieser Ebene, nämlich die in o auf ihr errichtete Senkrechte, mit den x, y, z Axen macht, bezeichnen wir mit a, b, c und erhalten

10. $a = \frac{dy\,d^2z - d^2y\,dx}{\omega\,.\,ds^2}, \quad b = \frac{dz\,d^2x - d^2z\,dx}{\omega\,.\,ds^2}, \quad c = \frac{dx\,d^2y - d^2x\,dy}{\omega\,.\,ds^2}$

Wenn wir die Cosinus der Winkel, welche die Linie om′ mit den Axen bildet, durch α, β, γ ausdrücken, so erhalten wir folgende Zusammenstellung für die Werthe der 9 Cosinus der Winkel, welche nachstehende 3 zu einander senkrechte Gerade mit den Axen bilden: die Tangente in einem Punkt einer gewundenen Kurve (m′t), die Hauptnormale (m′o) und die Axe der Oskulationsebene:

11. $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$

$$\alpha = \frac{d\frac{dx}{ds}}{\omega}, \quad \beta = \frac{d\frac{dy}{ds}}{\omega}, \quad \gamma = \frac{d\frac{dz}{ds}}{\omega}$$

$$a = \frac{dy\,d^2z - d^2y\,dz}{\omega\,.\,ds^2}, \quad b = \frac{dz\,d^2x - d^2z\,dx}{\omega\,.\,ds^2}, \quad c = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{\omega\,.\,ds^2}$$

Es seien m m′ m″ m‴ 4 auf einander folgende Punkte der Kurve; die beiden Oskulationsebenen mm′m″ und m′m″m‴ schneiden sich in der Geraden m′m″; der Winkel, welchen sie mit einander bilden, heißt der Oskulationswinkel; wir bezeichnen ihn mit Ω; durch die Mitte n des Elements m′m″ ziehen wir zwei Gerade nT = nT′ = 1, wovon die erste senkrecht auf der Ebene mm′m″ ist und die andere senkrecht auf der Ebene m′m″m‴. Die Projektionen von nT auf den Axen sind beziehungsweise gleich a, b, c und diejenigen von nT′ gleich a + da, b + db, c + dc, mithin sind die Projektionen von TT′ gleich da, db, dc oder es ist, da Ω = TT′,

12. $\Omega = \sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}$

Da die Linie nT senkrecht auf m′m″ steht, so ist der Cosinus des Winkels Tnm′ = o, oder

$$adx + bdy + cdz = o$$

Die Linie TT′ ist ebenfalls senkrecht auf m′m″, mithin ist

$$da\,dx + db\,dy + dc\,dz = o$$

Wenn man die erste Gleichung differenzirt, und das Resultat mit der zweiten vergleicht, so findet man

$$ad^2x + bd^2y + cd^2z = o$$

Zu demselben Resultat würde man auch durch die Gleichungen 10 gelangen, wenn man die erste derselben mit d^2x, die zweite mit d^2y und die dritte mit d^2z multiplizirte.

Wir setzen nun $dyd^2z - d^2ydz = d\xi$, $dzd^2x - d^2zdx = d\eta$, $dxd^2y - d^2xdy = d\zeta$. Ferner sei $d\sigma = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}$, so erhalten wir die Formeln für Ω aus denjenigen für ω durch bloße Veränderung der Buchstaben; indem wir statt ds $d\sigma$, statt dx, dy, dz, die Bezeichnungen $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ setzen. Aus 3. erhalten wir

13. $\Omega = \frac{1}{d\sigma^2}\sqrt{(d\sigma d^2\xi - d\xi d^2\sigma)^2 + (d\sigma d^2\eta - d\eta d^2\sigma)^2 + (d\sigma d^2\zeta - d\zeta d^2\sigma)^2}$

Würde man hier $d\sigma$ als unabhängige Variabele betrachten, so wäre $d^2\sigma = o$, und man erhielte für Ω den einfacheren Werth

14. $\Omega = \frac{1}{d\sigma}\sqrt{d^2\xi^2 + d^2\eta^2 + d^2\zeta^2}$

Aus 5. erhalten wir die weitere Relation

15. $\Omega = \frac{1}{d\sigma^2}\sqrt{(d\eta d^2\zeta - d^2\eta d\zeta)^2 + (d\zeta d^2\xi - d^2\zeta d\xi)^2 + (d\xi d^2\eta - d^2\xi d\eta)^2}$

und aus 6.

16. $\Omega = \frac{1}{d\sigma}\sqrt{d^2\xi^2 + d^2\eta^2 + d^2\zeta^2 - d^2\sigma^2}$

Nun ist

$$d\eta d^2\zeta - d^2\eta d\zeta = (dzd^2x - d^2zdx)(dxd^3y - d^3xdy) - (dzd^3x - d^3zdx)(dxd^2y - d^2xdy)$$
$$= dx\{(dyd^2z-d^2ydz)d^3x+(dzd^2x-d^2zdx)d^3y+(dxd^2y-d^2xdy)d^3z\}$$
$$= dx\{(d^2yd^3z-d^3yd^2z)dx+(d^2zd^3x-d^3zd^2x)dy+(d^2xd^3y-d^3xd^2y)dz\}$$

Ebenso findet man

$$d\zeta d^2\xi - d^2\zeta d\xi = \frac{dy}{dx}(d\eta d^2\zeta - d^2\eta d\zeta)$$
$$d\xi d^2\eta - d^2\xi d\eta = \frac{dz}{dx}(d\eta d^2\zeta - d^2\eta d\zeta)$$

Mithin ist nach der Formel 15

$$17.\quad \Omega = \frac{(dyd^2z-d^2ydz)d^3x+(dzd^2x-d^2zdx)d^3y+(dxd^2y-d^2xdy)d^3z}{(dyd^2z-d^2ydz)^2+(dzd^2x-d^2zdx)^2+(dxd^2y-d^2xdy)^2}\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

$$18.\quad \Omega = \frac{(d^2yd^3z-d^3yd^2z)dx+(d^2zd^3x-d^3zd^2x)dy+(d^2xd^3y-d^3xd^2y)dz}{(dyd^2z-d^2ydz)^2+(dzd^2x-d^2zdx)^2+(dxd^2y-d^2xdy)^2}\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

Den Ausdruck $\frac{ds}{\Omega}$ setzen wir $= r$, dann ist r der sogenannte Torsionshalbmesser; die vorhergehenden Formeln für Ω geben die entsprechenden Werthe von r.

Durch Verbindung der Ausdrücke 5, 7, 17 und 18 erhalten wir

$$19.\quad r = \frac{ds^6}{\varrho^2}\{(dyd^2z-d^2ydz)d^3x+(dzd^2x-d^2zdx)d^3y+(dxd^2y-d^2xdy)d^3z\}$$

$$20.\quad r = \frac{ds^6}{\varrho^2}\{(d^2yd^3z-d^3yd^2z)dx+(d^2zd^3x-d^3zd^2x)dy+(d^2xd^3y-d^3xd^2y)dz\}$$

Um die geometrische Bedeutung der Größen d^2s, d^2x, d^2y, d^2z besser würdigen zu können, stellen wir noch einige weitere Betrachtungen an. Wir bezeichnen wieder mit m, m', m'' drei auf einander folgende Punkte der Kurve, nehmen aber die dazwischen liegenden Elemente ungleich an, so daß

$$mm' = ds \qquad m'm'' = ds + d^2s$$

ist; d^2s bedeutet den unendlich kleinen Zuwachs des Elements ds gerade so, wie ds den unendlich kleinen Zuwachs des Bogens s der Kurve vorstellt. Die Projektionen von mm' auf den Axen sind dx, dy, dz, diejenigen von $m'm''$ sind $dx + d^2x$, $dy + d^2y$, $dz + d^2z$; hieraus folgt die Gleichung $(ds + d^2s)^2 = (dx + d^2x)^2 + (dy + d^2y)^2 + (dz + d^2z)^2$ oder, wenn man entwickelt und bedenkt, daß $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ ist, und daß die Größen d^2s^2, d^2x^2, d^2y^2, d^2z^2 im Verhältniß zu den andern unendlich klein sind, und also weggelassen werden können:

$$22.\quad d^2s = \frac{dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z}{ds}$$

Dieser Werth, welcher sonst durch Differenziation der Gleichung $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ gefunden wird, gibt noch zu einigen Bemerkungen Veranlassung: Er enthält nämlich rechts die Summe von drei Produkten mit je zwei Faktoren; eine solche Summe kann immer so aufgefaßt werden, daß sie den Cosinus des Winkels zweier Geraden im Raume darstellt. Setzen wir nämlich allgemein $a\alpha + b\beta + c\gamma = A$ und bezeichnen $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ mit s, $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$ mit σ, so ist $\frac{a}{s}\,\frac{\alpha}{\sigma} + \frac{b}{s}\,\frac{\beta}{\sigma} + \frac{c}{s}\,\frac{\gamma}{\sigma} = \frac{A}{s\sigma}$
Da nun $\frac{a^2}{s^2} + \frac{b^2}{s^2} + \frac{c^2}{s^2} = 1$ ist, wie auch $\frac{\alpha^2}{\sigma^2} + \frac{\beta^2}{\sigma^2} + \frac{\gamma^2}{\sigma^2} = 1$, so

sind $\frac{a}{s}$, $\frac{b}{s}$, $\frac{c}{s}$ die Cosinus der Winkel, welche die erste Gerade mit den Axen macht, und $\frac{\alpha}{\sigma}$, $\frac{\beta}{\sigma}$, $\frac{\gamma}{\sigma}$ die Cosinus der Winkel, welche die zweite Gerade mit den Axen bildet. $\frac{A}{s.\sigma}$ ist der Cosinus des Winkels zwischen beiden Geraden. Wenn wir diese Ueberlegungen auf die Gleichung 22 anwenden, so können wir sie zunächst in die Form bringen

$$23.\ \frac{d^2s}{\sqrt{d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2}} = \frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{\sqrt{d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2}} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{\sqrt{d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2}} + \frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{\sqrt{d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2}}$$

Der Ausdruck rechts ist der Cosinus des Winkels zweier Geraden; die erste bildet mit den Axen Winkel, deren Cosinus beziehungsweise sind $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$; diese Gerade ist also das Element mm'. Um die zweite Gerade zu finden, verlängern wir mm' über m' hinaus nach n, nehmen auf m'm'' den Punkt l so an, daß $m'l = m'n = mm'$ ist, und ziehen die Geraden nl, nm''. Die Projektionen von m'n auf den Axen sind dx, dy, dz. Diejenigen von m'm'' sind $dx + d^2x$, $dy + d^2y$, $dz + d^2z$, also sind die Projektionen von nm'' auf den Axen gleich d^2x, d^2y, d^2z, mithin ist

$$24.\quad nm'' = \sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}$$

Die Cosinus der Winkel, welche nm'' mit den Axen bildet, sind $\frac{d^2x}{nm''}$, $\frac{d^2y}{nm''}$, $\frac{d^2z}{nm''}$. Mithin drückt die rechte Seite der Gleichung 23 den Cosinus des Nebenwinkels von m'nm'' aus; dieser Winkel ist aber gleich m'' + nm'm''; nm'm'' ist unendlich klein im Verhältniß zu m'', also ist m'nm'' = m'', und wenn man das Dreieck lnm'' als rechtwinklig ansieht, so ist andererseits $\cos m'' = \frac{lm''}{nm''} = \frac{d^2s}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}}$, somit wäre die Richtigkeit der Gleichung 23, oder von 22 auch auf rein geometrischem Wege nachgewiesen.

In dem rechtwinkligen Dreieck nlm'' ist $ln = \sqrt{nm''^2 - lm''^2}$ oder, da $ln = \omega\,.\,ds$ ist, $\omega\,.\,ds = \sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2}$
Hierin liegt auch der geometrische Nachweis der Formel 6 für den Contingenzwinkel ω.

§. 13. Die gewundenen Kurven. Fortsetzung.

Wir betrachten wieder, wie früher, vier auf einander folgende Punkte m m' m'' m''' der Kurve und ziehen durch m' drei auf einander senkrechte Linien, $m't = m'T = m'\tau = 1$; die erste ist die Tangente der Kurve, oder die Verlängerung des Elements und bildet mit den Axen Winkel, deren Cosinus durch die deutschen Buchstaben a, b, c bezeichnet werden; die zweite ist die Axe der Oskulationsebene mm'm'' und bildet mit den Axen Winkel,

deren Cosinus a, b, c genannt werden; die dritte ist senkrecht auf mm′ und liegt in der Oskulationsebene; ihre Verlängerung geht durch den Mittelpunkt o des Krümmungskreises mm′m″, und die Cosinus der Winkel, die sie mit den Axen bildet, sind wie früher α, β, γ. Es bestehen nun folgende Relationen:

1. $a^2 + b^2 + c^2 = 1; \quad \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 = 1; \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$

Durch Differenziation

2. $a\,da + b\,db + c\,dc = 0; \quad \mathbf{a}\,d\mathbf{a} + \mathbf{b}\,d\mathbf{b} + \mathbf{c}\,d\mathbf{c} = 0$
$$\alpha\,d\alpha + \beta\,d\beta + \gamma\,d\gamma = 0$$

Die Gleichungen 1 rühren daher, daß die drei Axen auf einander senkrecht stehen; die Gleichungen 2 sind die Formeln für die Cosinus von drei rechten Winkeln; zieht man nämlich durch m′ drei weitere Linien, m′t′, m′T′, m′$\textsc{t}$′ = 1, wovon die erste die Verlängerung des Elements m′m″, die zweite senkrecht auf der Oskulationsebene m′m″m‴ und die dritte senkrecht auf dem Element m′m″ ist, und in der zweiten Oskulationsebene m′m″m‴ liegt, so sind die Cosinus der Winkel, welche die Linien tt′, TT′, $\textsc{tt}$′ mit den Axen bilden,

$$\frac{da}{\sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}}, \quad \frac{db}{\sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}}, \quad \frac{dc}{\sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}},$$
$$\frac{d\mathbf{a}}{\sqrt{d\mathbf{a}^2 + d\mathbf{b}^2 + d\mathbf{c}^2}}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{\sqrt{d\mathbf{a}^2 + d\mathbf{b}^2 + d\mathbf{c}^2}}, \quad \frac{d\mathbf{c}}{\sqrt{d\mathbf{a}^2 + d\mathbf{b}^2 + d\mathbf{c}^2}},$$
$$\frac{d\alpha}{\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}}, \quad \frac{d\beta}{\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}}, \quad \frac{d\gamma}{\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}},$$

Die Gleichungen 2 bedeuten also, daß die Winkel m′tt′, m′TT′, m′$\textsc{tt}$′ als Rechte anzusehen sind, wenn man blos die unendlich kleinen Größen erster Ordnung in Betracht zieht. Wir haben ferner die Relationen:

3. $a\mathbf{a} + b\mathbf{b} + c\mathbf{c} = 0; \quad a\alpha + b\beta + c\gamma = 0; \quad \mathbf{a}\alpha + \mathbf{b}\beta + \mathbf{c}\gamma = 0$

welche sich auf die Cosinus der rechten Winkel tm′T, tm′$\textsc{t}$, Tm′$\textsc{t}$ beziehen.

Die Quadratsummen der drei Cosinus, welche die Axen der x, y, z je mit den drei Linien m′t, m′T, m′$\textsc{t}$ bilden, sind gleich 1, also

4. $a^2 + \mathbf{a}^2 + \alpha^2 = 1; \quad b^2 + \mathbf{b}^2 + \beta^2 = 1; \quad c^2 + \mathbf{c}^2 + \gamma^2 = 1$

und durch Differenziation

5. $a\,da + \mathbf{a}\,d\mathbf{a} + \alpha\,d\alpha = 0; \quad b\,db + \mathbf{b}\,d\mathbf{b} + \beta\,d\beta = 0; \quad c\,dc + \mathbf{c}\,d\mathbf{c} + \gamma\,d\gamma = 0$

Der Contingenzwinkel tm′t′ wurde mit ω, der Oskulationswinkel Tm′T′ mit Ω bezeichnet, mithin ist tt′ = ω und TT′ = Ω, und da die Projektionen von tt′ auf den Axen der x, y, z gleich sind da, db, dc und diejenigen von Ω gleich $d\mathbf{a}$, $d\mathbf{b}$, $d\mathbf{c}$, so ist mit Berücksichtigung des Parallelismus der Linien tt′, TT′, m′$\textsc{t}$

6. $\omega \cdot \alpha = da; \quad \omega \cdot \beta = db; \quad \omega \cdot \gamma = dc$

7. $\Omega\alpha = d\mathbf{a}; \quad \Omega\beta = d\mathbf{b}; \quad \Omega\gamma = d\mathbf{c}$

Diese Relationen in Verbindung mit 5 geben

8. $d\alpha = -a\omega - \mathbf{a}\Omega; \quad d\beta = -b\omega - \mathbf{b}\Omega; \quad d\gamma = -c\omega - \mathbf{c}\Omega$

Durch Quadriren dieser Gleichungen erhält man ferner

9. $d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 = \omega^2 + \Omega^2$ oder

10. $\textsc{tt}'^2 = tt'^2 + TT'^2$.

Die geometrische Bedeutung dieser Gleichung ist wieder sehr einfach; die Axen m′t, m′T, m′$\textsc{t}$ werden in die zweite Lage m′t′, m′T′, m′$\textsc{t}$′ durch zwei Drehungen gebracht; bei der ersten Drehung ist m′T die feste Axe; m′t dreht sich nach m′t′ und m′$\textsc{t}$ kommt in die Lage m′$\textsc{t}$″, so daß $\textsc{tt}$″ = tt′ ist; bei

der zweiten Drehung bleibt m't' fest, m'T dreht sich nach m'T' und m'T'' kommt in die Lage m'T', so daß T''T' = TT' ist; nun ist offenbar TT''T' ein bei T'' rechtwinkliges Dreieck, also $TT'^2 = TT''^2 + T''T'^2 = tt'^2 + TT'^2$.

Die Gleichungen 9 und 10 führen auf einige Fragen, welche die Grundlage der Theorie der Kurven bilden. Dieselben enthalten 3 Variabeln, nämlich den Winkel zwischen zwei auf einander folgenden Hauptkrümmungshalbmessern, den Contigenzwinkel und den Torsionswinkel. Man kann sich nun eine dieser Größen als Funktion der andern denken, so ergibt sich in Verbindung mit einer der genannten Gleichungen eine Relation, welche nur noch zwei dieser Winkel enthält; durch Spezialisirung der gegebenen Funktion entsteht sofort eine Reihe von Differenzialgleichungen, wovon jede einer gewissen Klasse von Kurven entspricht. Man gelangt so zu einer Eintheilung der Kurven, die derjenigen der Flächen analog ist, welche Monge in die Geometrie einführte, indem er gewisse Relationen zwischen den beiden Hauptkrümmungshalbmessern in einem Punkt einer Fläche annahm, und aus diesen Relationen die Gleichungen der Flächen ableitete. Bezeichnet man die Hauptkrümmungshalbmesser mit R und R', so ist $R = R'$ die einfachste dieser Differenzialgleichungen, welche durch Integration auf die Kugel führt; eine andere Gattung von Flächen ist durch die Beziehung $R + R' = o$ charakterisirt, worunter sich eine Schraubenfläche befindet, deren Erzeugende parallel einer Ebene ist, und welche sich durch die Eigenschaft auszeichnet, in sich selbst verschiebbar zu sein, eine Eigenschaft, welche sie nur mit den Drehungsflächen gemein hat. Die Flächen $R \cdot R' = \text{const.}$ können, was aus den Gauß'schen Untersuchungen über die Abbildung der Flächen hervorgeht, auf einer Kugel abgebildet werden. Es bieten sich hier noch weitere, bis jetzt unbeantwortete Fragen über die Diskussion von Differenzialgleichungen dar, z. B. $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \text{const.}$ $R^2 + R'^2 = \text{const.}$ u. s. f.

Ein ähnliches Verfahren läßt sich nun bei den gewundenen Kurven einschlagen; der Hauptkrümmungshalbmesser $\varrho = \frac{ds}{\omega}$ und der Torsionshalbmesser $r = \frac{ds}{\Omega}$ stehen in sehr einfachen Beziehungen zu den Winkeln ω und Ω, eine Relation zwischen ω und Ω läßt sich also unmittelbar in eine entsprechende zwischen ϱ und r umsetzen. Betrachten wir z. B. die Kurven, welchen folgende Gleichungen zukommen:

11. $\varrho = r = \text{const.}$ oder $\omega = \Omega = \text{const.}$
12. $\varrho = \text{const.}$ $r = \text{const.}$ oder $\omega = \text{const.}$ $\Omega = \text{const.}$
13. $\frac{\varrho}{r} = \text{const.}$ oder $\frac{\omega}{\Omega} = \text{const.}$

Die Eigenschaften derselben lassen sich sehr leicht geometrisch entwickeln, wie es zuerst Bertrand zeigte.

Wenn man durch einen festen Punkt Linien zieht, parallel mit den Tangenten einer gewundenen Kurve, so erhält man einen Kegel, dessen Erzeugende unter sich Winkel bilden, welche den Contingenzwinkeln der Kurve entsprechen, während die beiden durch drei auf einander folgende Erzeugende bestimmten Tangentialebenen des Kegels einen Winkel einschließen, gleich dem Oskulationswinkel der Kurve. Die Linie $\omega = \text{const.}$ ist eine solche, der sich ein gleichseitiges und gleichwinkliges Polygon von unendlich vielen Seiten

einbeschreiben läßt. Liegt eine solche Kurve in der Ebene, so ist sie ein Kreis, mithin haben wir schon einen speziellen Fall, welcher der Gleichung 12 entspricht, nämlich ω = const. Ω = o. Um aber die übrigen Kurven ω = const. Ω = const. zu finden, nehmen wir die Spitze des Kegels als den Mittelpunkt einer Kugel an, welche denselben in einer sphärischen Kurve schneidet. Gleichen auf einander folgenden Elementen der gegebenen Kurve entsprechen eben so viele Erzeugende des Kegels, welche unter sich gleiche Winkel bilden, und also auf der sphärischen Kurve gleiche Bögen abschneiden. Zieht man durch die Mitten dieser Bögen Linien, die auf denselben senkrecht sind, und zugleich die Kugel tangiren, so sind die von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich den Oskulationswinkeln der gegebenen Kurve; mithin sind sie unter sich gleich, also sind diese Linien ebenfalls unter einander gleich und schneiden sich somit in einem Punkt; die genannte sphärische Kurve ist demnach ein Kreis und der Hülfskegel ist ein Drehungskegel, dessen Erzeugende mit der Axe einen konstanten Winkel bilden; die Tangenten der gegebenen Kurve bilden also ebenfalls mit einer Geraden konstante Winkel; diese Kurve selbst liegt auf einem Cylinder, dessen Erzeugende ihre Elemente unter konstantem Winkel schneiden. Da die zwischen je zwei unendlich nahen Erzeugenden liegenden Elemente der Kurve mit denselben sowohl, als auch unter sich selbst gleiche Winkel bilden, so folgt daraus, daß der Winkel zwischen den entsprechenden Tangentialebenen des Cylinders konstant, und daß mithin ein auf den Erzeugenden senkrechter Schnitt desselben ein Kreis ist. Die Kurven, welche der Gleichung 12 entsprechen, sind daher Schraubenlinien, welche die Erzeugenden eines Cylinders mit kreisförmiger Basis unter konstantem Winkel schneiden; ist dieser Winkel gleich 45 Grad, so erhält man den durch die Gleichung 11 dargestellten speziellen Fall, weil dann die Erzeugenden der zwei Kegel, welche mit der Kugel konzentrisch sind und sie berühren, mit ihrer Axe einen Winkel von 45 Graden bilden. Zur dritten Art von Kurven gehören solche, bei welchen weder der Contingenz-, noch der Torsionswinkel konstant ist, sondern nur das Verhältniß beider. Wir theilen die gegebene Kurve wieder in gleiche Elemente ein, konstruiren den Kegel, dessen Erzeugende parallel mit diesen Elementen sind, und welcher von einer konzentrischen Kugel in einer sphärischen Kurve geschnitten wird. Da die Contingenzwinkel der gegebenen Kurve nicht mehr unter sich gleich sind, so sind auch die Winkel zwischen je zwei Erzeugenden des Kegels und mithin auch die entsprechenden Bögen der sphärischen Kurve ungleich. Zieht man durch die Mitten dieser Bögen Linien, welche die Kugel tangiren und zugleich senkrecht auf der sphärischen Kurve sind, so ist das Verhältniß der Winkel zwischen je zwei solchen Linien und zwischen den Erzeugenden des Kegels konstant, woraus sich wieder ergibt, daß diese Linien in einem Punkte zusammentreffen müssen; der Hülfskegel ist also gleichfalls ein Drehungskegel, alle Tangenten der gegebenen Kurve machen mit einer bestimmten Geraden, welche der Axe dieses Drehungskegels parallel ist, einen konstanten Winkel. Diese Kurve liegt somit auch auf einem Cylinder, dessen Erzeugende sie unter konstantem Winkel schneidet. Derselbe ist aber kein Drehungscylinder, denn die einzelnen Elemente der Kurve, welche wir unter einander gleich annehmen, bilden zwar gleiche Winkel mit den Erzeugenden, aber der Contingenzwinkel wechselt von einem Element zum andern, mithin wechselt auch der Winkel zwischen den entsprechenden Tangentialebenen des Cylinders, also ist ein senkrechter Schnitt desselben nicht mehr kreisförmig.

Wir haben nun folgende Zusammenstellung:

1. Beide Krümmungshalbmesser einer gewundenen Kurve sind unter sich gleich und konstant; die Kurve ist eine Schraubenlinie, welche die Erzeugenden eines Cylinders mit kreisförmiger Basis unter einem Winkel von 45 Graden schneidet. Diese Kurve ist in sich selbst verschiebbar.

Beide Hauptkrümmungshalbmesser einer Fläche sind unter sich gleich und konstant; die Fläche ist eine Kugel, welche nach allen Richtungen in sich selbst verschiebbar ist.

2. Jeder der beiden Krümmungshalbmesser einer gewundenen Kurve ist konstant. Die Kurven sind Schraubenlinien, welche die Erzeugenden eines Cylinders mit kreisförmiger Basis unter einem beliebigen, aber konstanten Winkel schneiden. In dem speziellen Fall, wo einer der Krümmungshalbmesser unendlich groß ist, erhält man einen Kreis. Diese Kurven sind ebenfalls in sich selbst verschiebbar.

Unter den Flächen, bei welchen beide Hauptkrümmungshalbmesser konstant und unter sich ungleich sind, ist nur der Cylinder mit kreisförmiger Basis zu nennen, bei welchem ein Krümmungshalbmesser unendlich groß ist. Diese Fläche ist gleichfalls in sich selbst verschiebbar und zwar nach zwei zu einander senkrechten Richtungen.

3. Das Verhältniß der beiden Krümmungshalbmesser einer gewundenen Kurve ist konstant; dieselbe ist eine Schraubenlinie, welche die Erzeugenden eines Cylinders mit beliebiger Basis unter einem konstanten Winkel schneidet. Solche Kurven sind nicht in sich selbst verschiebbar.

Unter den Flächen, bei welchen das Verhältniß der beiden Hauptkrümmungshalbmesser konstant ist, sind diejenigen hervorzuheben, bei welchen dieses Verhältniß gleich — 1 und gleich — 2 ist. Zu der ersten Art gehört die Schraubenfläche, deren Erzeugende parallel einer Ebene ist, und die durch Umdrehung einer Kettenlinie um ihre Direktrice erzeugte Drehungsfläche. Zur zweiten Art gehört die durch Umdrehung einer Parabel um ihre Direktrice erzeugte Drehungsfläche.

§. 14. Die gewundenen Kurven. Schluß.

Fig. 4.

m m′ m″ m‴ sind vier auf einander folgende Punkte einer solchen Kurve; die beiden Oskulationsebenen m m′ m″ und m′ m″ m‴ schneiden sich in m′ m″; durch die Mitte n dieses Elements ziehen wir zwei zu demselben senkrechte Linien; die erste no liegt in der Ebene m m′ m″ und die zweite no′ liegt in der Ebene m′ m″ m‴; o ist der Mittelpunkt

des Krümmungskreises $mm'm''$; o' ist der Mittelpunkt des Krümmungskreises $m'm''m'''$; die Richtungen $m'm''$ und oo' sind offenbar zu einander senkrecht, und da oo' ein Element der Kurve der Krümmungskreismittelpunkte ist, so folgt hieraus der Satz:

1. Die Tangenten einer gewundenen Kurve und der Linie ihrer Krümmungskreismittelpunkte stehen in je zwei entsprechenden Punkten auf einander senkrecht.

Die Mittelpunkte sämmtlicher Kugeln, welche sich um die drei Punkte $mm'm''$ beschreiben lassen, oder welche den Krümmungskreis $mm'm''$ zum gemeinschaftlichen Durchschnitt haben, liegen auf der Axe dieser Oskulationsebene, d. h. auf der in o auf derselben errichteten Senkrechten; die Mittelpunkte sämmtlicher Kugeln, welche durch die drei Punkte $m'm''m'''$ gehen, oder den Krümmungskreis $m'm''m'''$ zum gemeinsamen Durchschnitt haben, liegen auf der Axe der zweiten Oskulationsebene, d. h. auf der in o' auf der Ebene $m'm''m'''$ errichteten Senkrechten. Diese beiden Axen schneiden sich im Punkte M, welcher der Mittelpunkt der durch die vier Punkte $mm'm''m'''$ bestimmten Kugel ist; diese Kugel heißt die Krümmungskugel der gegebenen Kurve. Da nun oM oder $o'M'$ Tangenten der Kurve sind, auf welcher die Punkte MM' ... liegen, oder der Kurve der Krümmungskugelmittelpunkte und da die Elemente oo' und MM' in der durch n gelegten Normalebene der gegebenen Kurve liegen, so folgen hieraus nachstehende Sätze:

2. Je drei entsprechende Punkte einer gewundenen Kurve, der Linie ihrer Krümmungskreismittelpunkte und der Linie ihrer Krümmungskugelmittelpunkte liegen in der Normalebene der gegebenen Kurve; die Tangente der letzteren steht senkrecht auf den beiden Tangenten der andern Kurven.

Der Kreis noM, welcher in der Normalebene der gegebenen Kurve liegt, hat zum Durchmesser die Linie nM. Da aber $no'M$ gleichfalls ein rechter Winkel ist, so liegt der Punkt o' auch auf diesem Kreise; die Linie oo' ist sowohl ein Element des Kreises als auch der Kurve der Krümmungsmittelpunkte, mithin ist die Verlängerung dieses Elements eine gemeinschaftliche Tangente beider; verbindet man o oder o' mit der Mitte der Geraden nM, so ist die Verbindungslinie senkrecht auf oo'; verlängert man oo' bis zum Durchschnitte mit der Verlängerung von nM in q, so ist $qo^2 = qM \cdot qn$; zieht man endlich durch o eine Linie, welche nM senkrecht in s schneidet, so sind q, M, s, n vier harmonische Punkte; wir haben also folgende Sätze:

3. Wenn man an die Linie der Krümmungskreismittelpunkte eine Tangente zieht, so trifft sie die Verbindungslinie der entsprechenden Punkte der gegebenen Kurve und der Linie der Krümmungskugelmittelpunkte so, daß das Quadrat der Tangente gleich dem Produkt der beiden Abschnitte auf der Verbindungslinie ist.

4. Die drei auf dieser Linie erhaltenen Punkte und der Fußpunkt des auf dieselbe vom entsprechenden Punkt der Linie der Krümmungskreismittelpunkte gefällten Perpendikels sind in harmonischer Proportion.

5. Zieht man von einem Punkt einer gewundenen Kurve nach dem entsprechenden Punkt der Linie der Krümmungskugelmittelpunkte eine Gerade, so ist die Verbindungslinie ihres

Halbirungspunkts mit dem entsprechenden Punkt der Linie der Krümmungskreismittelpunkte eine Normale der letzteren.

In dem Kreisviereck noo'M sind die Winkel bei n und M, ono' und oMo', einander gleich; der erste dieser Winkel ist der Oskulationswinkel der gegebenen Kurve und der zweite ist der Contingenzwinkel der Linie der Krümmungskugelmittelpunkte, hieraus folgt also

6. der Oskulationswinkel einer gewundenen Kurve ist gleich dem Contingenzwinkel in dem entsprechenden Punkt der Linie ihrer Krümmungskugelmittelpunkte.

Wir bezeichnen wieder wie früher die Cosinus der Winkel, welche in einem Punkt einer gewundenen Kurve die Tangente, die Hauptnormale und die Axe der Oskulationsebene mit den Axen bilden, durch a, b, c; α, β, γ; a, b, c; durch ω und Ω Contingenz- und Oskulationswinkel, durch ϱ und r Krümmungs- und Torsionshalbmesser und endlich durch R den Halbmesser der Krümmungskugel. Dieselben Buchstaben mit einem Strich beziehen sich auf die Linie der Krümmungskugelmittelpunkte und mit zwei Strichen auf die Linie der Krümmungskreismittelpunkte.

Aus dem zweiten Theorem folgen die Gleichungen

7. $aa' + bb' + cc' = o$; $aa'' + bb'' + cc'' = o$

Aus 6. folgt

8. $\Omega = \omega'$

Ferner kann man sich sehr leicht überzeugen, daß die Halbirungslinie des Winkels oMM' parallel der Halbirungslinie von ono' ist; hierauf beruht der Satz:

9. Die Hauptnormalen in einem Punkt einer gewundenen Kurve und in dem entsprechenden Punkt der Linie ihrer Krümmungskugelmittelpunkte sind gegenseitig parallel, daher die Gleichungen

10. $\alpha = \alpha'$; $\beta = \beta'$; $\gamma = \gamma'$

Wir bezeichnen die Coordinaten von n mit xyz, und diejenigen von M also mit x'y'z', dann sind die Projektionen der Linie nM auf den Axen beziehungsweise gleich

$$x - x'; \quad y - y'; \quad z - z'$$

$x - x'$ ist aber gleich der Summe der Projektionen von no' und o'M auf der x Axe; oder da $no' = \varrho$ und $o'M = \frac{o'p}{\omega'}$ (p ist der Durchschnitt von no' und Mo) $= \frac{o'p}{\Omega} = \frac{d\varrho}{\Omega} = d\varrho \frac{r}{ds}$, und $y - y'$, $z - z'$ gleich der Summe der Projektionen von no' und o'M auf den y und z Axen sind, so entstehen die Gleichungen:

$$11. \quad x - x' = \alpha\varrho + a\,r\frac{d\varrho}{ds}$$

$$y - y' = \beta\varrho + b\,r\frac{d\varrho}{ds}$$

$$z - z' = \gamma\varrho + c\,r\frac{d\varrho}{ds}$$

Da $nM^2 = no'^2 + o'M^2$ ist, so haben wir für den Halbmesser der Krümmungskugel:

12. $R^2 = \varrho^2 + r^2 \frac{d\varrho^2}{ds^2}$

Zu demselben Resultat wäre man auch durch Quadriren der Gleichungen 11 gelangt, da $\alpha a + \beta b + \gamma c = o$ ist.

Durch die Formeln 11 ist der Mittelpunkt, durch 12 der Halbmesser der Krümmungskugel bestimmt.

Bei einer sphärischen Kurve ist R und also auch $\varrho^2 + r^2 \frac{d\varrho^2}{ds^2} = \text{const.}$

13. $(x - x')\, a + (y - y')\, b + (z - z')\, c = o$

14. $(x - x')\, \alpha + (y - y')\, \beta + (z - z')\, \gamma = -\varrho$

15. $(x - x')\, a + (y - y')\, b + (z - z')\, c = r \frac{d\varrho}{ds}$

Zum Behuf der geometrischen Begründung von diesen weiteren Gleichungen ist zu bemerken, daß $\frac{x - x'}{R}$, $\frac{y - y'}{R}$, $\frac{z - z'}{R}$ die Cosinus der drei Winkel sind, welche der Halbmesser der Krümmungskugel $nM = R$ mit den Axen bildet; die Gleichung 13 bedeutet also, daß nM senkrecht auf der Tangente der gegebenen Kurve in n steht; sie behält übrigens ihre Geltung, wo man auch den Punkt $x'y'z'$ in der durch n gehenden Normalebene der gegebenen Kurve annehmen möge, also ist sie die Gleichung dieser Normalebene.

Die linke Seite von 14. mit R dividirt, gibt den Cosinus des Winkels onM an, welcher gleich $\frac{on}{Mn} = \frac{\varrho}{R}$ ist. Diese Gleichung läßt sich auch durch Differenziation aus 13. ableiten, wenn man $x'y'z'$ als konstant ansieht, und berücksichtigt, daß $dx \,.\, a + dy \,.\, b + dz \,.\, c = ds$; $\frac{ds}{\omega} = \varrho$ und $da = \omega \,.\, \alpha$; $db = \omega \,.\, \beta$; $dc = \omega \,.\, \gamma$ (§. 13, 6) ist. Die Gleichungen 13 und 14 beziehen sich also auf zwei unendlich nahe Normalebenen der gegebenen Kurve, mithin auf den Durchschnitt oM derselben, oder auf die Oskulationsaxe.

Wenn man die linke Seite von 15. durch R dividirt, so erhält man den Werth des Cosinus vom Winkel o'Mn, und da dieser Cosinus gleich $\frac{o'M}{Mn}$, ferner nach dem Obigen $o'M = r \frac{d\varrho}{ds}$, $Mn = R$ ist, so wäre hiemit auch diese Relation geometrisch nachgewiesen. Man kann die Gleichung 15 durch Differenziation aus 14. ableiten, indem man wieder $x'y'z'$ als konstant betrachtet, und berücksichtigt, daß $dx \,.\, \alpha + dy \,.\, \beta + dz \,.\, \gamma = o$, $\frac{ds}{\Omega} = r$ und nach §. 13, 8, $d\alpha = \quad a\omega - a\Omega$, $d\beta = - b\omega \quad b\Omega$, $d\gamma = - c\omega - c\Omega$ ist. Die Gleichungen 14 und 15 beziehen sich auf zwei unendlich nahe Oskulationsaxen; da man bei der Differenziation von 14. $x'y'z'$ als konstant angesehen hat, so stellen die Formeln 13, 14, 15 die Coordinaten $x'y'z'$ von M, oder des Durchschnitts von drei auf einander folgenden Normalebenen, oder auch von zwei auf einander folgenden Oskulationsaxen der gegebenen Kurve dar. Weil die Formeln 11 gleichfalls die Coordinaten des Mittelpunkts M der Krümmungskugel angeben, so müssen sie identisch sein mit den genannten Gleichungen, und in der That lassen sie sich aus 13., 14., 15. ableiten durch

Multiplikation dieser Ausdrücke zuerst mit a, α, a; dann mit b, β, b und endlich mit c, γ, c. Da die Axe der Oskulationsebene der gegebenen Kurve zugleich die Tangente der Linie ihrer Krümmungskugelmittelpunkte ist, so haben wir die Formeln:

16. $a = a'$; $b = b'$; $c = c'$

Durch die Tangente MM' der letzteren Linie gehen zwei Normalebenen der gegebenen Kurve, nämlich M'Mo'n und M'Mo'n', wo n' die Mitte des dritten Elements m''m''' ist; nun ist der Winkel zwischen diesen beiden Ebenen einerseits der Oskulationswinkel der Linie MM' und andererseits ist dieser Winkel gleich no'n' oder gleich dem Contingenzwinkel bei n, hieraus folgt

17. $\Omega' = \omega$

Der Contingenzwinkel einer gewundenen Kurve ist gleich dem Oskulationswinkel in dem entsprechenden Punkt der Linie ihrer Krümmungskugelmittelpunkte.

Dieser Satz läßt sich auch noch auf anderem Wege beweisen; zufolge der Gleichung 9 des §. 13 ist das Quadrat des Winkels zwischen zwei auf einander folgenden Krümmungshalbmessern einer Kurve gleich der Summe der Quadrate des Contingenz- und des Torsionswinkels; da nun die Krümmungshalbmesser in zwei entsprechenden Punkten einer Kurve und der Linie ihrer Krümmungskugelmittelpunkte parallel sind, so sind auch die Winkel zwischen je zwei solchen Krümmungshalbmessern gleich, oder $\omega^2 + \Omega^2 = \omega'^2 + \Omega'^2$.

Nach der Gleichung 8 dieses §. ist aber $\Omega = \omega'$ also auch $\Omega' = \omega$. Es seien $M^0MM'M''$ auf einander folgende Punkte einer gewundenen Kurve; in der Oskulationsebene M^0MM' nehmen wir einen beliebigen Punkt n an und in der zweiten Oskulationsebene MM'M'' den Punkt n' so, daß das Element nn' diese beiden Ebenen senkrecht schneidet; man kann ebenso in der dritten Oskulationsebene den Punkt n'' annehmen, so daß n'n'' die zweite und dritte dieser Ebenen rechtwinklig trifft u. s. f. Dadurch erhält man eine Linie nn'n''.., welche sämmtliche Oskulationsebenen der gegebenen Kurve senkrecht schneidet, und deren Krümmungskugeln ihre Mittelpunkte in M,M',M''.. haben; diese Linie ist vollkommen bestimmt, so bald die Lage eines ihrer Punkte, z. B. von n angegeben ist; da aber dieser Punkt beliebig auf der Oskulationsebene M^0MM' gewählt werden kann, so gibt es unendlich viele Linien, welche die gleiche Eigenschaft haben, wie nn'n''.., nämlich daß M, M', M'' .... die Mittelpunkte ihrer Krümmungskugeln sind; alle diese Linien schneiden die Oskulationsebenen der Kurve $M^0MM'M''$.. senkrecht, mithin sind ihre Tangenten in denjenigen Punkten, wo sie eine dieser Oskulationsebenen treffen, unter einander parallel. Vorstehende Betrachtungen führen zu folgenden Sätzen:

18. Sämmtliche Kurven, welche eine gemeinsame Linie M für die Mittelpunkte ihrer Krümmungskugeln haben, bilden ein System von Linien, deren Tangenten in entsprechenden Punkten unter einander parallel sind. Diese entsprechenden Punkte liegen auf der Oskulationsebene von M. Unter den Linien dieses Systems hat keine mit der andern einen Punkt gemeinschaftlich; denn wenn zwei solche Linien einen Punkt gemein hätten, so würden sie ganz zusammenfallen.

Die beiden Ebenen M^0MM' und MM'M'' haben die Linie MM' gemeinschaftlich; fällt man auf dieselbe die Perpendikel no' und n'o', so ist o' der Mittelpunkt eines Krümmungskreises der Linie nn'n''...; die Mittelpunkte

aller Krümmungskreise dieser Linie liegen demnach auf den Tangenten der Kurve $M^0MM'M''$...., woraus sich der Satz ergibt:

19. *Die Linien des in 18. genannten Systems haben die Eigenschaft, daß die Linien ihrer Krümmungskreis-Mittelpunkte auf einer entwickelbaren Fläche liegen, deren Erzeugende die Tangenten der Linie ihrer gemeinsamen Krümmungskugel-Mittelpunkte sind.*

Wir betrachten wieder das Kreisviereck $noo'M$, welches in der durch die Mitte n des Elements $m'm''$ der gegebenen Kurve gelegten Normalebene enthalten ist. M ist der Mittelpunkt der Krümmungskugel, o und o' sind die Mittelpunkte von zwei aufeinander folgenden Krümmungskreisen. p ist der Durchschnitt der Diagonalen no' und oM. Auf der Verlängerung von $o'M$ liegt M'; $MM' = ds'$ ist ein Element der Linie der Krümmungskugelmittelpunkte.

Fig. 4 b.

$$o'p = d\varrho\,;\quad op = \frac{\varrho}{r}\,ds = \varrho\Omega\,;\quad oM = r\,\frac{d\varrho}{ds} = \frac{d\varrho}{\Omega} = \varrho'\,\frac{d\varrho}{ds'}$$

$$d\,(oM) = MM' - op = ds' - \frac{\varrho}{r}\,ds \quad \text{mithin}$$

20. $$ds' = \frac{\varrho}{r}\,ds + d\left(r\,\frac{d\varrho}{ds}\right)$$

Die Projektionen von ds' auf den Axen sind dx', dy', dz', also

21. $$dx' = a\left(\frac{\varrho}{r}\,ds + d\left(r\,\frac{d\varrho}{ds}\right)\right);\quad dy' = b\left(\frac{\varrho}{r}\,ds + d\left(r\,\frac{d\varrho}{ds}\right)\right)$$
$$dz' = c\left(\frac{\varrho}{r}\,ds + d\left(r\,\frac{d\varrho}{ds}\right)\right)$$

Die Gleichung 20 kann in folgender Form geschrieben werden:

22. $$\frac{d\left(\varrho'\,\frac{d\varrho}{ds'}\right)}{ds'} + \frac{\varrho}{\varrho'} - 1 = 0$$

Die Gleichungen 11 können wir auch so darstellen:

23. $$x = x' + \alpha'\varrho + a'\varrho'\,\frac{d\varrho}{ds'}$$
$$y = y' + \beta'\varrho + b'\varrho'\,\frac{d\varrho}{ds'}$$

$$z = z' + \gamma'\varrho + c'\varrho' \frac{d\varrho}{ds'}$$

Wir wollen nun annehmen, die Linie MM'M''... sei gegeben, und zwar dadurch, daß ihr Krümmungshalbmesser ϱ' als eine Funktion des Bogens s' derselben ausgedrückt ist (siehe die Gleichung 8 des §. 12). Durch Substitution dieses Werths von ϱ' in 22. erhält man eine Differenzialgleichung mit zwei Variabeln, nämlich s', ϱ und den Ableitungen von ϱ nach s'. Durch Integration dieser Gleichung ergibt sich ϱ als Funktion von s' und von zwei willkürlichen Konstanten. Die Gleichungen 23 lehren hierauf x, y, z kennen, und somit ist die Aufgabe auch analytisch gelöst, die wir oben auf geometrischem Wege behandelten:

24. Eine gewundene Kurve ist gegeben; es sollen diejenigen Kurven bestimmt werden, welche dieselbe zur Linie ihrer Krümmungskugel-Mittelpunkte haben.

Indem wir auf die Linie der Krümmungskreis-Mittelpunkte übergehen, möge daran erinnert werden, daß die gleichen Buchstaben gebraucht werden, wie bei der gegebenen Kurve, doch daß diese Buchstaben zur Unterscheidung mit zwei Strichen versehen werden sollen; a'', b'', c''; α'', β'', γ''; $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$ bedeuten also der Reihe nach die Cosinus der Winkel, welche die Tangente, die Hauptnormale, die Oskulationsaxe mit den Axen machen; ω'' und Ω'' sind die Contingenz- und Oskulationswinkel, ϱ'' und r'' die Krümmungs- und Torsionshalbmesser. In dem Dreieck $oo'p$ ist $oo' = ds''$ das Element der Kurve der Krümmungsmittelpunkte, also, weil $oo'^2 = o'p^2 + op^2$, so ist nach den oben angegebenen Werthen

$$25. \quad ds''^2 = d\varrho^2 + \frac{\varrho^2 ds^2}{r^2} \quad \text{oder} \quad \frac{ds}{r} = \frac{ds''}{\varrho}\sqrt{1 - \frac{d\varrho}{ds''^2}}$$

$$26. \quad aa'' + bb'' + cc'' = o; \quad \alpha a'' + \beta b'' + \gamma c'' = \frac{d\varrho}{ds''};$$

$$\mathfrak{a}a'' + \mathfrak{b}b'' + \mathfrak{c}c'' = -\sqrt{1 - \left(\frac{d\varrho}{ds''}\right)^2}$$

Die erste der Gleichungen 26 beruht darauf, daß die Elemente $m'm''$ der gegebenen Kurve und oo' der Kurve der Krümmungsmittelpunkte auf einander senkrecht stehen; die linke Seite der zweiten Gleichung gibt den Cosinus des Winkels zwischen der Hauptnormale der ersten Kurve und der Tangente der zweiten an, welcher offenbar $= \frac{o'p}{oo'} = \frac{d\varrho}{ds''}$ ist; die linke Seite der dritten Gleichung gibt den Cosinus des Winkels zwischen der Oskulationsaxe der ersten Kurve und der Tangente der zweiten an, welcher gleich dem Cosinus des Winkels $poo' = \sqrt{1 - \left(\frac{d\varrho}{ds''}\right)^2}$ ist.

$$27. \quad a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' = -\frac{\varrho''}{\varrho}\frac{ds}{ds''}\frac{d\varrho}{ds''}$$

$$\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = \sqrt{1 - \left(\frac{d\varrho}{ds''}\right)^2}\sqrt{1 - \left(\frac{\varrho''}{\varrho}\frac{ds}{ds''}\frac{d\varrho}{ds''}\right)^2}$$

$$\mathfrak{a}\alpha'' + \mathfrak{b}\beta'' + \mathfrak{c}\gamma'' = \frac{d\varrho}{ds''}\sqrt{1 - \left(\frac{\varrho''}{\varrho}\frac{ds}{ds''}\frac{d\varrho}{ds''}\right)^2}$$

28. $\mathfrak{a}a'' + \mathfrak{b}b'' + \mathfrak{c}c'' = \sqrt{1 - \left(\frac{\varrho''}{\varrho} \frac{ds}{ds''} \frac{d\varrho}{ds''}\right)^2}$

$$\alpha a'' + \beta b'' + \gamma c'' = \sqrt{1 \quad \left(\frac{d\varrho}{ds''}\right)^2} \frac{\varrho''}{\varrho} \frac{ds}{ds''} \frac{d\varrho}{ds''}$$

$$aa'' + bb'' + cc'' = \frac{d\varrho}{ds''} \left(\frac{\varrho''}{\varrho} \frac{ds}{ds''} \frac{d\varrho}{ds''}\right)$$

Um die geometrische Auslegung dieser Formeln zu erhalten, legen wir durch den Punkt o drei Linien, op, $o\pi$, op parallel der Tangente, Hauptnormale, und Oskulationsaxe der gegebenen Kurve; diese drei Linien stehen auf einander senkrecht, wie auch drei weitere, oo', $o\pi'$, op', welche die Tangente, Hauptnormale und Oskulationsaxe der Kurve der Krümmungsmittelpunkte angeben. Die Linie oo' liegt in der Ebene $po\pi$, und nach dem Obigen ist $\frac{d\varrho}{ds''} = \sin poo'$; $\sqrt{1 - \left(\frac{d\varrho}{ds''}\right)^2} = \cos poo'$.

Die linken Seiten der Gleichungen 27 und 28 stellen nun der Reihe nach die Cosinus der Winkel $\pi'op$, $\pi'o\pi$, $\pi'op$; $p'op$, $p'o\pi$, $p'op$ vor; es handelt sich zunächst darum, die Bedeutung des Ausdrucks $\frac{\varrho''}{\varrho} \frac{ds}{ds''} \frac{d\varrho}{ds''}$ zu finden; da $\frac{ds}{\varrho} = \omega$ und $\frac{ds''}{\varrho''} = \omega''$ ist, so kann man statt desselben auch setzen $\frac{\omega}{\omega''} \sin poo'$. Betrachtet man aber o' als den Mittelpunkt einer Kugel, welche die drei Linien o'o, o'o'', o'M in dem sphärischen Dreieck $oo''\mu$ schneidet, so ist hier Seite $oo'' = \omega''$ Winkel $\mu = \omega$; $\mu o'o''$ oder Seite $\mu o''$ = Winkel poo'; da nun in einem sphärischen Dreieck die Sinus der Seiten sich verhalten, wie die Sinus der Gegenwinkel, so ist $\sin o : \sin \mu = \sin \mu o''$: $\sin oo''$ oder $\sin o = \frac{\sin \mu \, . \, \sin \mu o''}{\sin oo''} = \frac{\omega \, . \, \sin poo'}{\omega''}$. Aber o ist der Winkel zwischen den Ebenen oo'o'' und $oo'\mu$, und da op senkrecht auf der Ebene $oo'\mu$ steht, und $o\pi'$ senkrecht auf oo' und in der Ebene oo'o'' liegt, so ist $\sin o = - \cos \pi'op$ oder

$$\cos \pi'op = - \frac{\varrho''}{\varrho} \frac{ds}{ds''} \frac{d\varrho}{ds''}$$

somit wäre die erste der Gleichungen 27 bewiesen.

op steht senkrecht auf der Ebene $oo'\mu$ und op' senkrecht auf der Ebene oo'o'', also ist

$$\cos p'op = \cos o = \sqrt{1 - \left(\frac{\varrho''}{\varrho} \frac{ds}{ds''} \frac{d\varrho}{ds''}\right)^2}$$

wodurch die erste der Gleichungen 28 bewiesen ist.

Ferner haben wir zufolge bekannter Formeln für zwei in einem Punkte sich schneidende rechtwinklige Axensysteme $\cos \pi'o\pi = \cos poo' \, . \, \cos p'op$ $= \sqrt{1 - \left(\frac{d\varrho}{ds''}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{\varrho''}{\varrho} \frac{ds}{ds''} \frac{d\varrho}{ds''}\right)^2}$

$$\cos \pi'op = \sin poo' \, . \, \cos p'op = \frac{d\varrho}{ds''} \sqrt{1 - \left(\frac{\varrho''}{\varrho} \frac{ds}{ds''} \frac{d\varrho}{ds''}\right)^2}$$

$$\cos p'o\pi = \cos poo' . \sin p'op = \sqrt{1-\left(\frac{d\varrho}{ds''}\right)^2}\left(\frac{\varrho''}{\varrho}\frac{ds}{ds''}\frac{d\varrho}{ds''}\right)$$

$$\cos p'op = \sin poo' . \sin p'op = \frac{d\varrho}{ds''}\left(\frac{\varrho''}{\varrho}\frac{ds}{ds''}\frac{d\varrho}{ds''}\right)$$

Hiemit sind die vier übrigen von den Gleichungen 27 und 28 ebenfalls bewiesen.

Der Zusammenhang zwischen den Gleichungen 26, 27, 28 läßt sich auch auf analytischem Wege zeigen. Durch Differenziation der Formel $aa'' + bb'' + cc'' = o$ erhält man $ada'' + bdb'' + cdc'' + da.a'' + db.b'' + dc.c'' = o$; nun ist

$$da'' = \alpha'' . \frac{ds''}{\varrho''}; \; db'' = \beta''\frac{ds''}{\varrho''}; \; dc'' = \gamma''\frac{ds''}{\varrho''};$$

$$da = \alpha\frac{ds}{\varrho}; \; db = \beta\frac{ds}{\varrho}; \; dc = \gamma\frac{ds}{\varrho}$$

also mit Berücksichtigung der zweiten unter den Gleichungen 26

$$29. \quad a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' = -\frac{\varrho''}{\varrho}\frac{ds}{ds''}\frac{d\varrho}{ds''}$$

Die Differenziation der zweiten Gleichung $\alpha a'' + \beta b'' + \gamma c'' = \frac{d\varrho}{ds''}$ ergibt $\alpha da'' + \beta db'' + \gamma dc'' + d\alpha . a'' + d\beta . b'' + d\gamma . c'' = \frac{d^2\varrho}{ds''}$; nach §. 13, 8 ist

$$d\alpha = -a\frac{ds}{\varrho} - a\sqrt{ds''^2 - d\varrho^2}\frac{1}{\varrho}; \; d\beta = -b\frac{ds}{\varrho} - b\sqrt{ds''^2 - d\varrho^2}.\frac{1}{\varrho}$$

$$d\gamma = -c\frac{ds}{\varrho} - c\sqrt{ds''^2 - d\varrho^2}.\frac{1}{\varrho} \text{ mithin}$$

$$30. \quad \alpha a'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = \varrho''\left(\frac{d^2\varrho}{ds''^2} - \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho^2}{ds''^2}\right)$$

Die dritte Gleichung $aa'' + bb'' + cc'' = -\sqrt{1-\left(\frac{d\varrho}{ds''}\right)^2}$ gibt endlich beim Differenziiren

$$ada'' + bdb'' + cdc'' + da.a'' + db.b'' + dc.c'' = \frac{\frac{d\varrho}{ds''}\frac{d^2\varrho}{ds''^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{d\varrho}{ds''}\right)^2}}$$

Mit Berücksichtigung der Formeln 7 des §. 22

$$da = \alpha\frac{\sqrt{ds''^2 - d\varrho^2}}{\varrho}; \quad db = \beta\frac{\sqrt{ds''^2 - d\varrho^2}}{\varrho}; \; dc = \gamma\frac{\sqrt{ds''^2 - d\varrho^2}}{\varrho},$$

der oben angegebenen Werthe von da'', db'', dc'' und der Gleichung $\alpha a'' + \beta b'' + \gamma c'' = \frac{d\varrho}{ds''}$ erhalten wir

$$31. \quad a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' = \varrho''\frac{\frac{d\varrho}{ds''}}{\sqrt{1-\left(\frac{d\varrho}{ds''}\right)^2}}\left(\frac{d^2\varrho}{ds''^2} - \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho^2}{ds''^2}\right)$$

Wenn man 29, 30 und 31 quadrirt und hierauf die Resultate addirt, so findet man

$$32. \quad \frac{\varrho''}{\sqrt{1-\left(\frac{d\varrho}{ds''^2}\right)^2}}\left(\frac{d^2\varrho}{ds''^2}-\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho^2}{ds''^2}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{\varrho''}{\varrho}\frac{ds}{ds''}\frac{d\varrho}{ds''}\right)^2}$$

Durch diese Gleichung werden die Formeln 29, 30 und 31 identisch mit 27.

Die Quadrate von $a''a + b''b + c''c$; $a''a + b''b + c''c$; $a''\alpha + b''\beta + c''\gamma$ zu den Quadraten der ersten, zweiten, dritten unter den Gleichungen 26 und 27 addirt, geben Werthe, welche gleich der Einheit sind, woraus sofort die Gleichungen 28 hervorgehen.

Wir setzen der Kürze wegen $\frac{d^2\varrho}{ds''^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho^2}{ds''^2} - \frac{1}{\varrho} = V$, so erhalten wir durch Multiplikation der letzten Gleichungen in 26, 27 und 28 mit a'', α'', a''; b'', β'', b''; c'', γ'', c''

$$33. \quad \alpha = \frac{x''-x}{\varrho} = \frac{d\varrho}{ds''}a'' + \varrho''V\alpha'' + \sqrt{1-\frac{d\varrho^2}{ds''^2}-\varrho''^2V^2}\,.\,a''$$

$$\beta = \frac{y''-y}{\varrho} = \frac{d\varrho}{ds''}b'' + \varrho''V\beta'' + \sqrt{1-\frac{d\varrho^2}{ds''^2}-\varrho''^2V^2}\,.\,b''$$

$$\gamma = \frac{z''-z}{\varrho} = \frac{d\varrho}{ds''}c'' + \varrho''V\gamma'' + \sqrt{1-\frac{d\varrho^2}{ds''^2}-\varrho''^2V^2}\,.\,c''$$

Durch Differenziation von 27. erhält man ferner

$$31. \quad aa'' + bb'' + cc'' + \frac{r''\varrho''^2V}{\sqrt{1-\frac{d\varrho^2}{ds''^2}}\sqrt{1-\frac{d\varrho^2}{ds''^2}-\varrho''^2V^2}} = U$$

$$\alpha a'' + \beta b'' + \gamma c'' = -\frac{r''\varrho''\frac{d\varrho}{ds''}}{\sqrt{1-\frac{d\varrho^2}{ds''^2}}}U$$

$$aa'' + bb'' + cc'' = -r''\varrho''U$$

Zur Abkürzung wurde gesetzt

$$U = \frac{dV}{ds''} + \frac{V^2}{\frac{d\varrho}{ds''}\left(1-\frac{d\varrho^2}{ds''^2}\right)} + \left(\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{ds''}+\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho''}{ds''}\right)V - \frac{1}{\varrho''^2}\frac{1-\frac{d\varrho^2}{ds''^2}}{\frac{d\varrho}{ds''}}$$

Durch Vergleichung von 34. und 28 ergibt sich

$$34. \quad U + \frac{1}{r''\varrho''}\sqrt{1-\frac{d\varrho^2}{ds''^2}-\varrho^2V^2} = o$$

(Journal v. Liouville, XVIII., S. 193.) Serret: Sur les courbes à double courbure.

Die Gleichung 35 enthält die analytische Auflösung der Aufgabe:

Eine gewundene Kurve ist gegeben; es soll diejenige Kurve bestimmt werden, von welcher sie die Linie der Krümmungskreismittelpunkte ist. Bei der gegebenen Kurve müssen die Hauptkrümmungshalbmesser ϱ'' und Torsionshalbmesser r'' als Funktion des Bogens s'' gegeben sein. Setzt man diese Werthe in 34 ein, so erhält man eine Gleichung,

welche die Variabelen ϱ, s'' und die erste und zweite Ableitung von ϱ nach s'' enthält. Durch Integration dieser Differenzialgleichung ergibt sich sofort ϱ als Funktion von s''. Es mag hier noch erwähnt werden, wie man die Kurven erhält, bei welchen ϱ eine gegebene Funktion von s ist. Wir haben oben für ϱ den Werth $\frac{ds}{\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}}$ gefunden, und durch Einführung der Winkel $\frac{dx}{ds} = \cos\alpha$, $\frac{dy}{ds} = \sin\alpha . \sin i$, $\frac{dz}{ds} = \sin\alpha . \cos i$ erhielten wir die Gleichung $\omega = \frac{ds}{\varrho} = \sqrt{d\alpha^2 + \sin^2\alpha\, di^2}$ oder $\frac{ds^2}{\varrho^2} = d\alpha^2 + \sin^2\alpha\, di^2$; wenn nun $\varphi(s)$ eine vorläufig unbestimmte Funktion des Bogens s ist, so kann man setzen $d\alpha = \sin\varphi(s)\frac{ds}{\varrho}$, $\sin\alpha\, di = \cos\varphi(s)\frac{ds}{\varrho}$; durch Spezialisirung der Funktion $\varphi(s)$ erhält man alle diejenigen Kurven, welche der Bedingung genügen $s = f(\varrho)$. Durch Integration erhält man die Winkel α und i und sofort auch die Werthe von $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ in s ausgedrückt; eine weitere Integration führt auf die Werthe von x, y, z, ebenfalls durch s gegeben. Die Elimination von s aus diesen drei Gleichungen führt sofort auf zwei Gleichungen, welche diejenigen der Kurve sind. Ein ganz ähnliches Verfahren läßt sich bei den Kurven in Anwendung bringen, wo der Torsionshalbmesser r eine gegebene Funktion des Bogens sein soll. (Monge, application de l'analyse à la géométrie, 5me éd. IIme note de M. Liouville, page 549.)

§. 15. Die Linien auf den Flächen.

Auf einer Fläche ist eine Linie gegeben, von welcher mm'm'' drei aufeinander folgende Punkte sind. Die Formeln 11 des §. 12 geben uns nachstehende Werthe für die Cosinus der Winkel, welche die Tangente (mm'), die Hauptnormale (Halbirungslinie des Winkels mm'm'') und die Axe der Oskulationsebene (Senkrechte der Ebene mm'm'') mit den Coordinatenaxen bilden:

$$1.\quad a = \frac{dx}{ds};\quad b = \frac{dy}{ds};\quad c = \frac{dz}{ds}$$

$$2.\quad \alpha = \frac{d\frac{dx}{ds}}{\omega};\quad \beta = \frac{d\frac{dy}{ds}}{\omega};\quad \gamma = \frac{d\frac{dz}{ds}}{\omega}$$

$$3.\quad a = \frac{dy\, d^2z - d^2y\, dz}{\omega . ds^2};\quad b = \frac{dz\, d^2x - d^2z\, dx}{\omega . ds^2};\quad c = \frac{dx\, d^2y - d^2x\, dy}{\omega . ds^2}$$

ω ist der Sinus des Contingenzwinkels mm'm'' und gegeben durch die Gleichungen 5 und 6 des §. 12. Wenn wir die Differenziation von 2. ausführen, so erhalten wir

$$4.\quad \alpha = \frac{ds\, d^2x - dx\, d^2s}{\omega . ds^2},\quad \beta = \frac{ds\, d^2y - dy\, d^2s}{\omega . ds^2},\quad \gamma = \frac{ds\, d^2z - dz\, d^2s}{\omega . ds^2}$$

Die Cosinus der Winkel, welche das Element $m'm''$ oder die nächstfolgende Tangente mit den Axen bildet, sind

$$a + da = \frac{dx}{ds} + d\,\frac{dx}{ds}\,;\quad b + db = \frac{dy}{ds} + d\,\frac{dy}{ds}\,;\quad c + dc = \frac{dz}{ds} + d\,\frac{dz}{ds}$$

oder

$$5.\quad a + da = \left(1 - \frac{d^2s}{ds}\right)\frac{dx}{ds} + \frac{d^2x}{ds};\quad b + db = \left(1 - \frac{d^2s}{ds}\right)\frac{dy}{ds} + \frac{d^2y}{ds}$$

$$c + dc = \left(1 - \frac{d^2s}{ds}\right)\frac{dx}{ds} + \frac{d^2x}{ds}$$

Aus der Gleichung der Fläche $f(x, y, z) = o$ erhält man durch Differenziation

$$6.\quad Xdx + Ydy + Zdz = o$$

Die Cosinus der Winkel, welche die Flächennormale im Punkt m' mit den Axen macht, sind:

$$7.\quad \frac{X}{K},\ \frac{Y}{K},\ \frac{Z}{K}$$

wo der Kürze halber $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = K$ gesetzt wird.

Die Gleichung 6 bedeutet, daß der Cosinus des Winkels zwischen der Flächennormale und dem Element mm' gleich Null, oder daß dieser Winkel ein Rechter ist. Sie ist mithin die Gleichung der Tangentialebene der Fläche. Durch Differenziation von 7. erhält man für die Cosinus der Winkel, welche die nächstfolgende Flächennormale im Punkt m'' mit den Axen macht:

$$8.\quad \frac{K^2 - XdX - YdY - ZdZ}{K^3}X + \frac{dX}{K};\quad \frac{K^2 - XdX - YdY - ZdZ}{K^3}Y + \frac{dY}{K}$$

$$\frac{K^2 - XdX - YdY - ZdZ}{K^3}Z + \frac{dZ}{K}$$

Durch bloße Anwendung der Cosinusformel finden wir nun sogleich die Differenzialgleichungen von verschiedenen Linien auf den Flächen.

Wir bezeichnen den Winkel zwischen der Tangentialebene der Fläche und der Oskulationsebene der Kurve $mm'm''$ mit φ, so folgt aus 3. und 7.

$$9.\ \cos\varphi = \frac{1}{\omega . ds^2 . K}\left\{(dy\,d^2z - d^2y\,dz)X + (dz\,d^2x - d^2z\,dx)Y + (dx\,d^2y - d^2x\,dy)Z\right\}$$

Setzt man hier $\varphi = \text{const.}$, so erhält man die Gleichung derjenigen Linien auf den Flächen, bei welchen der Winkel zwischen der Oskulationsebene und der Tangentialebene der Fläche konstant ist; in dem speziellen Fall, wo dieser Winkel ein Rechter ist, ergibt sich

$$10.\quad (dy\,d^2z - d^2y\,dz)\,X + (dz\,d^2x - d^2z\,dx)\,Y + (dx\,d^2y - d^2x\,dy)\,Z = o$$

oder

$$11.\quad (Yd^2z - Zd^2y)\,dx + (Zd^2x - Xd^2z)\,dy + (Xd^2y - Yd^2x)\,dz = o$$

oder auch

$$12.\quad (Ydz - Zdy)\,d^2x + (Zdx - Xdz)\,d^2y + (Xdy - Ydx)\,d^2z = o$$

Alle diese drei Gleichungen, welche identisch sind, beziehen sich auf die geodätischen Linien, deren Oskulationsebenen senkrecht auf der Fläche stehen. Um die geometrische Bedeutung von 11. und 12. zu finden, benützen wir die Formeln 31 des §. 1. Die Cosinus der Winkel, welche die Axe der durch die Flächennormale und Hauptnormale bestimmten Ebene mit den Coordinatenaxen macht, sind

$$\frac{Y\gamma - Z\beta}{K.\varphi'}, \quad \frac{Z\alpha - X\gamma}{K.\varphi'}, \quad \frac{X\beta - Y\alpha}{K.\varphi'}$$

φ' ist der Sinus des Winkels zwischen diesen beiden Normalen, und da $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ die Cosinus der Winkel sind, welche das Linienelement mm' mit den Axen bildet, so ist nach der Cosinusformel

$$\cos\psi = \frac{1}{K.\varphi' ds}\left\{(Y\gamma - Z\beta)\,dx + (Z\alpha - X\gamma)\,dy + (X\beta - Y\alpha)\,dz\right\}$$

indem wir ψ den Winkel zwischen der Axe jener durch die Flächennormale und Hauptnormale der Kurve bestimmten Ebene und zwischen mm' nennen. Da die Quadratsumme der drei Cosinus einer Geraden gleich Eins sein muß, so haben wir zur Bestimmung von φ'

$$\varphi' = \frac{1}{K}\sqrt{(Y\gamma - Z\beta)^2 + (Z\alpha - X\gamma)^2 + (X\beta - Y\alpha)^2}$$

Wenn man aber im Werthe von $\cos\psi$ mit Hülfe von 4. den Ausdruck in der Klammer entwickelt, so ergibt sich mit Rücksicht auf die identische Gleichung: $(Ydz - Zdy)\,dx + (Zdx - Xdz)\,dy + (Xdy - Ydx)\,dz = 0$

$$13.\ \cos\psi = \frac{1}{\omega.K.\varphi'.ds^2}\left\{(Yd^2z - Zd^2y)dx + (Zd^2x - Xd^2z)dy + (Xd^2y - Yd^2x)\,dz\right\}$$

Setzt man hier ψ = const., so hat man die Gleichung solcher Linien auf den Flächen, bei welchen der Winkel zwischen ihrer Tangente und der durch die Flächennormale und Hauptnormale der Kurve bestimmten Ebene konstant ist. In dem speziellen Fall, wo dieser Winkel gleich Null Grad, also $\cos\psi = 0$ ist, erhält man die Gleichung 11, deren geometrische Bedeutung somit darin besteht, daß die Tangente der geodätischen Linie in der Ebene der Flächennormale und Hauptnormale enthalten ist. Die Gleichung 13 vereinfacht sich, wenn man annimmt, daß die Kurve in gleiche Elemente eingetheilt ist, also ds = const., $d^2s = 0$, dann hat man für φ' den Werth

$$\varphi' = \frac{1}{K.\omega.ds}\sqrt{(Yd^2z - Zd^2y)^2 + (Zd^2x - Xd^2z)^2 + (Xd^2y - Yd^2x)^2}$$

$\omega = \frac{1}{ds}\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}$, somit

$$14.\ \cos\psi = \frac{(Yd^2z - Zd^2y)\,dx + (Zd^2x - Xd^2z)\,dy + (Xd^2y - Yd^2x)\,dz}{ds\sqrt{(Yd^2z - Zd^2y)^2 + (Zd^2x - Xd^2z)^2 + (Xd^2y - Yd^2x)^2}}$$

Die Cosinus der Winkel zwischen der Axe der durch die Flächennormale und das Element mm' der Linie gehenden Ebene und zwischen den Coordinatenaxen sind nach 31. §. 1

$$15.\ \frac{Ydz - Zdy}{K.ds}, \quad \frac{Zdx - Xdz}{K.ds}, \quad \frac{Xdy - Ydx}{K.ds}$$

Bezeichnen wir den Winkel zwischen dieser Axe und der Hauptnormale der Kurve mit ψ', so ist nach der Cosinusformel

$$\cos\psi' = \frac{1}{K.ds}\left\{(Ydz - Zdy)\,\alpha + (Zdx - Xdz)\,\beta + (Xdy - Ydx)\,\gamma\right\}$$

Ersetzen wir hier α, β, γ durch ihre Werthe in 4., so finden wir mit Berücksichtigung der Identität

$$(Ydz - Zdy)\,dx + (Zdx - Xdz)\,dy + (Xdy - Ydx)\,dz = 0$$

16. $\cos\psi' = \frac{1}{K.\omega.ds^2}\left\{(Ydz - Zdy)\,d^2x + (Zdx - Xdz)d^2y + (Xdy - Ydx)\,d^2z\right\}$

Setzt man hier $\psi' = \text{const.}$, so ergibt sich die Gleichung derjenigen Linien auf den Flächen, wo der Winkel zwischen der Hauptnormale der Kurve und der durch ihre Tangente und die Flächennormale gehenden Ebene konstant ist. Wenn die Konstante gleich 90^0 oder $\cos\psi' = o$ ist, so kommt man auf die Formel 12 zurück, welche beweist, daß bei den geodätischen Linien die Hauptnormale in der durch die Tangente gelegten Normalebene der Fläche liegt.

Für den Cosinus des Winkels zwischen der Axe der durch die Tangente und die Flächennormale gelegten Ebene und dem folgenden Element m′m″ der Kurve erhält man nach der Cosinusformel aus 5. und mit Berücksichtigung der so eben angeführten identischen Gleichung

$$\frac{1}{K.ds^2}\left\{(Ydz - Zdy)\,d^2x + (Zdx - Xdz)\,d^2y + (Xdy - Ydx)\,d^2z\right\}$$

Ist diese Größe gleich Null, so ergibt sich wieder die Formel 12, woraus hervorgeht, daß bei den geodätischen Linien zwei auf einander folgende Elemente und die Flächennormale in einer Ebene liegen.

Aus 8. und 15. erhalten wir nach der Cosinusformel und mit Rücksicht auf die Gleichung

$$(Ydz - Zdy)\,X + (Zdx - Xdz)\,Y + (Xdy - Ydx)\,Z = o$$

17. $\cos\omega' = \frac{1}{K^2.ds}\left\{(Ydz - Zdy)\,dX + (Zdx - Xdz)\,dY + (Xdy - Ydx)\,dZ\right\}$

Hier ist ω' der unendlich wenig von einem Rechten abweichende Winkel zwischen der Axe der Ebene, welche durch das Element mm′ und die Flächennormale in m′ geht, und zwischen der nächstfolgenden Flächennormale, deren Fußpunkt m″ ist. Auch hier könnte man die unendlich kleine Größe $\cos\omega'$ gleich const. setzen, und erhielte dadurch die Differenzialgleichung derjenigen Linien auf den Flächen, bei welchen der Winkel ω' konstant ist, wie z. B. beim Kreis der Contingenzwinkel, und bei der Schraubenlinie Contingenz- und Torsionswinkel, welche beide gleichfalls unendlich klein, konstant sind. Wenn $\cos\omega' =$ Null ist, so hat man statt 17.

18. $(Ydz - Zdy)\,dX + (Zdx - Xdz)\,dY + (Xdy - Ydx)\,dZ = o$

oder

19. $(YdZ - ZdY)\,dx + (ZdX - XdZ)\,dy + (XdY - Ydx)\,dz = o$

oder auch

20. $(dYdz - dZdy)\,X + (dZdx - dXdz)\,Y + (dXdy - dYdx)\,Z = o$

Die beiden letzten Gleichungen folgen direkt aus 18., wie man sich sehr leicht überzeugen kann. 18 ist die Differenzialgleichung der Krümmungslinien, wo $\omega' = 90$ Grad ist, und mithin die durch eine Tangente der Linie und die Normale der Fläche gelegte Ebene auch die nächstfolgende Normale enthält, wo also je zwei auf einander folgende Flächennormalen sich schneiden.

Um die geometrische Bedeutung von 19. und 20. zu finden, benützen wir wieder die Formeln 31 des §. 1. Bezeichnen wir die drei in Gleichung 8 dargestellten Cosinus mit α', β', γ', so sind

$$\frac{Y\gamma' - Z\beta'}{K.w},\ \frac{Z\alpha' - X\gamma'}{K\ w},\ \frac{X\beta' - Y\alpha'}{K.w}$$

die Cosinus der Winkel, welche die Axe derjenigen Ebene mit den Coordinatenaxen bildet, die den beiden unendlich nahen Flächennormalen in m' und m'' parallel ist. w ist der Winkel zwischen diesen Normalen, und

$$w = \sin w = \frac{1}{K}\sqrt{(Y\gamma' - Z\beta')^2 + (Z\alpha' - X\gamma')^2 + (X\beta' - Y\alpha')^2}$$

Nach der Cosinusformel erhält man für den unendlich wenig von 90° abweichenden Winkel zwischen der genannten Axe und dem Element m'm''

$$\cos W = \frac{1}{K.wds}\left\{(Y\gamma' - Z\beta')\,dx + (Z\alpha' - X\gamma')\,dy + (X\beta' - Y\alpha')\,dz\right\}$$

Wenn man den Ausdruck in der Klammer entwickelt, und in Betracht zieht, daß die Coefficienten von X, Y, Z in der Gleichung 8 verschwinden, so erhält man

$$21.\quad \cos W = \frac{1}{K^2.wds}\left\{(YdZ - ZdY)\,dx + (ZdX - XdZ)\,dy + (XdY - YdX)\,dz\right\}$$

Wenn man hier $W = \text{const.}$ setzt, so folgt hieraus die Gleichung der Linie, wo der Winkel zwischen der Tangente und einer mit zwei unendlich nahen Flächennormalen parallelen Ebene konstant ist. Ist dieser Winkel gleich Null, also auch $\cos W$, so ergibt sich die Formel 20, welche ebenfalls zeigt, daß zwei solche Flächennormalen und die Tangente der Krümmungslinie in einer Ebene liegen.

$$\frac{dy\gamma' - dz\beta'}{ds.\sin w'},\quad \frac{dz\alpha' - dx\gamma'}{ds.\sin w'},\quad \frac{dx\beta' - dy\alpha'}{ds.\sin w'}$$

sind die Cosinus der Winkel, welche die Axe derjenigen Ebene mit den Coordinatenaxen bildet, die mit dem Element mm' und der folgenden Flächennormale in m'' parallel ist. $\sin w'$ ist unendlich wenig von 1 verschieden und kann also weggelassen werden. Der Winkel zwischen dieser Axe und der ersten Flächennormale in m' sei W', so ist

$$\cos W' = \frac{1}{K.ds}\left\{(dy\gamma' - dz\beta')\,X + (dz\alpha' - dx\gamma')\,Y + (dx\beta' - dy\alpha')\,Z\right\}$$

Mittelst der Gleichung 8 kann man hieraus ableiten, mit Berücksichtigung der identischen Gleichung

$$(dyZ - dzY)\,X + (dzX - dxZ)\,Y + (dxY - dyX)\,Z = o$$

$$22.\quad \cos W' = \frac{1}{K^2.ds}\left\{(dydZ - dzdY)\,X + (dzdX - dxdZ)\,Y + (dxdY - dydX)\,Z\right\}$$

Wenn hier $W' = \text{const.}$ gesetzt wird, so hat man die Gleichung der Linien, wo der unendlich kleine Winkel konstant ist, welche die Flächennormale mit der Ebene bildet, die parallel der Tangente und der unmittelbar folgenden Normale ist. Ist dieser Winkel gleich Null, so ist $\cos W' = o$, und es ergibt sich die Formel 20 für die Krümmungslinien.

Die Gleichungen 12 und 18 für geodätische und Krümmungslinien geben mit einander multiplicirt folgende merkwürdige Relation:

$$23.\quad \left\{(Ydz - Zdy)\,d^2x + (Zdx - Xdz)\,d^2y + (Xdy - Ydx)\,d^2z\right\}$$
$$\left\{(Ydz - Zdy)\,dX + (Zdx - Xdz)\,dY + (Xdy - Ydx)\,dZ\right\}$$
$$= \frac{dXd^2x + dYd^2y + dZd^2z}{dXdx + dYdy + dZdz} + \frac{Xdx + Ydy + Zdz}{X^2 + Y^2 + Z^2} - \frac{dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z}{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Der Beweis dieser Gleichung beruht auf der Formel 42 des §. 1. Wir setzen nämlich

$$J = (Ydz - Zdy)\, d^2x + (Zdx - Xdz)\, d^2y + (Xdy - Ydx)\, d^2z = 0$$
$$J' = (Ydz - Zdy)\, dX + (Zdx - Xdz)\, dY + (Xdy - Ydx)\, dZ = 0$$

somit ist nach den in 42. §. 1 gebrauchten Buchstaben:

$$a = d^2x,\ b = d^2y,\ c = d^2z;\quad \alpha = \alpha' = X,\ \beta = \beta' = Y,\ \gamma = \gamma' = Z$$
$$a' = dX,\ b' = dY,\ c' = dZ;\quad \mathfrak{a} = \mathfrak{a}' = dx,\ \mathfrak{b} = \mathfrak{b}' = dy,\ \mathfrak{c} = \mathfrak{c}' = dz$$

Die Gleichung der Tangentialebene ist $Xdx + Ydy + Zdz = 0$, woraus durch Differenziation entsteht $Xd^2x + Yd^2y + Zd^2z = -(dXdx + dYdy + dZdz)$; mit Rücksicht auf diese Werthe haben wir ferner

$$\begin{aligned}
L &= aa' + bb' + cc' = dXd^2x + dYd^2y + dZd^2z\\
M &= \alpha a' + \beta b' + \gamma c' = XdX + YdY + ZdZ\\
N &= \mathfrak{a}a' + \mathfrak{b}b' + \mathfrak{c}c' = dXdx + dYdy + dZdz\\
L' &= a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = -(dXdx + dYdy + dZdz)\\
M' &= \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = X^2 + Y^2 + Z^2\\
N' &= \mathfrak{a}\alpha' + \mathfrak{b}\beta' + \mathfrak{c}\gamma' = Xdx + Ydy + Zdz = 0\\
L'' &= a\mathfrak{a}' + b\mathfrak{b}' + c\mathfrak{c}' = d^2xdx + d^2ydy + d^2zdz\\
M'' &= \alpha\mathfrak{a}' + \beta\mathfrak{b}' + \gamma\mathfrak{c}' = Xdx + Ydy + Zdz = 0\\
N'' &= \mathfrak{a}\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}\mathfrak{b}' + \mathfrak{c}\mathfrak{c}' = dx^2 + dy^2 + dz^2;\ \text{somit ist}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&L(M'N'' - M''N') + M(N'L'' - N''L') + N(L'M'' - L''M') = JJ'\\
&= LM'N'' - MN''L' - NL''M'\\
&= (dXd^2x + dYd^2y + dZd^2z)(X^2 + Y^2 + Z^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2)\\
&+ (XdX + YdY + ZdZ)(dx^2 + dy^2 + dz^2)(dXdx + dYdy + dZdz)\\
&- (dXdx + dYdy + dZdz)(d^2xdx + d^2ydy + d^2zdz)(X^2 + Y^2 + Z^2)
\end{aligned}$$

Dividirt man hier mit $(dXdx + dYdy + dZdz)(X^2 + Y^2 + Z^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$, so erhält man, da $J \cdot J' = 0$ ist, die Gleichung

$$24.\quad \frac{dXd^2x + dYd^2y + dZd^2z}{dXdx + dYdy + dZdz} + \frac{XdX + YdY + ZdZ}{X^2 + Y^2 + Z^2} - \frac{dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = 0$$

(Joachimsthal: de curvis curvaturae et lineis brevissimis in superficiebus secundi gradus, Crelle's Journal XXVI., 155.)

Ehe wir diese Relation näher betrachten, mögen noch einige weitere Formeln für geodätische Linien angegeben werden: Im Eingang des §. 12 haben wir gefunden, daß, wenn man zwei auf einander folgende Elemente mm' und $m'm''$ einer Linie nach t und t' verlängert, $m't = m't' = 1$, die Projektionen von tt' auf den Axen gleich $d\frac{dx}{ds}$, $d\frac{dy}{ds}$, $d\frac{dz}{ds}$ sind. Nun ist bei geodätischen Linien tt' parallel der Flächennormale in m', mithin sind diese Größen proportional den Cosinus der Winkel, welche die Normale mit den Axen bildet; wir haben somit die Gleichungen für geodätische Linien

$$25.\quad d\frac{dx}{ds} : d\frac{dy}{ds} : d\frac{dz}{ds} = -\frac{p}{k} : -\frac{q}{k} : \frac{1}{k} = -p : -q : 1 \quad (§.\ 1, 2)$$

$$d\frac{dx}{ds} : d\frac{dy}{ds} : d\frac{dz}{ds} = X : Y : Z \quad (§.\ 11)$$

je nachdem die Gleichung der Fläche die Form $z = f(x, y)$ oder $f(x, y, z) = 0$ hat. Ferner ist

$$\frac{d\frac{dx}{ds}}{tt'} = X,\ \frac{d\frac{dy}{ds}}{tt'} = Y,\ \frac{d\frac{dz}{ds}}{tt'} = Z;$$

und da $u' = \frac{ds}{\varrho}$ (§. 12, 7), so gelten auch nachstehende Formeln für geodätische Linien:

$$26.\quad d\,\frac{dx}{ds}\,.\,\varrho = X\,.\,ds,\; d\,\frac{dy}{ds}\,.\,\varrho = Y\,.\,ds,\; d\,\frac{dz}{ds}\,.\,\varrho = Z\,.\,ds$$

(Gauss: disquisitiones generales circa superficies curvas.)

ϱ ist der Krümmungshalbmesser der Linie, welcher in die Richtung der Flächennormale fällt, und der also zugleich Krümmungshalbmesser eines Normalschnitts der Fläche ist.

Die Euler'sche Gleichung über die Krümmungshalbmesser der Normalschnitte (§. 6)

$$27.\quad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R}\cos^2 a + \frac{1}{R'}\sin^2 a$$

kann ebenfalls als Gleichung der geodätischen Linien auf den Flächen angesehen werden.

Der Krümmungshalbmesser ϱ dieser Linien ist hier durch drei Variabeln, R, R' und a gegeben. R und R' sind die Halbmesser der größten und kleinsten Krümmung der Fläche, und a ist der Winkel, welchen die Tangente der geodätischen Linie mit der Tangente einer Krümmungslinie macht. Man ersieht aus 27., daß bei gleichartig gekrümmten Flächen, wo R und R' positiv sind, der Krümmungshalbmesser ϱ der geodätischen Linien immer zwischen R und R' eingeschlossen ist, und also nie gleich unendlich werden kann. Bei ungleichartig gekrümmten Flächen dagegen wird $\frac{1}{\varrho}$ = Null, oder es liegen drei auf einander folgende Punkte der geodätischen Linie in einer Geraden, wenn dieselbe eine Krümmungslinie unter dem Winkel

$$28.\quad \mathrm{tg}\,a = \pm\sqrt{\frac{R'}{R}}$$

schneidet. Bei entwickelbaren Flächen endlich ist R' gleich unendlich, also nimmt hier die Gleichung der geodätischen Linien folgende einfache Form an:

$$29.\quad \frac{1}{\varrho} = \frac{\sin^2 a}{R}$$

Die Gleichung aller Linien auf den Flächen, ohne Unterschied, ist die nachstehende:

$$30.\quad \frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{\sin\varphi}\left\{\frac{1}{R}\cos^2 a + \frac{1}{R'}\sin^2 a\right\}$$

Hier ist der Krümmungshalbmesser ϱ' der Linie durch vier Variabeln ausgedrückt: R und R' sind die Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche, a ist der Winkel, den die Tangente der Linie mit derjenigen Krümmungslinie bildet, welcher R entspricht, und φ ist, wie oben (Gleichung 9) der Winkel zwischen der Oskulationsebene der Linie und der Tangentialebene der Fläche. Der Beweis beruht ganz einfach auf der Vergleichung der Formeln 27 und 30, welche zu dem Theorem von Meunier (§. 8)

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{\varrho}\sin\varphi$$

führt. Die Gleichung 30 wird in jedem einzelnen Fall dadurch aufgelöst, daß zur Spezialisirung der Kurve eine der fünf Variabeln ϱ, φ, R, R', a

als Funktion der andern gegeben ist; nehmen wir z. B. an, es sei φ als Funktion von ϱ' gegeben, so ist

31. $f(\varrho') = \frac{\cos^2 a}{R} + \frac{\sin^2 a}{R'}$

die Differenzialgleichung aller derjenigen Linien auf den Flächen, bei welchen der Winkel zwischen der Oskulationsebene und der Tangentialebene eine gegebene Funktion des Krümmungshalbmessers ist. In dem spezielleren Fall, wo $\varphi = \text{const.}$ ist, hat man

32. $\frac{1}{\varrho'} = \text{const.} \left(\frac{\cos^2 a}{R} + \frac{\sin^2 a}{R,}\right)$

als Gleichung der Linien, wo der Winkel zwischen Oskulationsebene und Tangentialebene konstant ist. Wird die Konstante gleich 1 angenommen, so ist dieser Winkel gleich 90 Grad, und man erhält die Gleichung 27 für geodätische Linien.

Auf die Gleichung 30 finden ähnliche Schlüsse Anwendung wie auf 27. Bei gleichartig gekrümmten Flächen kann $\frac{1}{\varrho'}$ nicht Null werden, also können hier nie drei unendlich nahe Punkte einer Linie in einer Geraden liegen. Bei ungleichartig gekrümmten Flächen aber ist dieß der Fall, so oft die Gleichung befriedigt ist

$$\operatorname{tg} a = \pm \sqrt{\frac{R'}{R}}$$

Alle Linien endlich auf entwickelbaren Flächen entsprechen der Relation:

33. $\varrho' = \frac{\sin\varphi \, . \, R}{\cos^2 a}$

Wir kehren nun zu der Gleichung 24

$$J.J' = \frac{dXd^2x + dYd^2y + dZd^2z}{dXdx + dYdy + dZdz} + \frac{Xdx + Ydy + Zdz}{X^2 + Y^2 + Z^2} + \frac{dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = o$$

zurück. $J = o$ ist die Gleichung der geodätischen und $J' = o$ diejenige der Krümmungslinien. Wir wollen annehmen

34. $F(p, p' \ldots) = C$

sei ein Integral dieser Gleichung; $p, p' \ldots$ sind gewisse Parameter, z. B. Durchmesser der Fläche, welche mit den Tangenten oder den konjugirten Tangenten der Linie, auf welche die Formel 34 Bezug hat, parallel sind; Krümmungshalbmesser von — durch die genannten Tangenten bestimmten — Normalschnitten der Fläche, Perpendikel, die vom Mittelpunkt auf diese Tangenten oder auf die Tangentialebenen gefällt sind, Poldistanzen der Elemente oder der konjugirten Elemente der Linien §. 7. C ist eine Konstante; da die Gleichung 34 sowohl auf die Krümmungslinien als auch auf die geodätischen Linien Anwendung findet, so wird in sehr vielen Fällen, namentlich in allen solchen, wo keine andern Parameter, als die angeführten, vorkommen, die Konstante C für alle geodätischen Linien, welche eine Krümmungslinie der Fläche berühren, denselben Werth haben. Wir können unter dieser bestimmten Voraussetzung verschiedene Gattungen von Flächen unterscheiden.

a. Flächen, wo jeder Krümmungslinie ein besonderer, von den andern verschiedener, Werth von C zukommt. Hier kann eine geodätische Linie nur eine Krümmungslinie berühren, alle andern, mit welchen sie zusammentrifft,

wird sie schneiden. Hat eine solche Fläche einen Nabelpunkt, so muß dieser als eine Krümmungslinie angesehen werden, welcher ebenfalls ein eigenthümlicher, von den andern verschiedener, Werth von C entspricht; mithin werden alle durch einen Nabelpunkt gehenden geodätischen Linien die übrigen Krümmungslinien schneiden und keine derselben berühren. In den Punkten, wo zwei, eine Krümmungslinie berührende, geodätische Linien eine andere Krümmungslinie schneiden, findet die Gleichung statt

$$F(p, p' \ldots) = F(p_0, p_0' \ldots.)$$

welche die Beziehung angibt zwischen den, diesen Punkten entsprechenden Parametern $p, p' \ldots\ldots, p_0, p_0' \ldots.$ beider Linien. Hieher gehören die Kegelflächen und die meisten entwickelbaren Flächen. Wenn man eine Kegelfläche in einer Ebene ausbreitet, so verwandeln sich die Krümmungslinien in concentrische Kreise, die geodätischen Linien in Gerade. Da nun eine Gerade von mehreren concentrischen Kreisen nur einen berühren kann, während sie alle übrigen schneidet, so wird auch eine geodätische Linie auf der Kegelfläche eine Krümmungslinie berühren und alle andern schneiden. Breitet man eine entwickelbare Fläche in einer Ebene aus, dann verwandeln sich die Krümmungslinien in parallele Kurven, welche die Tangenten der Verwandelten der Rückkehrkante rechtwinklig schneiden. Letztere ist die gemeinschaftliche Evolute aller parallelen Kurven. Im Allgemeinen wird eine Gerade nicht zwei solcher Kurven zugleich tangiren können, also wird auch in den meisten Fällen eine geodätische Linie nur eine Krümmungslinie berühren und die übrigen schneiden.

b. Flächen, bei welchen je zwei Krümmungslinien zugleich ein von den andern verschiedener Werth von C zukommt. Ein Paar solcher Krümmungslinien theilt die Fläche in drei Zonen, die mittlere, welche von ihnen eingeschlossen ist, wollen wir Z nennen. Die geodätischen Linien, welche die erste Krümmungslinie berühren, werden nach der Berührung Z durchkreuzen, bis sie an der andern Grenze der Zone angekommen sind; nachdem sie dieselbe berührt haben, gehen sie zurück, durchschneiden die Krümmungslinien von Z zum zweitenmal, berühren wieder die erste Grenze u. s. f.; sie werden also auf Z unendlich viele Windungen innerhalb der zwei begrenzenden Krümmungslinien bilden. Nabelpunkte können auf solchen Flächen nur paarweise vorhanden sein. Alle geodätischen Linien, die von einem Nabelpunkt ausgehen, konvergiren wieder in dem entsprechenden, für welchen C denselben Werth hat. Beispiele von solchen Flächen sind das Ellipsoid, die Hyperboloide, die Kugel, sehr viele Rotationsflächen, welche durch eine Aequatorialebene in zwei symmetrische Hälften getheilt werden, sowie manche Flächen, die überhaupt eine Symmetralebene zulassen.

Bei solchen Flächen endlich, wo ein und derselbe Werth von C drei oder mehreren Krümmungslinien entspricht, läßt sich nichts Näheres über den Verlauf der geodätischen Linien angeben, da hier der Fall möglich ist, daß eine solche Linie drei oder mehrere Krümmungslinien berührt.

Gegeben ist eine Fläche (α) und eine Krümmungslinie K auf ihr. Die Tangenten aller geodätischen Linien, welche K berühren, bilden eine Reihe von entwickelbaren Flächen B ...., wovon jede senkrecht auf (α) steht, in so fern nämlich, als die Tangentialebenen einer solchen Fläche, welche zugleich die Oskulationsebenen der geodätischen Linien sind, (α) senkrecht schneiden. Jede entwickelbare Fläche B hat die Eigenschaft, daß ihre Erzeugenden Tangenten von (α) sind, und daß eine Ebene, welche durch eine solche Erzeugende so gelegt ist, daß sie B berührt, senkrecht auf (α) steht, und umgekehrt, berührt

diese Ebene (α), so steht sie senkrecht auf B. Die scheinbaren Umrisse von (α) und irgend einer der Flächen B, von welchem Punkt des Raums sie auch gesehen werden mögen, stehen somit auf einander senkrecht. Alle diese entwickelbaren Flächen B umhüllen eine weitere Fläche (β), welche durch die aufeinanderfolgenden Durchschnitte G von je zwei unendlich nahen Flächen B gebildet wird. Diese neue Fläche (β) schneidet also (α) ebenfalls orthogonal, und zwar in der Krümmungslinie K. Da sie von jeder Fläche B längs einer Linie G berührt wird, so kommt den Flächen (α) und (β) auch die Eigenschaft zu, daß ihre scheinbaren Umrisse von irgend einem Punkt des Raums aus gesehen, auf einander senkrecht stehen. Die Tangenten aller geodätischen Linien auf (α), welche K berühren, tangiren auch (β) längs einer Linie B. Diese Tangenten sind also den Flächen (α) und (β) gemeinschaftlich. Wenn man durch zwei unendlich nahe Punkte von G Tangentialebenen an (β) legt, so sind diese zugleich Oskulationsebenen einer geodätischen Linie auf (α), ihr Durchschnitt ist also eine Tangente dieser Linie, andererseits ist dieser Durchschnitt eine konjugirte Tangente von G, woraus hervorgeht, daß die konjugirten Tangenten einer Linie G auf (β) zugleich die Tangenten einer geodätischen Linie auf (α) sind.

Wir wollen nun auf zwei unendlich nahen, die Krümmungslinie K berührenden, geodätischen Linien auf (α) zwei Punkte m und m′ so annehmen, daß das Element mm′ eine konjugirte Tangente der durch m gehenden geodätischen Linie sei. Die Tangente der letzteren Linie ist demnach der Durchschnitt zweier Ebenen, welche (α) in m und m′ berühren; sie ist ferner nach dem Vorhergehenden eine gemeinschaftliche Tangente der Flächen (α) und (β); da nun die genannten Berührungsebenen zugleich Normalebenen von (β) sind, und ihr Durchschnitt eine Tangente dieser Fläche ist, so sind sie die Oskulationsebenen einer geodätischen Linie von (β); dieselben Schlüsse lassen sich auf zwei folgende Punkte, m′ und m″, deren Verbindungslinie eine konjugirte Tangente der durch m′ gehenden geodätischen Linie von (α) ist, ausdehnen. Die Punkte mm′m″ ...., welche das System der — die Krümmungslinie K berührenden — geodätischen Linien auf (α) so durchkreuzen, daß die Elemente mm′, m′m″ .... konjugirte Tangenten dieser Linien sind, bilden eine konjugirte Linie (§. 10) und sie wird im folgenden konjugirte geodätische Linie genannt werden. Wir können nun das Vorhergehende in diesem Satze zusammen fassen:

Gegeben ist eine Fläche (α) und eine Krümmungslinie K derselben. Man ziehe alle geodätischen Linien, welche K berühren; ihre Tangenten bilden entwickelbare Flächen, welche eine weitere Fläche (β) berühren, die (α) in K orthogonal schneidet. Diese Tangenten sind also den Flächen (α) und (β) gemeinschaftlich. Eine durch sie gehende Ebene, welche die eine dieser Flächen berührt, schneidet die andere senkrecht.

Die scheinbaren Umrisse von (α) und (β) sind, von irgend einem Punkt des Raums aus gesehen, zu einander rechtwinklig. Alle Tangenten einer — K berührenden — geodätischen Linie auf (α) bilden mit ihren auf einander folgenden Berührungspunkten auf (β) eine konjugirte geodätische Linie, und umgekehrt, alle Tangenten einer geodätischen Linie auf (β) bilden mit ihren Berührungspunkten auf (α) eine konjugirte geodätische Linie.

Es folgt aus der Eigenschaft der konjugirten Tangenten unmittelbar,

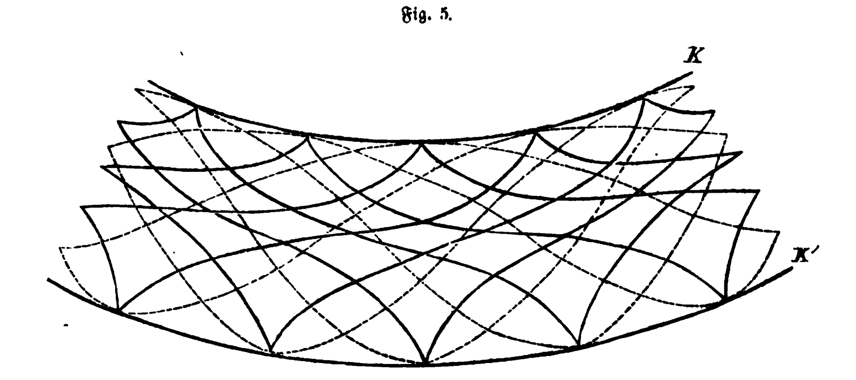
daß die konjugirten geodätischen Linien auf (α) und (β), wenn sie bis zur Krümmungslinie K verlängert werden, dieselbe rechtwinklig schneiden. Von jedem Punkt von (α) oder (β) aus lassen sich jedenfalls zwei geodätische Linien ziehen, die K berühren, mithin gehen auch von diesem Punkt aus zwei konjugirte geodätische Linien, die auf K senkrecht stehen. Die Gleichung sämmtlicher konjugirten geodätischen Linien, die auf K senkrecht stehen, ist

35. $F(p, p' \ldots) = C$

also dieselbe, wie diejenige der geodätischen Linien, welche K berühren; nur mit dem Unterschied, daß die Parameter p, p'.. eine andere Bedeutung haben. Beziehen sie sich nämlich in der Gleichung 34 auf die Tangenten der Linien, so beziehen sie sich in 35. auf die konjugirten Tangenten der Linien und umgekehrt. Ist z. B. p ein Diameter der Fläche, welcher in 34. mit der Tangente der geodätischen Linie parallel ist, so ist in 35. angenommen, daß er mit der konjugirten Tangente der konjugirten geodätischen Linie parallel ist.

Alle Schlüsse, welche auf 34. Anwendung finden, können auch auf 35. ausgedehnt werden. Auf den Flächen, wo jeder Krümmungslinie ein besonderer von den andern verschiedener Werth von C entspricht, werden die konjugirten geodätischen Linien, welche auf einer Krümmungslinie senkrecht stehen, die andern Krümmungslinien schief kreuzen oder berühren. Allen konjugirten geodätischen Linien, welche eine Krümmungslinie rechtwinklig schneiden, entspricht der nämliche Werth der Konstante C in 35. Bei Flächen, wo den Krümmungslinien paarweise gleiche Werthe von C zukommen, durchkreuzen die konjugirten geodätischen Linien eine von zwei solchen Krümmungslinien eingeschlossene Zone, ungefähr wie es in Fig. 5 dargestellt ist.

Fig. 5.



K und K' sind die zwei begrenzenden Krümmungslinien, die geodätischen Linien sind punktirt, und die konjugirten geodätischen Linien sind ganz ausgezogen. Wenn sich zwei solche Linien schneiden, so hat die Konstante C für beide, wie auch für die Krümmungslinie, gleichen Werth, wodurch sich aus den Gleichungen 34 und 35 für die Parameter p, p'.. eine Relation ergeben wird.

Wir wollen nun annehmen, die gemeinschaftliche Tangente der Flächen (α) und (β) bewege sich so, daß sie nach und nach mit allen denjenigen Punkten dieser Flächen in Berührung kommt, mit welchen sie überhaupt in Berührung kommen kann. Dann wird ein bestimmter Punkt L derselben eine neue Fläche, (λ), beschreiben, von welcher die bewegliche Tangente eine Normale ist. Be-

rührt letztere stets eine geodätische Linie von (α), und also zugleich eine konjugirte geodätische Linie von (β), so beschreibt L eine Krümmungslinie des einen Systems von (λ); die auf einander folgenden Durchschnittspunkte der Normalen liegen auf der geodätischen Linie von (α); bewegt sich aber die gemeinschaftliche Tangente von (α) und (β) und Normale von (λ) so, daß sie (β) in einer geodätischen, und also (α) in einer konjugirten geodätischen Linie tangirt, so beschreibt L eine Krümmungslinie des andern Systems von (λ), die auf einander folgenden Durchschnittspunkte der Normalen liegen auf der geodätischen Linie von (β). (α) und (β) sind somit die Flächen der Krümmungsmittelpunkte von (λ). Kommt endlich die gemeinschaftliche Tangente während ihrer Bewegung mit der Durchschnittslinie K von (α) und (β) in Berührung, so fallen die beiden Krümmungsmittelpunkte von (λ) zusammen; die Hauptkrümmungshalbmesser letzterer Fläche sind einander gleich, d. h. L ist in einem Punkte sphärischer Krümmung von (λ). So lange also die Normale von (λ) die Linie K berührt, beschreibt L eine Linie sphärischer Krümmung auf dieser Fläche. Von einem Punkt L dieser Linie kann man nach drei Richtungen fortschreiten, so daß sich die auf einander folgenden Normalen von (λ) schneiden; wenn der Fußpunkt L der Normale sich auf einer Krümmungslinie von (λ) bewegt, so liegen die auf einander folgenden Durchschnitte der Normale auf einer K berührenden geodätischen Linie von (α) oder (β). Bewegt sich aber L auf einer Linie sphärischer Krümmungen von (λ), so schneiden sich die Normalen auf der gemeinsamen Krümmungslinie K der Flächen (α) und (β). Da alle geodätischen Linien auf (α) oder (β), deren Tangenten diesen Flächen gemeinschaftlich und also zugleich Normalen von (λ) sind, K berühren, so folgt daraus, daß die Linie sphärischer Krümmungen alle Krümmungslinien beider Systeme durchkreuzt.

Wir haben nun hinsichtlich der Flächen (α) und (β) ähnliche Unterschiede zu machen, wie oben.

a. Die Konstante C hat für jede Krümmungslinie von (α) einen andern, von den übrigen verschiedenen Werth. Die geodätischen Linien, welche eine Krümmungslinie berühren, schneiden alle andern Krümmungslinien. Die von (α) abgeleitete Fläche (β) muß nach dem Obigen dieselbe Eigenschaft haben; (α) und (β) haben nur eine Durchschnittslinie, und die Fläche (λ), deren Krümmungsmittelpunkte auf (α) und (β) liegen, hat nur eine Linie sphärischer Krümmungen. Monge hat die Flächen untersucht, deren Normalen einen Kegel oder eine entwickelbare Fläche umhüllen. Da allen Kegelflächen und den meisten entwickelbaren Flächen die hier angegebene Eigenschaft zukommt, so folgt, daß die ihnen entsprechende Fläche (λ) nur eine Linie sphärischer Krümmungen hat, welche bei den Kegelflächen die Evolvente einer sphärischen Kurve ist.

b. Die Konstante C hat für je zwei Krümmungslinien von (α) denselben Werth. Da alle geodätischen Linien innerhalb einer von zwei solchen Krümmungslinien eingeschlossenen Zone letztere berühren, so schneidet die abgeleitete Fläche (β) (α) zweimal; die Fläche (λ), deren Krümmungsmittelpunkte auf (α) und (β) liegen, hat zwei Linien sphärischer Krümmung.

Wenn die Konstante C für mehr als zwei Krümmungslinien von (α) denselben Werth hat, so wird (α) von der abgeleiteten Fläche drei oder mehreremal geschnitten, die Fläche (λ) kann also eben so viele Linien sphärischer Krümmungen haben. Ueber die Punkte sphärischer Krümmung, auch Nabelpunkte genannt (ombilic nach Monge), welche durch die Eigenschaft charak-

terisirt sind, daß bei ihnen die Hauptkrümmungshalbmesser R und R′ gleich sind, wurden schon verschiedene Ansichten aufgestellt.

Monge gibt an, daß die Normale eines Nabelpunkts von allen unendlich nahen Normalen der Fläche geschnitten wird. Nach Dupin findet ein solches Schneiden nur nach drei Richtungen statt. Poisson (Journal de l'école polytechnique, cahier 21. page 205) nimmt an, daß zwei unendlich nahe Normalen, deren Fußpunkte auf einer Krümmungslinie liegen, sich nicht schneiden, sondern daß deren kürzeste Entfernung ein unendlich Kleines der ersten Ordnung ist. Von einem Nabelpunkt aus kann man nach allen Richtungen auf der Fläche fortschreiten, so daß die kürzeste Entfernung der Normale des Nabelpunkts und der nächstfolgenden ein unendlich Kleines der ersten Ordnung ist; aber es gibt drei verschiedene Richtungen, wo diese Entfernung ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung wird.

Ohne uns ganz an die Ansicht Poisson's anzuschließen, welche auch mit §. 5 im Widerspruch ist, glauben wir im Vorhergehenden gezeigt zu haben, daß, wenn eine Fläche (λ) eine Linie von Punkten sphärischer Krümmung enthält, die beiden Flächen ihrer Krümmungs-Mittelpunkte (α) und (β) sich in einer Krümmungslinie schneiden, und daß man alsdann von jedem Nabelpunkte auf (λ) aus nach drei Richtungen fortschreiten kann, in welchen sich die unendlich nahen Normalen schneiden. Zwei dieser Richtungen berühren die Krümmungslinien von (λ), die entsprechenden Normalen tangiren zwei geodätische Linien auf (α) und (β); die dritte Richtung ist diejenige der Punkte sphärischer Krümmung auf (λ), deren Normalen die Schnittlinie von (α) und (β) berühren.

Durch einen Punkt sphärischer Krümmung auf einer Fläche gehen also im Allgemeinen drei Linien, welche die Fußpunkte solcher Flächennormalen sind, die eine entwickelbare Fläche bilden, deren Rückkehrkante die Durchschnitte der Normalen enthält. Der Winkel, welchen die Linie sphärischer Krümmung mit einer Krümmungslinie bildet, ist derselbe, welchen die Oskulationsebene der Krümmungslinie K mit der Oskulationsebene der berührenden geodätischen Linien macht. Es kann der Fall eintreten, daß dieser Winkel ein Rechter ist, oder daß diese Oskulationsebene auf der einen von den Flächen (α) und (β) senkrecht steht, während sie die andere berührt. Nehmen wir z. B. an, (α) sei die Umhüllungsfläche einer Kugel von konstantem Halbmesser, die auf einer Ebene rollt, und K sei die Berührungslinie dieser Fläche mit der Ebene. Da diese Fläche eben ist, so fallen ihre Oskulationsebenen alle in eine zusammen, welche (α) berührt, und auf (β) senkrecht steht.

Die Punkte sphärischer Krümmung können aber auch isolirt auf Flächen vorkommen, und dann kommt ihnen speziell die Benennung „Nabelpunkte“ zu. Wir wollen annehmen, eine beliebige Fläche (α) habe einen oder mehrere vereinzelte Nabelpunkte. Man ziehe alle geodätischen Linien, welche durch einen solchen Nabelpunkt N gehen; die entwickelbaren Flächen, welche die Tangenten dieser Linien bilden, hüllen eine Fläche (β) ein, die in N eine Spitze hat. Man kann nun ganz wie im Vorigen die Fläche (λ) konstruiren, deren Normalen die gemeinschaftlichen Tangenten von (α) und (β) sind. Alle Tangenten von (α), welche durch N gehen, schneiden (λ) in einer Linie sphärischer Krümmung. Da diese Tangenten in einer Ebene liegen, so ist die Linie sphärischer Krümmung ebenfalls eben. Sämmtliche Berührungsebenen

von (λ), welche durch die Punkte dieser Linie gehen, umhüllen also einen Cylinder. Unter Umständen kann (β) auch eine Kurve sein, bei dem Ellipsoid z. B. ist sie die Fokalhyperbel.

§. 16. Die Linien auf den Flächen. Fortsetzung.

Gegeben sind zwei entwickelbare Flächen S und S′, welche sich so schneiden, daß in jedem Punkt der Schnittlinie sowohl die Erzeugenden, als auch die Tangentialebenen auf einander senkrecht stehen. Es sei mm′ ein Element dieser Linie; mo und m′o sind zwei Erzeugende von S, mo′ und m′o′ zwei Erzeugende von S′. Da die Winkel omo′ und om′o′ Rechte sind, so liegen die 4 Punkte omm′o′ auf einer Kugel, deren Durchmesser oo′ ist; und da die Tangentialebenen omm′ und o′mm′ auf einander senkrecht stehen, so sind die Winkel mm′o und mm′o′ Rechte, d. h. mm′ ist ein Element der Krümmungslinie:

Zwei entwickelbare Flächen, deren Erzeugende und Tangentialebenen in jedem Punkt der Durchschnittslinie auf einander senkrecht stehen, schneiden sich in einer Krümmungslinie.

Wir wollen nun annehmen, daß zwar die Winkel omo′ und om′o′ Rechte sind, daß aber die Tangentialebenen nicht auf einander senkrecht stehen; dann sind offenbar die Winkel omm′ und o′mm′ schief, d. h. mm′ ist nicht ein Element der Krümmungslinie. Oder umgekehrt, stehen blos die Tangentialebenen omm′ und o′mm′ auf einander senkrecht, sind dagegen die Winkel der Erzeugenden omo′ und om′o′ schief, so ist mm′ ebenfalls keine Krümmungslinie, weil die Winkel omm′ und o′mm′ gleichfalls schief sind:

Zwei entwickelbare Flächen, bei welchen blos die Erzeugenden oder blos die Tangentialebenen in jedem Punkt der Schnittlinie auf einander senkrecht stehen, schneiden sich nicht in einer Krümmungslinie.

Es kann aber in einem speziellen Fall die Durchschnittslinie von zwei entwickelbaren Flächen, deren Tangentialebenen orthogonal sind, eine Krümmungslinie auf der einen Fläche und zugleich eine geodätische Linie auf der andern sein. Es seien mm′m″ drei auf einander folgende Punkte einer geodätischen Linie auf S; wir verlängern mm′ nach t und m′m″ nach t′, so ist die Ebene tm′t′ senkrecht auf der durch m′m″ gehenden Tangentialebene von S, weil die Oskulationsebenen der geodätischen Linie senkrecht auf der Fläche sind. Dehnt man dieses Verfahren auf alle Elemente der Linie mm′m″.. aus, so erhält man eine entwickelbare Fläche S′, deren Tangentialebenen in jedem Punkt der Schnittlinie senkrecht auf S stehen; die Linie mm′m″ ist die Rückkehrkante und also eine Krümmungslinie von S′. (Die Rückkehrkanten sind Krümmungslinien auf den entwickelbaren Flächen, weil sie alle Krümmungslinien des einen Systems senkrecht schneiden.)

Auf S sollen zwei geodätische Linien gezogen sein, welche sich in M rechtwinklig schneiden. mm′m″ sind drei unendlich nahe Punkte auf der ersten Linie und die Erzeugenden von S, welche durch diese Punkte gehen, schneiden die zweite Linie in $\mu\mu'\mu''$; die Tangenten mm′ und $\mu\mu'$ treffen sich in M′, und die Tangenten m′m″ und $\mu'\mu''$ in M″. Um dieß zu beweisen, ziehen wir in M die Tangentialebene von S, und durch M in dieser Ebene zwei rechtwinklige Gerade. Beim Rollen der Ebene auf der entwickelbaren Fläche S

werden diese Geraden die geodätischen Linien beschreiben. Geht die Ebene von der Lage $m'mM'\mu\mu'$ in die folgende, unendlich nahe Lage $m''m'M''\mu'\mu''$ über, so beschreiben alle Punkte unendlich kleine Bögen, senkrecht zur Ebene. $M'M''$ ist ein solcher Bogen, welcher demnach senkrecht ist auf den Geraden $M'mm'$ und $M'\mu\mu'$, also ist $M'M''$ ein Element einer Krümmungslinie der beiden orthogonalen Flächen S' und S'', welche durch die Tangenten der geodätischen Linien $mm'm''$ und $\mu\mu'\mu''$ auf S gebildet werden, und da die Winkel $mM'\mu$ und $m'M''\mu'$ rechte sind, so stehen die Flächen S' und S'' auf einander senkrecht. Wir haben also drei orthogonale Flächen, S, S' und S''. Im Durchschnitt von S mit S' und S'' stehen blos die Tangentialebenen, aber nicht die Erzeugenden der betreffenden Flächen auf einander senkrecht; diese Durchschnittslinien sind somit geodätische Linien auf S und Krümmungslinien (nämlich die Rückkehrkanten) von S' und S''. S' und S'' sind aber in dem Sinn orthogonal, daß in jedem Punkt ihrer Durchschnittslinie nicht blos die Erzeugenden beider Flächen, sondern auch die Tangentialebenen rechtwinklig sind; diese Flächen schneiden sich somit in einer Krümmungslinie. Das Theorem von Ch. Dupin heißt:

1. Drei sich rechtwinklig schneidende Flächen schneiden sich in ihren Krümmungslinien. Um dasselbe zu beweisen, nehmen wir die Gleichung 18 des §. 4 zu Hülfe:

$$\gamma = \frac{1}{2} \sin 2a \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right) ds$$

m,m' seien die beiden Endpunkte des Elements ds; a ist der Winkel zwischen mm' und der durch m gehenden Krümmungslinie; die Normale der Fläche in m' bildet mit der durch mm' und die Normale von m gelegten Ebene den Winkel γ. Dreht sich mm' nach mm'', so daß Winkel $m'mm'' = 90^0$ ist, so haben wir

$$1.\quad \gamma' = \frac{1}{2} \sin 2(90 + a) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right) ds = \gamma$$

Wir wollen nun annehmen, im Punkt m schneiden sich drei Flächen orthogonal, mm', mm'', mm''' seien die Elemente der Durchschnittslinien. Durch jeden der drei Punkte m', m'', m''' gehen zwei Flächennormalen; diejenigen von m' machen mit den Axen mm', mm'', mm''' Winkel, deren Cosinus gleich α, β, γ und α', β', γ' sind; die Cosinus der Winkel, welche die Normale, deren Fußpunkt m'' ist, mit den Axen bildet, sind a, b, c und a', b', c'; endlich sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$; $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}'$ die Cosinus der Winkel, welche die Normale in m''' mit den Axen macht. Nun ist

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0$$

Die Winkel, deren Cosinus $= \alpha$ und α', sind unendlich wenig von 90^0 verschieden, also ist mit Vernachlässigung einer unendlich kleinen Größe zweiter Ordnung $\beta\beta' + \gamma\gamma' = 0$; ferner sind die Cosinus β und γ' gleichfalls unendlich klein, also haben wir $\beta' + \gamma = 0$; ebenso findet man $a' + c = 0$; $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}' = 0$. Nach der Gleichung 1 aber haben wir $\beta' = a'$; $c = \mathfrak{b}'$; $\gamma = \mathfrak{a}$; aus diesen sechs Gleichungen ergibt sich $\gamma = \mathfrak{a} = \mathfrak{b}' = c = a' = \beta' = 0$. Die Normalen in m', m'', m''' liegen also in Ebenen, welche durch diese drei Punkte und die correspondirende Normale von m gehen, mithin schneiden sie dieselbe, sonach sind mm', mm'', mm''' Krümmungslinien. Dieser Beweis ist von Bertrand (Journal de M. Liouville, tome IX, 133), außerdem haben noch verschiedene Mathematiker Beweise desselben Satzes gegeben: Dupin

(développements de géométrie), Lamé und Finck (Journal de M. Liouville), Ossian Bonnet (Journal de l'école polytechnique, cahier 32. page 1). Bei allen Sätzen über die allgemeine Theorie der Flächen, welche auf der Differenziation der Gleichung $f(x, y, z) = o$ beruhen, ist die Voraussetzung zu berücksichtigen, daß keiner der Differenzialquotienten $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$.... einen exceptionellen Werth annimmt, Null, unendlich u. s. f., wie dieß bei besonderen Punkten oder Linien auf den Flächen der Fall ist. Wenn bei dem Theorem von Euler

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2 a}{R} + \frac{\sin^2 a}{R'}$$

$R' = o$ ist, so erhält man $\varrho = o$ und mithin auch $R = o$. Nun gibt es aber Punkte auf Flächen, wo $R' = o$ ist, und R einen endlichen Werth hat, und wo also diese Gleichung nicht mehr anwendbar ist. Man denke sich z. B. zwei ebene Kurven, die sich in einem Punkt M so schneiden, daß ihre Ebenen orthogonal sind. Der Krümmungshalbmesser der einen Kurve sei R, und derjenige der andern $= o$; eine dritte Kurve, welche über die beiden ersten hingleitet, erzeugt eine Fläche, deren Hauptkrümmungshalbmesser gleich R und o sind, und für welche also das Theorem von Euler nicht mehr anwendbar ist. In irgend einem Punkt der Rückkehrkante einer entwickelbaren Fläche ist der eine Hauptkrümmungshalbmesser $R =$ unendlich, dessen Ebene durch eine Erzeugende der Fläche oder Tangente der Rückkehrkante geht. Der andere Hauptkrümmungshalbmesser R', dessen Ebene senkrecht auf dieser Tangente steht, ist $= o$. Mithin ist hier ebenfalls das Theorem von Euler nicht mehr gültig, welches verlangt, daß wenn $R' = o$ ist, zugleich ϱ und sofort auch $R = o$ sein soll. Der Grund von dieser scheinbaren Anomalie liegt darin, daß in derartigen Punkten einzelne der genannten Differenzialquotienten verschwinden, und dann in der Ableitung der Gleichung $f(x, y, z) = o$ blos die höheren Differenzialquotienten übrig bleiben, welche bei dem Beweis der Sätze von Euler, Bertrand, Dupin nicht berücksichtigt wurden. Bei den folgenden Entwicklungen sind solche Ausnahmsfälle ausgeschlossen, und sie haben darum auch nur unter dieser Voraussetzung Geltung.

2. **Wenn sich zwei Flächen überall unter konstantem Winkel schneiden, und die Schnittlinie ist eine Krümmungslinie der einen Fläche, so ist sie auch eine Krümmungslinie der andern.**

A, B, C sind drei auf einander folgende Punkte der Schnittlinie; die durch die Elemente AB und BC gehenden Tangentialebenen der ersten Fläche, auf welcher ABC eine Krümmungslinie ist, schneiden sich in BD; die Winkel DBA und DBC sind mithin Rechte. Zwei Tangentialebenen der zweiten Fläche, welche durch AB und BC gehen, bilden mit den Ebenen DBA und DBC gleiche Winkel; ihr Durchschnitt BE muß demnach ebenfalls mit den Elementen AB und BC gleiche Winkel bilden, oder auf diesen beiden Linien senkrecht stehen. AB und BE sind somit sich rechtwinklig schneidende konjugirte Tangenten der zweiten Fläche und AB ist ein Element einer Krümmungslinie auf letzterer Fläche; ebenso wird bewiesen, daß alle Elemente der Schnittkurve einer Krümmungslinie der zweiten Fläche angehören.

2. **Wenn der Durchschnitt zweier Flächen eine Krümmungslinie auf beiden ist, so schneiden sich die Flächen überall unter konstantem Winkel.**

Es sind A, B, C drei auf einander folgende Punkte des Durchschnitts. Die durch AB und BC gelegten Tangentialebenen der ersten Fläche schneiden sich in BD und die durch dieselben Elemente gehenden Tangentialebenen der zweiten Fläche schneiden sich in BE. Da ABC eine Krümmungslinie auf beiden Flächen zugleich ist, so sind die Durchschnittslinien BD sowohl als auch BE senkrecht auf AB oder BC. Der Winkel der Tangentialebenen ABC und ABE muß somit gleich dem Winkel der Tangentialebenen CBD und CBE sein. Ebenso wird bewiesen, daß dieser Winkel konstant ist, für die durch alle folgenden Elemente der Durchschnittslinie beider Flächen gelegten Tangentialebenen derselben. Jede Linie auf einer Ebene ist eine Krümmungslinie derselben; unser Satz führt also sogleich auf folgendes Theorem (von Joachimsthal):

Wenn eine Krümmungslinie einer Fläche eben ist, so schneidet die Ebene derselben die Fläche überall unter konstantem Winkel.

Jede Linie auf einer Kugel ist eine Krümmungslinie derselben, weil sich alle Normalen einer Kugel schneiden, im Mittelpunkt. Ein zweiter spezieller Fall des Satzes ist mithin der nachstehende (von Serret):

Wenn eine Krümmungslinie einer Fläche sphärisch ist, so schneidet die Kugel, auf welcher sie liegt, die Fläche überall unter konstantem Winkel.

Aus unserem zweiten Satz läßt sich ebenso mit leichter Mühe ableiten:

Wenn eine Ebene oder eine Kugel eine Fläche überall unter konstantem Winkel schneiden, so ist die Durchschnittskurve eine Krümmungslinie auf der Fläche.

Ist eine Krümmungslinie einer Fläche kreisförmig, dann bilden die Normalen der Fläche, deren Fußpunkte auf der Krümmungslinie liegen, einen Drehungskegel. Denn durch einen Kreis lassen sich unendlich viele Kugeln legen; jede schneidet die Fläche unter einem konstanten Winkel; unter diesen Kugeln befindet sich immer eine solche, wo dieser Winkel gleich Null ist, oder welche die Fläche berührt. Der Mittelpunkt dieser Kugel ist die Spitze des genannten Drehungskegels. Die Fläche läßt sich auch von einem Drehungskegel längs der kreisförmigen Krümmungslinie berühren.

Zwei sich schneidende Linien haben im Durchschnitt einen Punkt gemeinschaftlich; bei zwei Linien, welche eine Berührung erster Ordnung haben, sind zwei auf einander folgende Punkte oder ein Linienelement, bei einer Berührung zweiter Ordnung sind zwei auf einander folgende Linienelemente oder drei Punkte gemein. Wenn sich zwei Flächen in einem Punkt so tangiren, daß sie eine Berührung zweiter Ordnung haben, so wird jede durch den Punkt gelegte Ebene beide Flächen in zwei Kurven schneiden, die zwei Linienelemente gemeinschaftlich haben. Alle diese gemeinschaftlichen Linienelemente bilden einen unendlich kleinen sehr stumpfen Kegel, dessen Spitze der Berührungspunkt ist, und dessen Mantel sowohl der einen als auch der andern Fläche angehört. C sei die Spitze des Kegels und CA, CB sind zwei Erzeugende desselben, deren Ebene die Normale der Fläche enthält. Die durch CA und CB gelegten Tangentialebenen der Fläche schneiden sich in der Geraden CD. Die Tangenten CA und CD sind also für beide Flächen konjugirt; hierauf beruht der wichtige Satz von Dupin:

4. **Bei zwei Flächen, die sich in einem Punkt in zweiter Ordnung berühren, sind die konjugirten Tangenten gemeinschaftlich. In jedem Punkt einer Fläche läßt sich dieselbe nach dem Theorem von Euler von einer Fläche zweiten Grades in zweiter Ordnung tangiren; konjugirte Tangenten in einem Punkt einer Fläche befolgen somit dasselbe Gesetz, wie bei einer Fläche zweiten Grades.** Siehe §. 6.

Dieses Gesetz ist aber bei den centrischen Flächen zweiten Grades sehr einfach, denn je zwei konjugirte Tangenten der Fläche sind zwei konjugirten Durchmessern des der Tangentialebene parallelen Diametralschnitts parallel; und da sich die Axen dieses Diametralschnitts verhalten wie die Quadratwurzeln der beiden Hauptkrümmungshalbmesser im Berührungspunkt, so geht daraus weiter hervor:

5. **Construirt man für einen beliebigen Punkt einer Fläche in der Tangentialebene einen Kegelschnitt, dessen Axen mit den Tangenten der Krümmungslinien zusammenfallen, und den Quadratwurzeln der beiden Hauptkrümmungshalbmesser proportional sind, so sind irgend zwei konjugirte Durchmesser des Kegelschnitts zugleich konjugirte Tangenten der Fläche; diese Durchmesser sind den Quadratwurzeln der Krümmungshalbmesser von den durch sie gehenden Normalschnitten der Fläche proportional.**

Wenn zwei Flächen in einem Punkt eine Berührung erster Ordnung haben, so kann zwischen ihren konjugirten Tangenten keine bestimmte Beziehung statt finden, weil sich jede Fläche um die gemeinschaftliche Normale beliebig drehen läßt. Anders verhält es sich aber, wenn sich zwei Flächen längs einer gemeinschaftlichen Linie berühren. Dann sind die Tangentialebenen in zwei auf einander folgenden Punkten der Berührungslinien beiden Flächen gemein, also ist ihr Durchschnitt der Tangente der Berührungslinie für beide Flächen konjugirt.

6. **Haben zwei Flächen eine gemeinschaftliche Berührungslinie, so entspricht einer Tangente der letzteren für beide Flächen dieselbe konjugirte Tangente. Die Erzeugenden eines Kegels, eines Cylinders, überhaupt einer entwickelbaren Fläche, welche eine Fläche in einer Kurve berühren, sind den Tangenten dieser Kurve konjugirt.** Diese Erzeugenden fallen bei ungleichartig gekrümmten Flächen mit der Tangente der Berührungskurve zusammen, wenn sie mit einer Krümmungslinie den Winkel a bilden, so daß $\operatorname{tg} a = \pm \sqrt{\frac{R'}{R}}$ (**Hachette**, im Journal v. Crelle, Bd. 1, S. 371.)

Wenn zwei sich berührende Flächen zwei konjugirte Tangenten gemein haben, so können drei Fälle statt finden; entweder sind die jeder Tangente entsprechenden Krümmungshalbmesser der Normalschnitte für beide Flächen gleich, dann sind auch die Tangentialebenen in zwei auf einander folgenden Punkten in der Richtung der Tangenten die nämlichen; die Flächen berühren sich in der zweiten Ordnung und haben mithin im Berührungspunkt alle Paare von konjugirten Tangenten gemeinschaftlich. Oder sind blos die **einer** Tangente entsprechenden Krümmungshalbmesser der Normalschnitte für beide Flächen gleich, dann fallen nur die beiden Tangentialebenen in zwei auf einander

folgenden Punkten der Richtung dieser Tangente zusammen; dieß findet statt, wenn beide Flächen eine gemeinschaftliche Berührungslinie haben. Endlich ist keiner der genannten Krümmungshalbmesser für beide Flächen der gleiche; in diesem Fall ist die Berührung eine gewöhnliche von der ersten Ordnung.

Haben zwei Flächen eine gemeinschaftliche Berührungslinie, so ist dieß ein besonderer Fall des zweiten Satzes, wo der konstante Winkel, unter dem sich die Flächen schneiden, gleich Null ist. Hieraus geht also hervor:

Wenn sich zwei Flächen in einer Kurve berühren, welche eine Krümmungslinie auf der ersten Fläche ist, so ist sie auch eine Krümmungslinie auf der zweiten.

Jede Linie auf einer Ebene oder auf einer Kugel ist eine Krümmungslinie:

Wenn eine Fläche von einer Ebene längs einer Linie berührt wird, so ist die Berührungskurve eine Krümmungslinie der Fläche. Eine entwickelbare Fläche läßt sich von einer Ebene längs einer Erzeugenden berühren, also ist die letztere eine Krümmungslinie. Die Erzeugenden eines Kegels, eines Cylinders sind Krümmungslinien. Eine Kugel (oder eine beliebige Fläche) rollt auf einer Ebene; die auf einander folgenden Berührungspunkte bilden eine Kurve, welche auf derjenigen Fläche liegt, die die Kugel in ihren einzelnen Lagen umhüllt; diese Kurve ist die Berührungslinie zwischen der Ebene und der Umhüllungsfläche, also ist sie eine Krümmungslinie der letzteren. Die auf der Ebene rollende Kugel kann einen konstanten oder einen veränderlichen Halbmesser haben. Zwei auf einander folgende Kugeln schneiden sich bei dieser Bewegung in einem Kreis, welcher auf der Umhüllungsfläche liegt, und da er zugleich die Berührungskurve zwischen der beweglichen Kugel und dieser Fläche ist, so folgt daraus, daß die Kreisschnitte der Umhüllungsfläche Krümmungslinien derselben sind; und da diese Kreise zugleich Krümmungslinien der Ebenen, auf welchen sie liegen, sind, so haben wir zufolge des dritten Satzes folgenden:

Bei jeder Umhüllungsfläche einer beweglichen Kugel von konstantem oder veränderlichem Halbmesser sind die Kreisschnitte Krümmungslinien; die Ebene jedes solchen Kreises trifft die Fläche überall unter demselben Winkel.

Es seien A, B, C drei auf einander folgende Punkte der Durchschnittslinie zweier Flächen. Die durch AB und BC gehenden Tangentialebenen der ersten Fläche schneiden sich in BD, und die durch dieselben Elemente gelegten Tangentialebenen der zweiten Fläche schneiden sich in BE. Wir wollen nun annehmen, die Linie ABC oder die Oskulationsebene der Durchschnittskurve halbire den Winkel der Ebenen ABD und ABE, wie auch den Winkel der Ebenen CBD und CBE; dann müssen offenbar auch die Winkel ABD und ABE oder CBD und CBE einander gleich sein. Hierauf beruht der Satz:

7. Zwei Flächen schneiden sich so, daß die Oskulationsebene der Durchschnittslinie in jedem Punkt den Winkel der Tangentialebenen der Flächen halbirt, dann sind auch die Winkel gleich, welche jede Tangente dieser Linie mit den hinsichtlich beider Flächen ihr konjugirten Tangenten bildet.

Hat diese Durchschnittslinie die Eigenschaft, daß sie mit allen ihren konjugirten Tangenten der ersten Fläche einen konstanten Winkel bildet, so hat sie diese Eigenschaft auch bei der zweiten Fläche. Ist dieser konstante Winkel

gleich einem Rechten, so ist er es auch bei der letzteren Fläche; wir können also als speziellen Fall unseres Satzes folgenden angeben:

8. Die Durchschnittslinie zweier Flächen ist eine Krümmungslinie auf der einen von ihnen; und zugleich hat sie die Eigenschaft, daß ihre Oskulationsebenen in jedem Punkt den Winkel der beiden Tangentialebenen der Flächen halbiren, dann ist diese Durchschnittslinie eine Krümmungslinie auch auf der andern Fläche.

Eine Fläche wird durch eine Reihe von parallelen Ebenen geschnitten. Man ziehe auf der Fläche eine den Schnittkurven konjugirte Linie, d. h. eine Linie, deren Tangenten die konjugirten Tangenten der Schnittkurven sind; sind z. B. A, B, C, D vier auf einander folgende Punkte dieser Transversallinie und BB′, CC′ die Tangenten der durch B und C gehenden parallelen Schnittkurven, so sind AB und BB′, BC und CC′ konjugirte Tangenten der Fläche; ebenso sind auch CD und DD′ konjugirte Tangenten u. s. f. Nun sind BB′, CC′, DD′ einerseits die Durchschnitte von auf einander folgenden Ebenen, je zwei dieser Durchschnitte schneiden sich also, oder sie bilden eine entwickelbare Fläche. Andererseits liegen sie in parallelen Ebenen, mithin sind ihre Durchschnittspunkte unendlich fern und die von ihnen gebildete entwickelbare Fläche ist ein Cylinder.

9. Wenn eine beliebige Fläche durch eine Reihe von parallelen Ebenen geschnitten wird, so sind die Tangenten der Schnittkurven in denjenigen Punkten, wo sie von einer konjugirten Transversallinie (trajectoire nach Monge) getroffen werden, einander parallel, und bilden also einen Cylinder.

Wir wollen annehmen, daß die Transversallinien der parallelen Schnittkurven die Eigenschaft haben, daß der Winkel, den ihre Tangenten mit den konjugirten Tangenten der Fläche bilden, konstant ist, so schneiden diese Transversallinien alle Erzeugenden des Cylinders, auf welchem sie liegen, unter einem konstanten Winkel, mithin sind sie Schraubenlinien, welche sich bei der Abwicklung des Cylinders auf eine Ebene in Gerade verwandeln. Hierauf beruht dieser Satz:

Eine Fläche enthält ein System von parallelen Schnittkurven und die konjugirten Transversallinien derselben gehören zu derjenigen Klasse von Linien auf Flächen, bei welchen der Winkel zwischen ihren Tangenten und den konjugirten Tangenten der Fläche für alle Punkte einer Linie konstant ist, dann sind diese konjugirten Transversalen Schraubenlinien.

Wenn der konstante Winkel ein Rechter ist, so sind die parallelen Schnittkurven sowohl, als auch die konjugirten Transversalen Krümmungslinien; dieß führt zu folgendem Theorem von Joachimsthal (Journal von Crelle):

Eine Fläche besitzt ein System von parallelen Krümmungslinien; jede Krümmungslinie des andern Systems liegt auf einem Berührungscylinder der Fläche, dessen Erzeugende sie senkrecht schneidet, mithin liegt sie selbst in einer Ebene, welche auf diesen Erzeugenden senkrecht steht. Die Ebenen aller Krümmungslinien des zweiten Systems stehen also auf parallelen Ebenen der Krümmungslinien des ersten Systems senkrecht, somit haben sie entweder eine gemeinsame Durchschnittslinie, wie bei den Drehungsflächen, oder bilden sie die Tangentialebenen eines Cylinders.

Eine Fläche wird durch ein System von Ebenen geschnitten, welche durch eine Gerade M gehen. Man ziehe wieder auf der Fläche eine konjugirte Transversallinie der Schnittkurven; es seien A, B, C, D auf einander folgende Punkte derselben, und BB′, CC′, DD′ die konjugirten Tangenten der durch die Elemente AB, BC, CD bestimmten Tangenten der Fläche. BB′, CC′, DD′ liegen nun einerseits als Durchschnitte von auf einander folgenden Ebenen, ABB′, BCC′, CDD′ auf einer entwickelbaren Fläche und schneiden sich zu zweien. Andererseits liegen sie auf den durch die Gerade M gehenden Ebenen, mithin haben sie einen gemeinsamen Durchschnittspunkt auf M und die von ihnen gebildete entwickelbare Fläche ist ein Kegel:

10. **Wenn eine Fläche durch eine Reihe von Ebenen mit gemeinschaftlicher Durchschnittslinie geschnitten wird, so haben die Tangenten der Schnittkurven in denjenigen Punkten, wo sie von einer konjugirten Transversale getroffen werden, einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt und bilden einen Kegel.** (Siehe Satz 6.)

Die parallelen Schnittkurven können so beschaffen sein, daß jede mit ihrer konjugirten Transversallinie einen konstanten Winkel bildet, alsdann schneiden sie die Erzeugenden des Kegels, auf welchem sie liegen, gleichfalls unter einem konstanten Winkel, und man kann den letzten Satz ebenso modificiren, wie den neunten; ist dieser konstante Winkel ein Rechter, so sind die parallelen Schnittkurven sowohl als auch ihre konjugirten Transversalen Krümmungslinien; letztere schneiden die Erzeugenden des Kegels, auf welchem sie liegen, senkrecht, mithin liegen sie auf einer Kugel, deren Mittelpunkt die Spitze dieses Kegels ist; wir können somit diesen Satz (von Joachimsthal) aussprechen:

Wenn die Krümmungslinien des einen Systems auf einer Fläche in Ebenen enthalten sind, die eine gemeinschaftliche Durchschnittslinie haben, so bilden ihre Tangenten in denjenigen Punkten, wo sie von einer Krümmungslinie des andern Systems geschnitten werden, einen Kegel, dessen Spitze der Mittelpunkt einer Kugel ist, auf welcher diese letztere Krümmungslinie liegt. Alle Krümmungslinien des zweiten Systems sind sphärische Kurven.

Auf einer Fläche ist eine beliebige Linie gegeben. Man denke sich eine Tangentialebene, welche so über die Fläche hingleitet, daß die auf einander folgenden Berührungspunkte auf der Linie liegen. Der Durchschnitt von irgend zwei aufeinander folgenden Tangentialebenen und die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte sind konjugirte Tangenten der Fläche. Diese Verbindungslinie ist eine Tangente der gegebenen Linie. Die Durchschnitte von je zwei auf einander folgenden Tangentialebenen bilden zusammen eine entwickelbare Fläche:

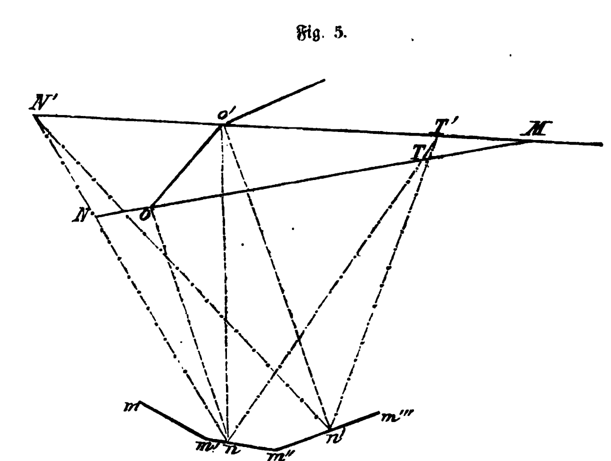
Die konjugirten Tangenten von irgend einer Linie auf einer Fläche bilden eine entwickelbare Fläche. Eine Krümmungslinie schneidet die Erzeugenden der von ihren konjugirten Tangenten gebildeten entwickelbaren Fläche senkrecht, also ist sie eine Evolvente ihrer Rückkehrkante. Die Krümmungslinien gehören zu derjenigen Klasse von Linien, welche durch die Eigenschaft charakterisirt sind, daß sie mit ihren konjugirten Tangenten einen konstanten Winkel bilden. Solche Linien schneiden also die Erzeugenden der von ihren konjugirten Tangenten gebildeten abwickelbaren Fläche unter

einem konstanten Winkel. Die Oskulationsebenen einer geodätischen Linie auf einer Fläche stehen senkrecht auf der letzteren; mithin stehen sie auch senkrecht auf der entwickelbaren Fläche, welche die konjugirten Tangenten der geodätischen Linie bilden; und hieraus folgt weiter, daß sie sich bei der Abwicklung dieser Fläche auf eine Ebene in eine Gerade verwandeln.

Eine geodätische Linie auf einer Fläche ist auch eine kürzeste oder geodätische Linie auf der von ihren konjugirten Tangenten gebildeten entwickelbaren Fläche, und verwandelt sich bei der Abwicklung der letzteren auf eine Ebene in eine Gerade.

Es seien m, m′, m″, m‴ vier auf einander folgende Punkte einer Krümmungslinie auf einer Fläche; n ist die Mitte des Elements m′m″ und n′ die Mitte des Elements m″m‴. o ist der Mittelpunkt des durch die drei Punkte mm′m″ gehenden Krümmungskreises und o′ der Mittelpunkt des durch die Punkte m′m″m‴ gehenden Krümmungskreises. Die in o auf der Oskulationsebene mm′m″ und in o′ auf der Oskulationsebene m′m″m‴ errichteten Perpendikel schneiden sich in M, also ist M der Mittelpunkt der durch die Punkte mm′m″m‴ gehenden Krümmungskugel. Die Gerade oM ist die *Polare* von n und die Gerade o′M die *Polare* von n′; man kann auch sagen, daß oM und o′M die *Polaren der Elemente* m′m″ und m″m‴ sind. Die Ebene noo′M ist die Normalebene des Elements m′m″, also enthält sie nicht blos die Normale der Fläche, sondern auch die konjugirte Tangente des Elements m′m″ der Krümmungslinie; letztere ist zugleich die Tangente der zweiten durch n gehenden auf m′m″ senkrechten Krümmungslinie. Die Polare oM, oder ihre Verlängerung, werde von der Flächennormale nN im Punkt N und von der konjugirten Tangente des Elements m′m″ in T geschnitten. Ferner werde die Polare o′M, oder ihre Verlängerung, von der Flächennormale n′N′ in N′ und von der konjugirten Tangente des Elements m″m‴ in T′ geschnitten. Da nun die beiden Normalebenen der Fläche noo′M und n′o′M sich in der Polare o′M schneiden, so liegt auf diesem Durchschnitt sowohl der der Normale n′N′ entsprechende Krümmungsmittelpunkt der Fläche als auch der Durchschnitt der zwei auf einander folgenden konjugirten Tangenten nT und n′T′; der Krümmungsmittelpunkt ist also N′ und der Durchschnitt von nT und n′T′ ist T′. Hierin ist folgender Satz enthalten:

Fig. 5.



11. *Die Polare eines Elements der Krümmungslinie auf einer Fläche enthält den diesem Element entsprechenden Krümmungsmittelpunkt der Fläche, und den Durchschnittspunkt von zwei auf einander folgenden konjugirten Tangenten der Krümmungslinie.*

$o'N' \cdot o'T' = \overline{n'o'}^2$, weil der Winkel $N'n'T'$ ein Rechter ist; $n'o'$ ist der Krümmungshalbmesser der Krümmungslinie für den Punkt n' oder das Element $m''m'''$. D. h.:

12. Das Produkt des Abstands des Krümmungsmittelpunkts einer Fläche, welcher einem Element ihrer Krümmungslinie entspricht, und des Durchschnitts von zwei konjugirten Tangenten dieses Elements von der Oskulationsebene ist gleich dem Quadrat des Krümmungshalbmessers der Krümmungslinie.

Sämmtliche konjugirte Tangenten einer Krümmungslinie bilden eine entwickelbare Fläche. Die beiden konjugirten Tangenten nTT' und $n'T'$ schneiden sich in T'; ebenso läßt sich zeigen, daß der Durchschnitt von nT und der unmittelbar vorhergehenden konjugirten Tangente des Elements mm' der Punkt T ist. Also ist TT' ein Element der Rückkehrkante dieser entwickelbaren Fläche. Dieses Element liegt aber auch auf der Ebene oMo', welche durch zwei auf einander folgende Polaren oM und $o'M$ der Elemente $m'm''$ und $m''m'''$ gebildet ist. Sämmtliche Polaren irgend einer Kurve doppelter Krümmung, also auch einer Krümmungslinie, bilden eine entwickelbare Fläche:

Die Rückkehrkante der von den konjugirten Tangenten einer Krümmungslinie gebildeten entwickelbaren Fläche liegt auf der entwickelbaren Fläche der Polaren der Krümmungslinie.

Die Flächennormalen nN und $n'N'$ schneiden sich in N' auf der Polare $o'M$; ebenso kann man nachweisen, daß der Durchschnitt von nN und der vorhergehenden Flächennormale, welche dem Element mm' entspricht, in N auf der Polare oM ist; somit ist NN' ein Element der Rückkehrkante der von den auf einander folgenden Flächennormalen, deren Fußpunkte die Krümmungslinie $mm'm''m'''$ bilden, erzeugten entwickelbaren Fläche. Wir haben somit einen dem vorigen ganz analogen Satz:

Die Rückkehrkante der entwickelbaren Fläche, welche diejenigen Normalen einer Fläche bilden, deren Fußpunkte auf einer Krümmungslinie sind, liegt auf der Fläche der Polaren der Krümmungslinie.

Die Ebene $nT'n'$ enthält die Gerade nn', welche man als senkrecht auf der Ebene oMo' betrachten kann, mithin steht die Ebene $nT'n'$ selbst senkrecht auf oMo'; da nun nT' und $n'T'$ zwei auf einander folgende Tangenten der Rückkehrkante auf der entwickelbaren Fläche sind, welche die konjugirten Tangenten der Krümmungslinie $mm'm''m'''$ bilden, so ist die Ebene $nT'n'$ eine Oskulationsebene dieser Rückkehrkante; die Oskulationsebenen letzterer Linie stehen demnach senkrecht auf den Tangentialebenen der Fläche der Polaren, woraus folgt:

13. Die Rückkehrkante der von den konjugirten Tangenten einer Krümmungslinie gebildeten entwickelbaren Fläche ist eine geodätische Linie auf der Fläche der Polaren.

Ganz analog läßt sich der Beweis dieses Satzes führen:

14. Die Rückkehrkante der entwickelbaren Fläche, welche diejenigen Normalen einer Fläche bilden, deren Fußpunkte auf einer Krümmungslinie liegen, ist auf der Fläche der Polaren der Krümmungslinie eine geodätische Linie.

Wir haben also auf der entwickelbaren Fläche der Polaren irgend einer Krümmungslinie zwei geodätische Linien; die eine enthält die Durchschnitte von je zwei auf einander folgenden konjugirten Tangenten der Krümmungs-

linie; die andere die Durchschnitte von je zwei auf einander folgenden Normalen der Fläche, oder die Krümmungsmittelpunkte, welche den durch die Tangenten der Krümmungslinie gehenden Normalschnitten der Fläche entsprechen. Da der Winkel T'n'N' ein Rechter ist, so schneiden die Linien n'T' und n'N' die Gerade T'o'N' so, daß die Differenz der beiden Winkel ein Rechter ist, oder auch, die Tangenten der beiden geodätischen Linien, wovon soeben die Rede war, bilden mit einer Erzeugenden der entwickelbaren Fläche, auf welcher sie liegen, Winkel, die um 90° verschieden sind.

Wir wollen als ersten speziellen Fall eine ebene Krümmungslinie annehmen. Die Fläche der Polaren ist alsdann ein Cylinder, welcher die Ebene der Krümmungslinie senkrecht trifft; die beiden, von den konjugirten Tangenten der Krümmungslinie und von den Flächennormalen, deren Fußpunkte auf der Krümmungslinie liegen, erzeugten geodätischen Linien sind also Schraubenlinien; und da die Tangenten einer Schraubenlinie mit der Grundfläche des Cylinders, auf dem sie sich befinden, einen konstanten Winkel bilden, so haben wir wieder den Satz von Joachimsthal, daß die Normalen einer Fläche längs einer ebenen Krümmungslinie, oder was dasselbe ist, die Tangentialebenen mit der Ebene einer solchen Krümmungslinie einen konstanten Winkel bilden.

Wenn aber die Krümmungslinie sphärisch ist, so bilden ihre Polaren, welche alle durch den Mittelpunkt der Kugel gehen müssen, auf welcher die Krümmungslinie liegt, einen Kegel; die konjugirten Tangenten der letzteren und die Flächennormalen berühren diesen Kegel ebenfalls in geodätischen Linien, und da diese Linien bei der Abwicklung des Kegelmantels in eine Ebene sich in Gerade verwandeln müssen, so folgt daraus, daß das von der Spitze des Kegels oder dem Mittelpunkt der Kugel auf diese Gerade gefällte Perpendikel so groß ist, als irgend ein von der Spitze auf eine Tangente der geodätischen Linie herabgelassenes Perpendikel, welche entsteht, wenn die Ebene mit der in ihr liegenden festen Geraden wieder auf die Kegelfläche aufgerollt wird, d. h. alle Tangenten einer geodätischen Linie auf einem Kegel sind gleichweit von der Spitze desselben entfernt; sie umhüllen eine concentrische Kugel und bilden in der vorhin genannten Kugel solche Sehnen, welche vermöge ihrer konstanten Entfernung vom Mittelpunkt unter einander gleich sind. Alle gleich lange Sehnen einer Kugel schneiden dieselbe unter einem konstanten Winkel, oder auch, sie bilden mit jeder durch ihren Endpunkt gehenden Tangentialebene der Kugel einen konstanten Winkel. Wir können Vorstehendes so zusammenfassen:

15. **Wenn eine Krümmungslinie sphärisch ist, so bilden ihre konjugirten Tangenten sowohl als auch die Normalen der Fläche, deren Fußpunkte auf dieser Krümmungslinie liegen, Sehnen von konstanter Größe in der Kugel, welche die Krümmungslinie enthält.** Diese Kugel schneidet die Fläche überall unter konstantem Winkel.

Die Ebene n'o'M geht durch den Mittelpunkt M der Kugel, also liegen die beiden Sehnen von konstanter Größe in einer Diametralebene derselben, die Summe ihrer Quadrate ist sohin gleich dem Quadrat des Durchmessers der Kugel.

Da sich die Normalen nN und n'N' in N' schneiden, so machen beide mit der Oskulationsebene m'm''m''' der Krümmungslinie mm'm''m''' gleiche Winkel, und da die Krümmungshalbmesser on und o'n in der Normalebene Nnoo'M liegen, so ist der Winkel α, welchen die Normale nN mit der Oskulationsebene mm'm'' bildet, gleich Nno. Andererseits ist der Winkel β,

welchen die Normale n'N' mit der Oskulationsebene m'm''m''' macht, gleich N'n'o' = Nno'; mithin $\beta - \alpha$ = Nno' — Nno = ono; dieß ist aber der Winkel zwischen zwei auf einander folgenden Oskulationsebenen der Krümmungslinie; man hat also nachstehenden Satz (von Liouville):

16. Längs einer Krümmungslinie auf einer Fläche ist die unendlich kleine Veränderung des Winkels zwischen der Flächennormale und der Oskulationsebene, oder was dasselbe ist, zwischen der Tangentialebene und der Oskulationsebene von einem Element zum andern gleich dem Winkel zwischen beiden Oskulationsebenen.

Dieser Satz enthält wieder als speziellen Fall in sich, daß bei einer ebenen Krümmungslinie die Fläche von dieser Ebene überall unter demselben Winkel geschnitten wird, denn bei einer ebenen Kurve fallen alle Oskulationsebenen zusammen; also ist auch der Winkel zwischen der Flächennormale und der Oskulationsebene konstant.

Wir wollen nun annehmen, die Linie mm'm''m''' sei die Durchschnittslinie von zwei sich rechtwinklig und in einer Krümmungslinie schneidenden Flächen, so gelten auch die vorhergehenden Demonstrationen, nur mit der Veränderung, daß die konjugirten Tangenten nT und n'T' nun zugleich Normalen der zweiten Fläche sind, und daß ihre auf einander folgenden Durchschnittspunkte Krümmungsmittelpunkte der letzteren Fläche werden. Wir können also folgende Sätze anführen:

17. Bei zwei sich rechtwinklig und in einer Krümmungslinie schneidenden Flächen ziehe man eine Tangente an die gemeinschaftliche Durchschnitts- oder Krümmungslinie; durch diese Tangente gehen zwei Normalebenen, in jeder derselben liegt der Krümmungsmittelpunkt des betreffenden Normalschnitts. Die Verbindungslinie dieser beiden Krümmungsmittelpunkte ist die Polare der Durchschnittskurve. Das Produkt der Entfernungen derselben von der Oskulationsebene der letzteren ist gleich dem Quadrat ihres Krümmungshalbmessers.

Die Normalen einer beliebigen Fläche (λ) berühren die beiden Mäntel der Fläche der Krümmungsmittelpunkte (α) und (β) zugleich, (α) und (β) schneiden sich in der gemeinschaftlichen Krümmungslinie K orthogonal (§. 15). Diejenigen Normalen von (λ), deren Fußpunkte eine Krümmungslinie L dieser Fläche sind, bilden auf (α) eine geodätische Linie, deren konjugirte Tangenten die Polaren von L sind. Wir haben nämlich oben nachgewiesen, daß die auf einander folgenden Durchschnitte dieser Normalen auf der Fläche der Polaren von L liegen, und daß sie hier eine geodätische Linie bilden. Die entwickelbare Fläche, deren Erzeugende die Normalen von (λ) sind, schneidet somit nicht blos (α), sondern auch die Fläche der Polaren von L senkrecht, also ist die genannte geodätische Linie eine gemeinschaftliche Berührungslinie der zwei letzteren Flächen; und hieraus folgt auch, daß die Polaren von L konjugirte Tangenten der geodätischen Linie auf (α) sind. Da wo diese Linie K berührt, trifft die Tangente von K (λ) in einem Nabelpunkt, und hier stehen auch die konjugirten Tangenten von K hinsichtlich der Flächen (α) und (β) auf einander senkrecht, und also auch die Polaren der durch den Nabelpunkt gehenden Krümmungslinie von (λ). Wir haben also den Satz:

18. Die Polaren der Krümmungslinie einer Fläche sind die konjugirten Tangenten einer geodätischen Linie auf der Fläche der

Krümmungsmittelpunkte; die Polaren der beiden durch einen Nabelpunkt gehenden Krümmungslinien stehen auf einander senkrecht. Die Polaren der zwei durch jeden andern Punkt der gegebenen Fläche gehenden Krümmungslinien schneiden sich schief.

Hier reiht sich die Uebertragung verschiedener Sätze auf die Polaren und geodätischen Linien an, welche den Krümmungslinien entsprechen (Dr. W. Schell: Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung, S. 31).

§. 17. Die Linien auf den Flächen. Schluß.

A ist ein beliebiger Punkt auf einer Fläche, von welchem aus zwei gleich lange geodätische Linien gezogen sind, Am und Am', die bei A einen unendlich kleinen Winkel bilden, so muß der Winkel mm'A ein Rechter sein. Denn wäre er schief und größer als der Winkel bei m, so könnte man m'm'' so ziehen, daß Winkel mm'm'' = 90 Grad wäre; in dem unendlich kleinen Dreieck mm'm'' wäre mm'' die Hypotenuse, also größer als m'm'', mithin $Am'' + m''m' < Am'' + m''m < Am < Am'$ oder kleiner als die kürzeste Linie zwischen A und m', was nicht möglich ist. Hierauf beruht folgender Satz von Gauß: (Disquisitiones generales circa superficies curvas, Seite 528 in der fünften Auflage des Werks: Monge, application de l'analyse à la géométrie)

Fig. 7.

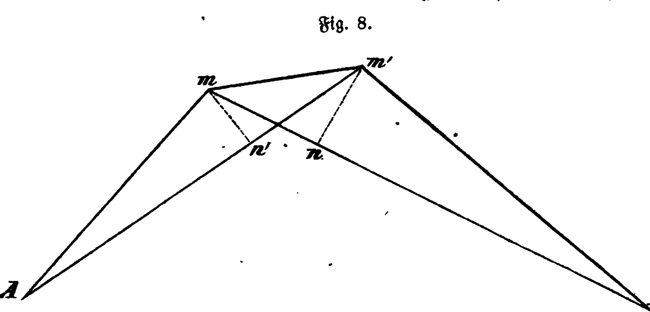
Wenn man von einem Punkt auf einer Fläche unendlich viele gleich lange geodätische Linien zieht, so schneiden sie die Verbindungslinie ihrer Endpunkte rechtwinklig.

Dieser Satz läßt sich umkehren:

Alle von einem Punkt einer Fläche ausgehenden geodätischen Linien, welche die Verbindungslinie ihrer Endpunkte rechtwinklig treffen, sind gleich lang. Denn wäre z. B. $Am > Am'$, so könnte man auf Am einen Punkt m'' annehmen, so daß $Am'' = Am'$ wäre. Dann müßte nach dem vorigen Satz Winkel m''m'A ein Rechter sein, was der Voraussetzung widerspricht.

A und B sind zwei feste Punkte auf einer Fläche; mm' ist ein Element einer Kurve der Fläche, welche die Eigenschaft hat, daß die Summe der von einem Punkt derselben nach A und B gezogenen geodätischen Linien konstant ist; also $Am + Bm = Am' + Bm'$. Hieraus folgt $Bm - Bm' = Am' - Am$. Wir nehmen auf Am' den Punkt n' und auf Bm den Punkt n an, so daß $An' = Am$ und $Bn = Bm'$ ist; man ziehe mn' und m'n, so sind nach dem Vorhergehenden die Winkel

Fig. 8.



mn'm und mnm' Rechte; ferner sind die Differenzen mn und m'n' gleich, also haben die unendlich kleinen rechtwinkligen Dreiecke zwei Seiten gleich, mithin sind sie kongruent, woraus die Gleichheit der Winkel mm'A und m'mB folgt. Hierauf beruht der Satz:

Wenn eine Kurve auf einer Fläche die Eigenschaft hat, daß die Summe der von einem Punkt derselben nach zwei festen Punkten der Fläche gezogenen geodätischen Linien konstant ist, so schneiden die letzteren die Kurve unter gleichen Winkeln.

Nehmen wir aber umgekehrt an, es sei vorausgesetzt, die Winkel mm'A und m'mB sollen gleich sein, so ziehen wir mn' und m'n senkrecht auf Am' und Bm; dann haben die rechtwinkligen Dreiecke mm'n' und mm'n die Hypotenuse und die Winkel gleich, sind somit kongruent, also ist mn = m'n'. Nun ist Am = An' und Bn = Bm' also auch Am' — Am = Bm — Bm' oder Am + Bm = Am' + Bm'.

Wenn auf einer Fläche eine Kurve gegeben ist, welche die Eigenschaft hat, daß die von einem Punkt derselben nach zwei festen Punkten der Fläche gezogenen geodätischen Linien mit der Kurve gleiche Winkel bilden, so ist die Summe dieser Linien für jeden Punkt der Kurve konstant.

Die beiden vorhergehenden Sätze behalten ihre Richtigkeit, wenn man statt Summe „Differenz" setzt und annimmt, daß die Kurve den von beiden geodätischen Radienvektoren gebildeten Winkel halbirt. Da der Beweis ganz analog dem früheren ist, so braucht er nicht angeführt zu werden. Wir haben also folgende Sätze:

Auf einer Fläche sind zwei feste Punkte und eine Kurve gegegeben. Wenn der Winkel, welchen die von einem Punkt der Kurve nach den festen Punkten gezogenen geodätischen Radienvektoren mit einander bilden, von der Kurve halbirt wird, so ist die Differenz dieser Radien konstant, und umgekehrt.

Wir verbinden die festen Punkte A und B durch eine geodätische Linie, ziehen durch die Mitte derselben eine zweite geodätische Linie auf der Fläche, welche sie senkrecht trifft. Durch einen beliebigen Punkt m der Fläche ziehen wir die geodätischen Linien mA und mB; es sei $mA + mB = 2\mu$; $mA - mB = 2\nu$, so liegt m auf dem Durchschnitt zweier Kurven. Die erste entspricht der Gleichung $\mu = \text{const.}$ und die andere der Gleichung $\nu = \text{const.}$ Es folgt aus dem Vorhergehenden unmittelbar, daß diese Kurven, welche wir mit (μ) und (ν) bezeichnen, sich in m senkrecht schneiden, weil die erste den Nebenwinkel der in m zusammentreffenden geodätischen Linien, die andere diesen Winkel selbst halbirt. Die Linie (μ) treffe die Verlängerung der geodätischen Axe AB in M; C sei die Mitte von AB, so ist $CM = (\mu)$; die Linie (ν) trifft AB selbst im Punkt N, $CN = \nu$; die Größen μ und ν können wir die Parameter der Kurven (μ) und (ν) nennen. Durch beliebige Veränderung dieser Parameter erhält man zwei Systeme von orthogonalen Kurven, welche die Fläche in unendlich kleine Rechtecke oder Quadrate theilen. Jeder Punkt der Fläche ist bestimmt, wenn die Parameter μ und ν der durch ihn gezogenen Linien (μ) und (ν) gegeben sind; somit können die Größen μ und ν als krummlinige Coordinaten (coordonnées curvilignes) des Punkts angesehen werden. Bei diesem Coordinatensystem haben die Kurven (μ) und (ν) die einfachste Gleichung; nämlich $\mu = \text{const.}$ $\nu = \text{const.}$

Um bestimmte Anhaltspunkte zu geben, mögen drei verschiedene Fälle angeführt werden:

1. Die gegebene Fläche ist eine Ebene; dann sind die geodätischen Linien mA und mB Gerade, und die Kurven (μ) sind Ellipsen, die Kurven (ν) Hyperbeln, A und B sind die gemeinschaftlichen Brennpunkte dieser Kegelschnitte, weßhalb dieselben homofokal genannt werden. Hieher gehört auch der Fall, wo die gegebene Fläche entwickelbar ist. Die Kurven (μ) und (ν) verwandeln sich bei der Abwicklung der Fläche in eine Ebene ebenfalls in homofokale Kegelschnitte.

2. Die Fläche ist eine Kugel. Die Kurven (μ) und (ν) sind sphärische Kegelschnitte, deren Brennpunkte A und B sind, und die deßhalb gleichfalls homofokal heißen. Die geodätischen Linien sind größte Kreise der Kugel; wenn man durch die Brennpunkte eines sphärischen Kegelschnitts zwei solche Kreise zieht, die sich auf dem Kegelschnitt schneiden, so bilden sie mit den Kurven gleiche Winkel, und die Summe ihrer Bögen ist konstant.

3. Die Fläche ist ein Ellipsoid oder ein zweimantliges Hyperboloid. Die Kurven (μ) und (ν) sind die Krümmungslinien der Fläche, die Brennpunkte A und B sind die Nabelpunkte.

Wie wir später sehen werden, haben zwei durch die Nabelpunkte eines Ellipsoids oder zweimantligen Hyperboloids gezogene geodätische Linien die Eigenschaft, daß sie mit der Krümmungslinie, auf welcher sie sich schneiden, gleiche Winkel bilden, und hieraus folgt nach unseren Sätzen, daß die Summe oder Differenz dieser geodätischen Linien für alle Punkte einer Krümmungslinie konstant und gleich 2μ oder 2ν ist. Bei der Summe schließt die Krümmungslinie beide Nabelpunkte ein, und bei der Differenz trennt sie diese Punkte. Es seien A B B′ drei Nabelpunkte eines Ellipsoids. C ist die Mitte des Bogens AB und C′ diejenige von BB′. Durch einen beliebigen Punkt M der Fläche geht eine Krümmungslinie, welche den Bogen C′B in N trifft. $CN = \mu$, $C'N = \nu$; MA, MB, MB′ sind geodätische Linien; nun ist

$$MA + MB = 2\mu = 2CN;\ MB' - MB = 2\nu = 2C'N; \text{ also}$$
$$MA + MB' = 2(\mu + \nu) = 2(CN + C'N) = \text{Bogen } ABB'$$

In dieser Gleichung ist folgendes Theorem, welches Mich. Roberts zuerst aus der Liouville'schen Gleichung für geodätische Linien auf dem Ellipsoid ableitete, enthalten:

Alle geodätische Linien zwischen zwei Nabelpunkten eines Ellipsoids sind gleich lang.

Unter allen geodätischen Linien, welche sich von einem Punkt auf einer Fläche nach einer Kurve ziehen lassen, ist diejenige die kürzeste, welche dieselbe rechtwinklig schneidet, und umgekehrt.

Denn würde die Minimumslinie die Kurve schief schneiden, so ließe sich im Durchschnittspunkt ein unendlich kleines rechtwinkliges Dreieck bilden, mm′m″; die Hypotenuse mm′ wäre ein Element der kürzesten geodätischen Linie, und mm″ ein Element der Kurve. Nun würde der Weg über m′ nach m länger sein, als derjenige über m′ nach m″, was der Voraussetzung widerspricht, mithin kann die kürzeste geodätische Linie die gegebene Kurve nicht schief schneiden. Die Converse läßt sich auf ähnliche Art beweisen.

Wenn man auf einer Fläche unendlich viele gleich lange geodätische Linien zieht, welche eine gegebene Kurve senkrecht schneiden, so treffen sie die Verbindungslinie ihrer Endpunkte rechtwinklig. (Gauss: disquisitiones.)

Es sei nn' ein Element der gegebenen Kurve, und nm gleich $n'm'$ sind zwei gleich lange geodätische Linien. Wäre der Winkel bei m' schief, so ziehe man mm'' senkrecht auf mm'. Nun ist $m'm''$ als Hypotenuse größer als die Cathete mm'', mithin wäre $m'm'' + m''n' > mm'' + m''n'$; aber $m'm'' + m''n'$ ist gleich mn, also auch $mn > mm'' + m''n'$, was dem vorigen Satz widerspricht, da mn die kürzeste Linie ist, die sich von m nach der gegebenen Kurve ziehen läßt. Ganz leicht ist der Beweis der Umkehrung:

Alle geodätische Linien einer Fläche, welche zwei gegebene Kurven senkrecht treffen, sind zwischen diesen Kurven von gleicher Länge.

Auf den Flächen gibt es gewisse Kurven, welche die Eigenschaft haben, daß alle geodätische Linien, welche durch die verschiedenen Punkte ihres Umfangs senkrecht auf demselben gezogen werden, sich in einem Punkte schneiden. Solche Linien sollen der Kürze wegen Mittelpunktskurven genannt werden. Dieß vorausgesetzt, seien auf einer Fläche ein fester Punkt A, eine Kurve C und eine Mittelpunktskurve M gegeben. Zieht man von irgend einem Punkte c auf C geodätische Linien, cA und cm, wovon die letztere M rechtwinklig trifft in m, und wird der Winkel zwischen cA und cm von der Tangente der Kurve C halbirt, so ist $cA - cm = \text{const.}$, denn cm geht verlängert durch den Mittelpunkt B von M; nach dem Früheren ist $cB - cA = \text{const.}$, und da alle Radien Bm von M einander gleich sind, so ist auch $cA - cm = \text{const.}$ Jeder Krümmungslinie auf einem Ellipsoid oder zweimantligen Hyperboloid entspricht z. B. eine Mittelpunktskurve. Sind A und B die Nabelpunkte der Fläche, ist m ein Punkt der Krümmungslinie, ferner $Am + Bm = 2\mu$ oder $Am - Bm = 2\nu$, so sind die von A und B mit den geodätischen Halbmessern 2μ beziehungsweise 2ν beschriebenen Kurven die Mittelpunktskurven der Krümmungslinie; jeder Punkt der letzteren hat die Eigenschaft, daß die von ihm nach A oder B gezogenen geodätischen Linien so lang sind, als die nach der Mittelpunktskurve gezogenen geodätischen Minimumslinien. Das elliptische Paraboloid hat zwei Nabelpunkte A und A'; die beiden andern sind unendlich ferne Punkte. Alle von A oder A' ausgehenden geodätischen Linien gehen nach diesen unendlich fernen Nabelpunkten hin. Betrachtet man z. B. eine derjenigen Mittelpunktskurven, deren geodätische Halbmesser in A konvergiren, d. h. eine solche Linie, welche alle von A ausgehenden geodätischen Linien senkrecht schneidet, so findet man, daß derselben eine Krümmungslinie der Fläche entspricht; zieht man also von einem Punkt c der letztern die geodätischen Linien cA und cm (in m wird die genannte Mittelpunktskurve senkrecht geschnitten), so ist im Allgemeinen $cA - cm = \text{const.}$ für alle Punkte der Krümmungslinie. Bei einer besonderen Mittelpunktskurve ist die const. gleich Null, also $cA = cm$; zu dieser Kurve steht die Krümmungslinie in einer ähnlichen Beziehung, wie die Parabel zu ihrer Direktrice. Die Tangente der Krümmungslinie halbirt den Winkel der geodätischen Linien cA und cm.

Auf einer Fläche sind zwei Kurven gegeben, welche sich in A schneiden; alle diejenigen Punkte, deren geodätische Entfernungen von beiden Kurven gleich sind, liegen auf einer Linie, welche den Winkel in A halbirt. Es sei ABC ein von drei beliebigen Kurven auf einer Fläche gebildetes Dreieck. Durch die Ecken gehen drei Linien, welche die Eigenschaft haben, daß jeder ihrer Punkte von den beiden in einer solchen Ecke zusammenstoßenden Seiten gleichweit entfernt ist, d. h. daß die geodätischen Minimumslinien, die sich von

dem Punkte nach diesen Seiten ziehen lassen, einander gleich sind. Man erhält also drei Linien, welche die Winkel bei A, B, C halbiren, und einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt haben. Dieß ist der Mittelpunkt der die drei Seiten von A B C berührenden Mittelpunktskurve.

A und B sind zwei feste Punkte auf einer Fläche. Alle diejenigen Punkte, deren geodätische Entfernungen von A und B einander gleich sind, liegen auf einer Kurve, welche die geodätische Linie in ihrer Mitte senkrecht schneidet. Diese Kurve gehört zur Klasse derjenigen Linien, welche wir oben betrachtet haben, und bei welcher die Differenz der geodätischen Entfernungen eines ihrer Punkte von zwei festen Punkten konstant ist. In dem hier betrachteten speziellen Fall ist diese Differenz gleich Null. Um auf einer Fläche einen Punkt zu finden, der von drei gegebenen Punkten A, B, C gleich weit entfernt ist, konstruirt man drei Linien, bei welchen jeder Punkt gleichweit absteht von A und B, von A und C und von B und C. Diese drei Linien haben einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt, welcher zugleich Mittelpunkt der um das Dreieck ABC beschriebenen Mittelpunktskurve ist.

Wenn man sämmtliche geodätische Linien zieht, welche irgend eine Kurve C auf einer Fläche senkrecht schneiden, so berühren dieselben eine zweite Kurve C', zu welcher C in derselben Beziehung steht, wie eine Linie in der Ebene zu ihrer Evolute. Ein Faden, welcher so über die Fläche gespannt ist, daß er fortwährend C' berührt, beschreibt bei der Abwicklung mit einem seiner Punkte die gegebene Kurve C. Jeder einzelne Punkt des Fadens beschreibt bei dieser Bewegung wieder eine andere Kurve, welche alle mit C parallel sind, d. h. alle geodätischen Linien, die zwischen solchen parallelen Kurven senkrecht auf die Eine gezogen werden, sind an Länge gleich und schneiden auch die andere senkrecht. Diese parallelen Kurven in Verbindung mit den sie senkrecht kreuzenden geodätischen Linien bilden zwei orthogonale Systeme von Kurven, welche zur Bestimmung der Punkte auf der Fläche dienen können, wie auf der Ebene zwei sich senkrecht kreuzende Systeme von Linien zur Bestimmung der Lage von Punkten angewandt werden.

Wir können zu diesem Zweck eine der parallelen Kurven als die erste Coordinatenaxe, und eine der auf ihr senkrechten geodätischen Linien als die andere Coordinatenaxe betrachten. Beide Axen sollen sich in O schneiden; wir bezeichnen sie mit OX und OY; ein Punkt (x, y) auf der Fläche ist bestimmt, wenn die Größen x und y gegeben sind; y ist die kürzeste geodätische Entfernung des Punkts von der Kurve oder Axe OX und x ist der Bogen von OX zwischen dem Durchschnittspunkt dieser sie senkrecht treffenden geodätischen Linie und zwischen dem Ursprung O. Die Gleichungen der auf OX senkrechten geodätischen Linien haben die Form

$$x = \text{const.}$$

und die Gleichungen der mit der Axe OX parallelen Kurven sind

$$y = \text{const.}$$

Ein spezieller Fall dieser Coordinatensysteme, welcher den Polarcoordinaten der Ebene entspricht, ist derjenige, wo die Parallelkurven Mittelpunktskurven sind; dann convergiren die sie orthogonal schneidenden geodätischen Linien in einem Punkte. Es sei O dieser Punkt, und Ox diejenige geodätische Linie, welche als Axe angenommen wird. Ein beliebiger Punkt M der Fläche ist bestimmt durch die Länge OM des geodätischen Radiusvektor, auf welchem er liegt, und durch den Winkel ω, welchen derselbe bei O mit der Axe Ox bildet.

$$\omega = \text{const.}$$
ist die Gleichung aller in O convergirenden geodätischen Linien.
$$r = \text{const.}$$
ist die Gleichung derjenigen Mittelpunktskurven der Fläche, deren gemeinschaftlicher Mittelpunkt O ist.

§. 18. Zusammenstellung von Formeln für die Flächen zweiten Grads.

A. Die drei centrischen Flächen, das Ellipsoid, das einmantlige Hyperboloid, das zweimantlige Hyperboloid.

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Dieß sind die Gleichungen dieser Flächen. Wir setzen, wie oben, die partiellen Ableitungen
$$\frac{dz}{dx} = p,\ \frac{dz}{dy} = q,\ \frac{d^2z}{dx^2} = r,\ \frac{d^2z}{dxdy} = s,\ \frac{d^2z}{dy^2} = t$$
und erhalten

2. $p = -\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z};\ q = -\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z};\ r = -\frac{c^4}{a^2b^2z^3}(b^2-y^2);\ s = -\frac{c^4}{a^2b^2z^3}xy;$
$t = -\frac{c^4}{a^2b^2z^3}(a^2-x^2)$ für das Ellipsoid.

3. $p = +\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z};\ q = +\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z};\ r = -\frac{c^4}{a^2b^2z^3}(b^2-y^2);\ s = -\frac{c^4}{a^2b^2z^3}xy;$
$t = -\frac{c^4}{a^2b^2z^3}(a^2-x^2)$ für das einmantlige Hyperboloid.

4. $p = +\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z};\ q = \frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z};\ r = -\frac{c^4}{a^2b^2z^3}(b^2+y^2);\ s = +\frac{c^4}{a^2b^2z^3}xy;$
$t = +\frac{c^4}{a^2b^2z^3}(a^2-x^2)$ für das zweimantlige Hyperboloid.

Durch die Substitution dieser Werthe in die allgemeine Gleichung der Tangentialebene $z' - z = p(x' - z) + q(y' - y)$ ergibt sich

5. $\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 1;\ \frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - \frac{zz'}{c^2} = 1;\ \frac{xx'}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} - \frac{zz'}{c^2} = 1$

Dieß sind die Gleichungen der Tangentialebenen; x, y, z sind die laufenden Coordinaten und x', y', z' ist der Berührungspunkt. Betrachten wir nun in $z' - z = p(x' - x) + q(y' - y)$ $x'y'z'$ als die Coordinaten der Spitze eines Kegels, so stellt diese Gleichung eine Kegelfläche vor. Durch Substitution der Werthe von p und q aus 2., 3. und 4. erhält man genau die Gleichungen 5 wieder; und da letztere mit Hülfe von 1. gefunden wurden, so geht daraus hervor, daß wenn der Punkt $(x'y'z')$ nicht auf der Fläche liegt, sie sich auf diejenige Kurve beziehen, welche die Fläche und der durch diesen Punkt an sie gelegte Tangentialkegel gemein haben. Man sieht, daß diese Kurve eben ist; die Ebene, worin sie liegt, heißt die **Polarebene** des Punkts $(x'y'z')$, welcher **Pol** heißt. Wir haben somit den Satz:

Die Gleichungen 5 stellen die Tangentialebene des Punkts oder Pols $(x'y'z')$ dar, wenn er auf der Fläche liegt, und dessen Polarebene, wenn er nicht auf der Fläche liegt. Befindet sich der Pol

innerhalb der Fläche, so läßt sich kein Berührungskegel an die Fläche legen, dessen Spitze er ist; oder vielmehr, dieser Kegel wird imaginär. Allein die Gleichungen 5 stellen dessen ungeachtet reelle Ebenen vor, welche auch in diesem Fall die Polarebenen des Pols $(x'y'z')$ genannt werden.

Wenn wir nun annehmen, der Pol $(x'y'z')$ bewege sich auf einer Geraden, deren Gleichungen

6. $x' + \alpha z' = m\,;\; y' + \beta z' = n$

sind, so erhalten wir durch Verbindung der Formeln 5 und 6

$$\frac{mx}{a^2} + \frac{ny}{b^2} - \left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - \frac{z}{c^2}\right) z' = 1$$

Diese Gleichung ist von z' unabhängig, wenn $\frac{mx}{a^2} + \frac{ny}{b^2} - 1 = o$ und $\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - \frac{z}{c^2} = o$, oder, was dasselbe ist

7. $$x + \frac{n\frac{a^2}{c^2}}{\beta m - \alpha n} z = \frac{\beta a^2}{\beta m - \alpha n}\,;\quad y + \frac{m\frac{b^2}{c^2}}{\alpha n - \beta m} z = \frac{\alpha b^2}{\alpha n - \beta m}$$

Dieß ist die Gleichung einer Geraden, welche folgenden Satz enthält:

Bewegt sich der Pol auf einer Geraden, so schneiden sich die Polarebenen ebenfalls in einer Geraden; beide Gerade heißen konjugirt; zwei solche Gerade sind durch die Gleichungen 6 und 7 dargestellt; der Cosinus ihres Winkels ist gleich

8. $$\frac{\alpha n a^2 - \beta m b^2 + (\beta m - \alpha n)\, c^2}{\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2}\sqrt{n^2a^4 + m^2b^4 + (\beta m - \alpha n)\, c^4}}$$

Sollen zwei konjugirte Gerade senkrecht auf einander stehen, so muß

$$\alpha n a^2 - \beta m b^2 + (\beta m - \alpha n)\, c^2 = o$$

sein. Bei der Kugel, wo $a = b = c$ ist, erfüllt sich diese Bedingung von selbst, mithin stehen dort je zwei konjugirte Gerade auf einander senkrecht.

Wir wollen nun annehmen, der Pol $(x'y'z')$ bewege sich auf einer Ebene, deren Gleichung

9. $\alpha x' + \beta y' + \gamma z' = 1$

sei, durch Verbindung derselben mit 5. erhalten wir

$$\frac{x}{\alpha a^2} - 1 + \left(\frac{y}{b^2} - \frac{\beta x}{\alpha a^2}\right) y' + \left(\frac{z}{c^2} - \frac{\gamma x}{\alpha a^2}\right) z' = o$$

Soll diese Gleichung von y' und z' unabhängig sein, so muß

10. $x = \alpha a^2 \qquad y = \beta b^2 \qquad z = \gamma c^2$ sein.

Dieß ist die Gleichung eines Punkts und enthält folgenden Satz:

Bewegt sich der Pol auf einer Ebene, so gehen die Polarebenen durch einen Punkt.

Die Gleichung 9 läßt sich auch so schreiben $x' + \frac{\beta}{\alpha} y' + \frac{\gamma}{\alpha} z' = \frac{1}{\alpha}$ und statt 10. kann man setzen $\frac{y}{x} = \frac{\beta}{\alpha}\,\frac{b^2}{\alpha^2}\,;\; \frac{z}{x} = \frac{\gamma}{\alpha}\,\frac{c^2}{\alpha^2}$; wenn sich die Polarebene mit sich selbst parallel bewegt, so bleiben die Verhältnisse $\frac{\beta}{\alpha}$ und $\frac{\gamma}{\alpha}$ konstant, also auch die Brüche $\frac{y}{x}$ und $\frac{z}{x}$; hieraus schließt man:

Wenn sich die Polarebene parallel mit sich selbst bewegt, so liegen die Pole auf einer durch den Mittelpunkt gehenden Geraden.

$$11.\quad x = \frac{c^2}{a^2}\,\frac{x'}{z'}\,z + \frac{a^2 - c^2}{a^2}x' \qquad y = \frac{c^2}{b^2}\,\frac{y'}{z'}\,z + \frac{b^2 - c^2}{b^2}y'$$

$$12.\quad x = -\frac{c^2}{a^2}\,\frac{x'}{z'}\,z + \frac{a^2 + c^2}{a^2}x' \qquad y = -\frac{c^2}{b^2}\,\frac{y'}{z'}\,z + \frac{b^2 + c^2}{b^2}y'$$

$$13.\quad x = -\frac{c^2}{a^2}\,\frac{x'}{z'}\,z + \frac{a^2 + c^2}{a^2}x' \qquad y = \frac{c^2}{b^2}\,\frac{y'}{z'}\,z + \frac{b^2 - c^2}{b^2}y'$$

Diese Gleichungen beziehen sich auf die Normalen des Ellipsoids, des einmantligen und des zweimantligen Hyperboloids. x, y, z sind die laufenden Coordinaten, x', y', z' diejenigen des Fußpunkts der Normale auf der Fläche.

Setzen wir z. B. in der ersten Gleichung $z = 0$, so ist $\frac{x}{x'} = \frac{a^2 - c^2}{a^2}$ $=$ const., d. h.:

Bei einer centrischen Fläche zweiten Grades ist das Verhältniß der Abstände von einer Hauptebene derjenigen zwei Punkte einer Normale, wo sie die Fläche und eine andere Hauptebene trifft, konstant. Setzen wir noch $x' =$ const., so ist auch $x =$ const. oder:

Die Normalen, deren Fußpunkte eine zu einer Hauptebene parallele Kurve bilden, schneiden eine andere Hauptebene in einer Geraden, die zu der ersten parallel ist.

Die Entfernung der Ebene $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ vom Ursprung sei $= P$, so ist nach §. 1, 25 $P = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$. Mittelst der Gleichungen 5 dieses Paragraphs erhalten wir somit für die Entfernungen P der Tangentialebenen des Punkts x', y', z' der drei centrischen Flächen vom Ursprung

$$14.\quad P = \frac{1}{\sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4} + \frac{z'^2}{c^4}}}$$

Da aber die Gleichungen 5 zugleich die Polarebenen des Punkts (x', y', z') sind, wenn er nicht auf den Flächen liegt, so gibt der Werth von P in 14. auch das vom Mittelpunkt auf die Polarebene dieses Punkts oder Pols gefällte Perpendikel an, also:

Gegeben sind die drei Flächen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1; \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

wo die Größen a, b, c gleiche absolute Werthe haben.

Diese drei Flächen haben die Eigenschaft, daß ihre Polarebenen hinsichtlich eines Pols vom Mittelpunkt gleichweit abstehen.

Bewegt sich der Pol auf der Fläche $\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4} + \frac{z'^2}{c^4} = \frac{1}{k^2}$, so berührt die Polarebene die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = k^2$, wo k eine Konstante bedeutet.

Die Formeln 29 und 30 des §. 4 lauten

$$\frac{1}{R\,.\,R'} = \frac{g}{k^4} \qquad \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{h}{k^3}$$

R und R' sind die beiden Hauptkrümmungshalbmesser $k^2 = 1 + p^2 + q^2$, $g = rt - s^2$, $h = (1 + q^2)\,r + (1 + p^2)\,t - 2pqs$. Durch Hülfe der Gleichungen 2, 3, 4 erhalten wir für das Ellipsoid

$$k^2 = \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)\frac{c^4}{z^2} = \frac{c^4}{P^2z^2}$$

$$g = \frac{c^6}{a^2b^2z^4}$$

$$h = -\frac{c^4}{a^2b^2z^3}\,(a^2 + b^2 + c^2 - x^2 - y^2 - z^2)$$

Für das einmantlige Hyperboloid

$$k^2 = \frac{c^4}{P^2z^2} \qquad g = -\frac{c^6}{a^2b^2z^4}$$

$$h = \frac{c^4}{a^2b^2z^3}\,(a^2 - b^2 + c^2 - x^2 - y^2 - z^2)$$

Für das zweimantlige Hyperboloid

$$k^2 = \frac{c^4}{P^2z^2} \qquad g = \frac{c^6}{a^2b^2z^4} \qquad h = -\frac{c^4}{a^2b^2z^3}\,(a^2 - b^2 - c^2 - x^2 - y^2 - z^2)$$

Ellipsoid:

$$\frac{1}{RR'} = \frac{P^4}{a^2b^2c^2} \qquad \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = -\frac{P^3}{a^2b^2c^2}\,(a^2 + b^2 + c^2 - x^2 - y^2 - z^2)$$

$$15.\quad \frac{1}{R} = \frac{1}{2}\,\frac{P^2}{a^2b^2c^2}\left\{(a^2 + b^2 + c^2 - x^2 - y^2 - z^2)\,P \pm \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 - x^2 - y^2 - z^2)^2\,P^2 - 4a^2b^2c^2}\right\}$$

Die entsprechenden Relationen für das einmantlige Hyperboloid erhält man durch Veränderung des Zeichens von b^2 und für das zweimantlige Hyperboloid durch Veränderung des Zeichens von b^2 und c^2. Aus der Relation $\frac{1}{RR'} = \frac{P^4}{a^2b^2c^2}$ folgt der Satz: *In allen Punkten einer Poloide ist das Krümmungsmaß* (mensura curvaturae nach Gauß) *konstant.* Die Poloide ist diejenige Kurve, für welche P einen konstanten Werth hat; $\frac{1}{RR'}$ ist das Krümmungsmaß.

Die Gleichung der Krümmungslinien 22 in §. 4 heißt

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\Big((1 + q^2)\,s - pqt\Big) + \frac{dy}{dx}\Big\{(1 + q^2)\,r - (1 + p^2)\,t\Big\} - (1 + p^2)\,s + pqr = 0$$

Durch Hülfe der Werthe in 2., 3., 4 verwandelt sich diese Gleichung in folgende:

$$A\,yx\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^2 - Ay^2 - B)\,\frac{dy}{dx} - xy = 0$$

$A = \frac{a^2\,(b^2 - c^2)}{b^2\,(a^2 - c^2)}$ $\qquad B = \frac{a^2\,(a^2 - b^2)}{a^2 - c^2}$ für das Ellipsoid. Durch Differenziation:

$$\frac{d^2y}{dx^2}\left(2Axy\frac{dy}{dx}+x^2-Ay^2-B\right)+\left(A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1\right)\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)=o$$

eliminirt man aus den 2 letzten Gleichungen eine der Konstanten, so verschwindet auch die andere, und man erhält $xyd^2y + dy(xdy - ydx) = o$ Durch Integration

$$\frac{y}{x}\,dy = \beta dx$$

16. $y^2 = \beta x^2 + \gamma$

Dieß ist die Gleichung der Projektion der Krümmungslinien auf der xy Ebene.

Die Konstanten β und γ müssen folgender Gleichung genügen:

16. bis. $$-\frac{\frac{\gamma}{\beta}}{B} \pm \frac{\gamma}{\frac{B}{A}} = 1$$

Für das einmantlige Hyperboloid setzt man $-b^2$ statt b^2 und beim zweimantligen $-b^2$ und $-c^2$ statt b^2 und c^2 in den Werthen von A und B.

Die Relation 16 bis ergibt sich dadurch, daß man aus der Gleichung 16 und ihrem Differenzial $\frac{y}{x}dy = \beta dx$ die Werthe von y und $\frac{dy}{dx}$ in die obige Differenzialgleichung der Krümmungslinien setzt, wodurch auch x verschwindet.

Die Konstruktion dieser Linien, wie sie Monge für das Ellipsoid zuerst angegeben und ausführlich entwickelt hat, kann nun für alle centrische Flächen zweiten Grades keinem Anstand mehr unterliegen.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ und $\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 1$ sind die Gleichungen eines Ellipsoids und der Berührungsebene im Punkt (x', y', z'). Der mit ihr parallele Centralschnitt hat die Gleichung $\frac{x'\xi}{a^2} + \frac{y'\eta}{b^2} + \frac{z'\zeta}{c^2} = o$;

$x^2 + y^2 + z^2 = D^2$ ist die Gleichung einer concentrischen Kugel, also

17. $$\frac{\xi^2}{a^2}(a^2-D^2) + \frac{\eta^2}{b^2}(b^2-D^2) + \frac{\zeta^2}{c^2}(c^2-D^2) = o$$

diejenige eines concentrischen Kegels, welcher mit dem Ellipsoid und der Kugel eine Durchschnittslinie gemeinschaftlich hat. Dieser Kegel schneidet den Diametralschnitt in zwei Geraden, welche einander gleich sind und symmetrisch gegen die Axen dieses Schnitts liegen. In dem speziellen Fall, wo die Kegelfläche den elliptischen Centralschnitt berührt, fallen diese Geraden in eine zusammen, welche die Axe der Ellipse ist. Die Gleichung der Berührungsebene des Kegels im Punkt $(\xi, \eta, \zeta,)$ ist

$$\xi\xi'\frac{a^2-D^2}{a^2} + \eta\eta'\frac{b^2-D^2}{b^2} + \zeta\zeta'\frac{c^2-D^2}{c^2} = o$$

wo ξ', η', ζ' die laufenden Coordinaten sind. Diese Gleichung muß mit derjenigen des Centralschnitts identisch sein, also

18. $$\frac{x'^2}{a^2(a^2-D^2)} + \frac{y'^2}{b^2(b^2-D^2)} + \frac{z'^2}{c^2(c^2-D^2)} = o$$

Sie ist in Beziehung auf D^2 vom zweiten Grad und hat somit zwei Wurzeln, die wir mit D und D' bezeichnen, und welche die Halbaxen des

Centralschnitts sind, der mit der Berührungsebene vom Punkt (x', y', z') parallel ist. Man kann diese Gleichung auch so schreiben, mit Hinweglassung des Index 2

$$x' bc (b-D)(c-D) + y' ac (a-D)(c-D) + z' ab (a-D)(b-D) = o$$

Der von D unabhängige Ausdruck ist

$$\frac{bbcc\, x' + aacc\, y' + aabb\, z'}{bc\, x' + ac\, y' + ab\, z'} = \frac{\frac{x'}{aa} + \frac{y'}{bb} + \frac{z'}{cc}}{\frac{x'}{a} + \frac{y'}{b} + \frac{z'}{c}} abc$$

oder, wenn wir den Index 2 wieder setzen

$$= \frac{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4} + \frac{z'^2}{c^4}}{\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2}} a^2b^2c^2 = \frac{a^2b^2c^2}{P^2}$$

P ist das vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene von (x', y', z') gefällte Perpendikel; mithin ist

$$D^2 D'^2 = \frac{a^2b^2c^2}{P^2}$$

Der Coefficient von $-D$ in jener Gleichung ist

$$\frac{x' bc (b + c) + y' ac (a + c) + z' ab (a + b)}{x' bc + y' ac + z' ab}$$

oder, mit Hinzufügung des Index 2

$$D^2 + D'^2 = \frac{x'^2}{a^2}(b^2 + c^2) + \frac{y'^2}{b^2}(a^2 + c^2) + \frac{z'^2}{c^2}(a^2 + b^2)$$

Hieraus ergibt sich die Gleichung für die beiden Werthe D und D′

$$19.\quad D = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{\frac{x'^2}{a^2}(b^2 + c^2) + \frac{y'^2}{b^2}(a^2 + c^2) + \frac{z'^2}{c^2}(a^2 + b^2) \pm \sqrt{\left(\frac{x'^2}{a^2}(b^2+c^2) + \frac{y'^2}{c^2}(a^2+c^2) + \frac{z'^2}{c^2}(a^2+b^2)\right)^2 - 4\frac{a^2b^2c^2}{P^2}}\right\}}$$

D und D′ sind diejenigen 2 Semidiameter des Ellipsoids, welche dem Centralschnitte angehören, dessen Ebene parallel der Tangentialebene des Punkts (x', y', z') ist.

Man kann diesem Ausdruck noch eine andere Form geben; der nach dem Punkt (x', y', z') gezogene Semidiameter der Fläche sei H, so ist $H^2 = x^2 + y^2 + z^2$ mithin

$$D^2 + D'^2 + H^2 = \left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2}\right)(a^2 + b^2 + c^2) = a^2 + b^2 + c^2$$

$$D^2 + D'^2 = a^2 + b^2 + c^2 - H^2$$

$$20.\quad D = \sqrt{\frac{1}{2}\left(H^2 \pm \sqrt{H^4 - 4\frac{a^2b^2c^2}{P^2}}\right)}$$

Läßt man den Index ′ weg, und setzt für H^2 seinen Werth $x^2 + y^2 + z^2$ und für P^2 $\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$, so ist

21. $D = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{x^2+y^2+z^2 \pm \sqrt{(x^2+y^2+z^2)^2 - 4a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)}\right\}}$

Beim zweimantligen Hyperboloid setzt man $-b^2$ und $-c^2$ statt b^2 und c^2, also hat D denselben Werth.

Behalten wir nun die ganze Deduktion bei, welche auf den Werth von D geführt hat, mit der einzigen Modifikation, daß wir annehmen, der Punkt $(x'y'z')$ liege außerhalb der Fläche, so ist $\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 1$ die Gleichung seiner Polarebene und $\frac{x'\xi}{a^2} + \frac{y'\eta}{b^2} + \frac{z'\zeta}{c^2} = o$ diejenige des mit dieser Polarebene parallelen Centralschnitts. Die Gleichungen bleiben also vollkommen ungeändert, mit der einzigen Ausnahme, daß, da $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ nun von 1 verschieden ist, etwa gleich $\frac{1}{m^2}$, der Werth von D mit m multiplicirt werden muß. Mithin haben wir dieses Resultat:

Gegeben ist ein Punkt im Raume, (x, y, z) und eine centrische Fläche zweiten Grades; die beiden Halbaxen D und D' desjenigen Centralschnitts der Fläche, welcher mit der Polarebene des Punkts parallel ist, sind durch die Gleichung ausgedrückt

21. bis $D = m\sqrt{\frac{1}{2}\left\{x^2+y^2+z^2 \pm \sqrt{(x^2+y^2+z^2)^2 - \frac{4a^2b^2c^2}{m^2}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)}\right\}}$

Aus der Formel $P = \frac{1}{\sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4} + \frac{z'^2}{c^4}}}$ haben wir oben geschlossen, daß, wenn sich ein Punkt auf der Fläche $\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4} + \frac{z'^2}{c^4} = \frac{1}{k^2}$ bewegt, der Abstand des Mittelpunkts von seiner Polarebene konstant ist. Der Durchschnitt dieser Fläche mit dem Ellipsoid oder den Hyperboloiden in 1. hat sonach die Eigenschaft, daß die Entfernung seiner Tangentialebenen vom Ursprung konstant ist. Dieser Durchschnitt ist also eine Poloide. Sie wird dargestellt durch die Gleichungen 1 in Verbindung mit

22. $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{1}{k^2}$

Man sieht daraus, daß diese eine Fläche die drei centrischen Flächen zweiten Grades in 1. zugleich in Poloiden schneidet.

Aus

23. $D \cdot D' = \frac{abc}{P}$

folgt, daß wenn P konstant ist, auch $D . D'$ und mithin $D . D' . \pi$ ebenfalls unverändert ist. Nun ist $D . D' . \pi$ der Inhalt desjenigen Diametralschnitts der Fläche, welcher mit der Tangentialebene parallel ist, deren Entfernung vom Mittelpunkte $= P$. Hieraus schließen wir:

Bewegt sich ein Punkt auf einer Poloide, so ist der Inhalt des mit seiner Tangentialebene parallelen Diametralschnitts einer der drei centrischen Flächen zweiten Grades in 1. konstant.

Ebenso schließt man:

Bewegt sich ein Punkt auf einer Poloide der Fläche $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = m$, so ist der Inhalt des Diametralschnitts der Fläche $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, welcher mit seiner Polarebene hinsichtlich dieser Fläche parallel ist, konstant.

§. 19. Zusammenstellung von Formeln für die Flächen zweiten Grades. Fortsetzung.

B. Der Kegel.

Die Gleichung eines Kegels, dessen Axen die Coordinatenaxen sind, und der also seine Spitze im Ursprung hat, ist:

1. $m^2x^2 + n^2y^2 = z^2$

Hieraus erhalten wir durch Differenziation die partiellen Ableitungen:

2. $p = m^2 \frac{x}{z}$; $q = n^2 \frac{y}{z}$; $r = m^2 \frac{z^2 - m^2x^2}{z^3} = \frac{m^2n^2y^2}{z^3}$;

$s = -\frac{m^2n^2xy}{z^3}$; $t = n^2 \frac{z^2 - n^2y^2}{z^2} = \frac{m^2n^2x^2}{z^3}$

Durch Substitution dieser Werthe in die allgemeine Gleichung der Tangentialebene

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y)$$

ergibt sich mit Berücksichtigung der Gleichung des Kegels

3. $z'z = m^2xx' + n^2yy'$

Dieselben Betrachtungen lassen sich hier anstellen, wie bei den centrischen Flächen zweiten Grades. Mithin stellt die Gleichung 3 die Tangentialebene vor, wenn der Punkt $(x'y'z')$ auf dem Kegel liegt, oder die Polarebene dieses Punkts, wenn er nicht auf dem Kegel liegt. Die Polarebene enthält die beiden Erzeugenden des Kegels, welche die zwei durch den gegebenen Punkt an den Kegel zu legenden Tangentialebenen mit demselben gemeinschaftlich haben.

Wir wollen nun annehmen, der Pol $(x'y'z')$ bewege sich auf einer Geraden, deren Gleichungen

4. $x' + \alpha z' = b$ und $y' + \beta z' = b$

sind. Durch Verbindung von 3. und 4. erhalten wir

$$m^2ax + n^2by - (m^2\alpha x + n^2\beta y + z)\,z' = o$$

Soll diese Gleichung von x und y unabhängig sein, so müssen die Bedingungen erfüllt werden:

$$m^2ax + n^2by = o \qquad m^2\alpha x + n^2\beta y + z = o$$

oder, was dasselbe ist

5. $x + \frac{b}{m^2(\alpha b - a\beta)} z = o \quad y - \frac{a}{n^2(\alpha b - a\beta)} z = o$

Dieß ist die Gleichung einer durch den Ursprung gehenden Geraden. Die Polarebenen aller Pole, welche auf einer solchen Geraden liegen, fallen in Eine zusammen, setzen wir also in 4. und 5. $a = b = o$, so erhalten wir diese Formeln:

6. $x + \alpha z = o$; $y + \beta z = o$ und $m^2\alpha x + n^2\beta y + z = o$

Die Gleichungen 4 und 5 beziehen sich auf zwei konjugirte Gerade; sie enthalten den Satz: Bewegt sich der Pol auf einer beliebigen Geraden, so schneiden sich die Polarebenen in einer durch den Ursprung gehenden Geraden.

Die allgemeine Gleichung der Normale einer Fläche ist

$$x' - x + p(z' - z) = 0 \qquad y' - y + q(z' - z) = 0$$

Die Gleichungen der durch den Ursprung gehenden Normale der Regelfläche sind mithin

$$xz' + m^2x'z = 0 \qquad yz' + n^2y'z = 0$$

Durch Elimination von $x'\,y'\,z'$ aus diesen Gleichungen und aus $m^2x'^2 + n^2y'^2 = z'^2$ ergibt sich

$$7. \quad \frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = z^2$$

Diese Gleichung gehört dem Ergänzungs- oder Supplementar-Kegel an. Seine Erzeugenden stehen senkrecht auf den Tangentialebenen des gegebenen Kegels und umgekehrt, denn die Gleichung seiner Berührungsebene ist

$$8. \quad z'z = \frac{xx'}{m^2} + \frac{yy'}{n^2}$$

Der Geraden $x + \alpha'z = 0$ und $y + \beta'z = 0$ entspricht bei dem Ergänzungskegel die Polarebene

$$\frac{\alpha'}{m^2}x + \frac{\beta'}{n^2}y + z = 0$$

Wenn diese Linie auf der Geraden, deren Gleichung 6. ist, senkrecht stehen soll, so muß die Bedingung erfüllt sein $\alpha\alpha' + \beta\beta' + 1 = 0$; dadurch wird aber auch der Winkel zwischen den betreffenden Polarebenen $m^2\alpha x + n^2\beta y + z = 0$ und $\frac{\alpha'}{m^2} + \frac{\beta'}{n^2}y + z = 0$ ein Rechter, worauf nachstehender Satz beruht:

Die Polarebenen von zwei durch den Ursprung gehenden zu einander rechtwinkligen Geraden hinsichtlich des gegebenen Kegels und seines Ergänzungskegels stehen auf einander senkrecht.

Man ziehe an den gegebenen Kegel eine Tangentialebene, so ist ihre durch den Ursprung gehende Senkrechte eine Erzeugende des Ergänzungskegels; diese Senkrechte bildet also auch mit der Erzeugenden, längs welcher die Tangentialebene den gegebenen Kegel berührt, einen rechten Winkel; mithin stehen nach dem vorigen Satz die Polarebenen beider Erzeugenden hinsichtlich des gegebenen und des Ergänzungskegels auf einander senkrecht; wir haben somit als speziellen Fall dieses Satzes den folgenden:

Die Tangentialebenen eines Kegels und seines Ergänzungskegels, welche durch zwei auf einander rechtwinklig stehende Erzeugende beider Kegel gehen, schneiden sich senkrecht.

Wir nehmen zwei durch den Ursprung gezogene Gerade an:

$$x + \alpha z = 0; \quad y + \beta z = 0 \text{ und } x + \alpha'z = 0; \quad y + \beta'z = 0;$$

ihre Polarebenen hinsichtlich des gegebenen Kegels $m^2x^2 + n^2y^2 = z^2$ sind nach 6.

$$m^2\alpha x + n^2\beta y + z = 0 \qquad m^2\alpha'x + n^2\beta'y + z = 0$$

Soll nun die erste Gerade auf der Polarebene der zweiten liegen, so muß die Bedingung erfüllt sein $m^2\alpha'\alpha + n^2\beta'\beta - 1 = 0$; dieß ist aber auch die Bedingungsgleichung dafür, daß die zweite Gerade auf der Polarebene der ersten liegt:

Gegeben sind ein Kegel zweiten Grades und zwei Ebenen. Die Polare der ersten Ebene liegt auf der zweiten Ebene; dann liegt die Polare der zweiten Ebene auf der ersten. Die Polaren

von allen Ebenen, die durch eine Gerade gehen, liegen auf der Polarebene der letzteren.

Dem Durchschnitt der Polarebenen $m^2\alpha x + n^2\beta y + z = o$ und $m^2\alpha' x + n^2\beta' y + z = o$ entsprechen die Gleichungen

9. $x + \frac{1}{m^2} \frac{\beta' - \beta}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} z = o \qquad y - \frac{1}{n^2} \frac{\alpha' - \alpha}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} z = o$

Diese Gerade und die beiden gegebenen Geraden $x + \alpha z = o$, $y + \beta z = o$; $x + \alpha' z = o$, $y + \beta' z = o$ bilden ein Polardreikant. Die letzteren Linien wollen wir mit A und B und die Linie der Gleichung 9 mit C bezeichnen. In der Gleichung der Projektion von C auf der xz Ebene fehlt die Größe n, also ist diese Projektion dieselbe für alle diejenigen Kegel $m^2x^2 + n^2y^2 = z^2$, bei welchen m konstant ist. Die Durchschnitte derselben mit der xz Ebene entsprechen der Gleichung $mx = \pm z$; ebenso ist die Projektion von C auf der yz Ebene konstant für solche Kegel, bei welchen n, oder die Durchschnitte mit der yz Ebene $ny = \pm z$ konstant sind. C ist die Polare der durch die Geraden A und B bestimmten Ebene. Wir haben somit den Satz:

Die Polaren einer durch den Ursprung gehenden Ebene in Beziehung auf alle Kegel, welche die Coordinatenaxen zu Hauptaxen haben und eine der Coordinatenebenen in denselben Linien schneiden, liegen in einer zu dieser Coordinatenebene senkrechten Ebene.

Durch B gehen die beiden Ebenen BA und BC; die erste ist die Polarebene von C und die zweite die Polarebene von B. Die Gleichungen dieser Ebenen sind also

$(\beta' - \beta)\, x - (\alpha' - \alpha)\, y + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)\, z = o \qquad m^2\alpha x + n^2\beta y + z = o$

Der Cosinus des Winkels derselben ist nach dem Ausdruck

$$\frac{pp' + qq' + 1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}\sqrt{p'^2 + q'^2 + 1}},$$

welcher den Cosinus des Winkels der Ebenen $px + qy + z = o$ und $p'x + q'y + z = o$ vorstellt,

$$\frac{(\beta' - \beta)\, m^2\alpha - (\alpha' - \alpha)\, n^2\beta + \alpha\beta' - \alpha'\beta}{\sqrt{(\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2 + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2}\sqrt{m^4\alpha^2 + n^4\beta^2 + 1}}$$

Soll dieser Winkel gleich 90^0 sein, so muß die Bedingung erfüllt werden

$$(\beta' - \beta)\, m^2\alpha - (\alpha' - \alpha)\, n^2\beta + \alpha\beta' - \alpha'\beta = o$$

Hiebei ist jedoch zu berücksichtigen, daß $m^2\alpha'\alpha + n^2\beta'\beta - 1 = o$ sein muß, weil die Polare A auf der Polarebene von B liegen soll; der letzte Ausdruck gibt $\alpha = \frac{1 + n^2\beta'\beta}{m^2\alpha'}$.

Dieser Werth in die vorige Gleichung gesetzt, führt nach einigen Reduktionen zu

10. $(n^2 - m^2)(1 + n^2\beta'\beta) + (1 + m^2)(1 + n^2\beta')\beta' - (1 + n^2)\, m^2\alpha'^2 = o$

Zwei solche Ebenen, wie BA und BC, welche die Eigenschaft haben, daß jede die Polarebene der auf der andern liegenden Polaren ist, heißen konjugirt. Wenn je zwei durch eine Gerade B gehende konjugirte Polarebenen auf einander senkrecht stehen sollen, so muß die Gleichung 10 für jeden Werth von β erfüllt werden; es müssen also darin die Ausdrücke mit β und ohne β einzeln gleich Null sein. Dieß gibt

$(n^2 - m^2)\, n^2\beta'\beta = o \qquad n^2 - m^2 + (1 + m^2)(1 + n^2\beta')\beta' - (1 + n^2)\, m^2\alpha'^2 = o$

Die erste Gleichung kann, außer im Fall des Drehungskegels, wo $m = n$ ist, nur dadurch befriedigt werden, daß $\beta' = o$ gesetzt wird. Die Gerade B liegt also in der xz Ebene. Hiedurch verwandelt sich die zweite Gleichung in $n^2 - m^2 - (1 + n^2) m^2\alpha'^2 = o$, woraus man findet

$$\alpha' = \pm \sqrt{\frac{\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + 1}}$$

und die Linie B oder $x + \alpha'z = o \quad y + \beta'z = o$, welche die Eigenschaft hat, daß je zwei durch dieselbe gehende konjugirte Polarebenen senkrecht auf einander stehen, entspricht den Gleichungen:

$$11. \quad y = o \qquad x \pm \sqrt{\frac{\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + 1}} = o$$

Dieß sind die Gleichungen der Fokallinien; wir haben also den Satz (von Chasles):

Je zwei durch eine Fokallinie gehende konjugirte Polarebenen stehen senkrecht auf einander; mithin trifft eine Fokallinie den zu ihr senkrechten Schnitt des Kegels in seinem Brennpunkt.

Die Kreisschnitte des Kegels $m^2x^2 + n^2y = z^2$ sind durch die Gleichungen ausgedrückt:

$$12. \quad y \pm \sqrt{\frac{m^2 + 1}{n^2 - m^2}}\, z = o$$

Aus 12. erhält man für den Ergänzungskegel $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = z^2$

$$13. \quad x \mp \sqrt{\frac{\frac{1}{n^2} + 1}{\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}}}\, z = o$$

Durch Vergleichung von 11. und 13. findet man den Satz:

Die Kreisschnitte des Ergänzungskegels stehen senkrecht auf den Fokallinien des gegebenen Kegels und umgekehrt.

Wenn die Gerade $x + \alpha z = o \quad y + \beta z = o$ eine Erzeugende des Kegels $m^2x^2 + n^2y^2 = z^2$ sein soll, so muß sie die Bedingung erfüllen $m^2\alpha^2 + n^2\beta^2 - 1 = o$. Diese Erzeugende trifft die Ebene des Kreisschnitts $y + \sqrt{\frac{m^2 + 1}{n^2 - m^2}}\, z = k$ im Punkt K; O ist der Ursprung.

$$O\overline{K}^2 = (1 + \alpha^2 + \beta^2) \frac{k^2}{\left(\beta - \sqrt{\frac{m^2 + 1}{n^2 - m^2}}\right)^2}$$

Die Ebene des Kreisschnitts $y - \sqrt{\frac{m^2 + 1}{n^2 - m^2}}\, z = k'$ wird in K' geschnitten,

$$\overline{OK'}^2 = (1 + \alpha^2 + \beta^2)\,\frac{k'^2}{\left(\beta + \sqrt{\frac{m^2 + 1}{n^2 - m^2}}\right)^2}$$

$$\overline{OK}^2 \,.\, \overline{OK'}^2 = (1 + \alpha^2 + \beta^2)^2\,\frac{k^2\,k'^2}{\left(\beta^2 - \frac{m^2 + 1}{n^2 - m^2}\right)^2}$$

oder wenn man für β^2 seinen Werth $\frac{1 - m^2\alpha^2}{n^2}$ setzt

$$\overline{OK} \,.\, \overline{OK'}^2 = \left(\frac{1 + \alpha^2 + \frac{1 - m^2\alpha^2}{n^2}}{\frac{1 - m^2\alpha^2}{n^2} - \frac{m^2 + 1}{n^2 - m^2}}\right)^2 k^2k'^2$$

14. $OK \,.\, OK' = \frac{n^2 - m^2}{m^2}\, k \,.\, k'$

Wenn man von der Spitze eines Kegels nach allen Punkten von zwei Kreisen, welche verschiedenen, unter sich nicht parallelen Systemen von Kreisschnitten angehören, Erzeugende zieht, so ist das Produkt der Entfernungen der Durchschnittspunkte auf jeder Erzeugenden von der Spitze konstant. Zwei Kreise eines Kegels, welche nicht parallel sind, liegen auf einer Kugel, und noch auf einem zweiten Kegel, dessen Axen parallel mit denjenigen des Hauptkegels sind.

Die Mittelpunkte aller Kugeln, auf welchen zwei Kreise des Kegels $m^2x^2 + n^2y^2 = z^2$ liegen, sind in der yz Ebene, wenn $n > m$ ist, und in der xz Ebene, wenn $m > n$ ist.

Alle Kugeln, welche eine cyclische Ebene (Chasles nennt diejenigen Ebenen cyclische, welche durch die Spitze des Kegels parallel mit den Kreisschnitten gelegt werden) in der Spitze des Kegels berühren, schneiden denselben in einem System von Kreisschnitten.

Man ziehe in der yz Ebene die Durchmesser von zwei Kreisschnitten, HK und H'K', so ist HKK'H' ein Kreisviereck, in welchem die Diagonalen HK' und H'K sich in J schneiden. J ist die Spitze des zweiten Kegels, auf dem beide Kreisschnitte liegen; die Axen dieses Kegels sind parallel mit den Coordinatenaxen, denn die Halbirungslinien der Winkel HOK, HJK sind nach einem bekannten Satze vom Kreisviereck unter sich parallel.

Eine durch O gehende Erzeugende des Kegels schneidet zwei nicht parallele Kreise in K und K'; die Tangenten der Kreise in K und K' bilden mit der Erzeugenden nach entgegengesetzten Seiten hin gleiche Winkel. Dieß gilt auch im Durchschnittspunkt, wenn die Kreise einen solchen haben; hieraus folgt unmittelbar der Satz von Chasles: Jede Berührungsebene schneidet die cyclischen Ebenen in zwei Geraden, welche mit der Berührungslinie gleiche Winkel machen; nun stehen eine Erzeugende und die Fokallinien des Ergänzungskegels beziehungsweise senkrecht auf einer Berührungsebene und auf den cyclischen Ebenen des gegebenen Kegels, also bilden die durch die Fokallinien und eine Erzeugende gelegten Ebenen beim Ergänzungskegel, und also auch bei jedem Kegel gleiche Winkel mit der Ebene, welche den Kegel längs der Erzeugenden berührt. Chasles: Académie de Bruxelles, tom VI, 1. 1830.

Zwei nicht parallele Kreise eines Kegels stehen in derjenigen Verwandtschaft zu einander, welche ein spezieller Fall der Transformation durch reciproke Radienvektoren ist. Wenn man von einem festen Punkt O nach allen Punkten einer Fläche oder Kurve Radien OK zieht, und auf ihrer Richtung die Punkte K′ so annimmt, daß

$$OK \cdot OK' = \text{const.}$$

so liegen letztere Punkte auf der verwandelten Fläche oder Linie.

Für die Hauptkrümmungshalbmesser einer Fläche gilt folgende Gleichung:

$$R = \frac{-2k^3}{h \pm \sqrt{h^2 - 4k^2 g}}$$

$$k^3 = (1 + p^2 + q^2)^{3/2}; \; h = (1 + q^2) r + (1 + p^2) t - 2pqs; \; g = rt - s^2$$

Mit Benützung der Gleichungen 2 finden wir g = o

$$R = \frac{-k^3}{h} \text{ oder } = \infty$$

$$R = -\frac{\frac{1}{z^3}(z^2 + m^4x^2 + n^4y^2)^{3/2}}{\frac{m^2n^2}{z^5}\left\{(z^2 + n^4y^2)y^2 + (z^2 + m^4x^2)x^2 + 2m^2n^2x^2y^2\right\}}$$

$$R = -\frac{z^2(z^2 + m^4x^2 + n^4y^2)^{3/2}}{m^2n^2\left\{z^2(x^2 + y^2) + (m^2x^2 + n^2y^2)^2\right\}}$$

15. $$R = -\frac{\left\{z^2 + m^4x^2 + n^4y^2\right\}^{3/2}}{m^2n^2(x^2 + y^2 + z^2)}$$

da $m^2x^2 + n^2y^2 = z^2$ ist.

§. 20. Zusammenstellung von Formeln für die Flächen zweiten Grades. Schluß.

C. Die beiden Paraboloide.

1. $$\frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n} = x \qquad \frac{y^2}{m} - \frac{z^2}{n} = z$$

Die erste Gleichung stellt das elliptische, die zweite das hyperbolische Paraboloid vor.

Die nachstehenden Formeln beziehen sich aber alle auf das elliptische Paraboloid. Will man sie auf die zweite Fläche anwenden, so darf man nur $-n$ statt $+n$ setzen.

2. $$p = \frac{n}{2z}; \quad q = -\frac{n}{m}\frac{y}{z}; \quad r = -\frac{n^2}{4z^3}; \quad s = \frac{n^2y}{2mz^3}; \quad t = -\frac{n^2x}{mz^3}$$

Die allgemeine Gleichung der Tangentialebene $z' - z = p(x' - x) + q(y' - y)$ wird

3. $$\frac{y'}{m}y + \frac{z'}{n}z = \frac{x' + x}{2}$$

Dieß ist die Gleichung der Tangential- oder der Polarebene des Punkts

(x′, y′, z′), je nachdem er auf der Fläche liegt oder nicht. Bewegt er sich auf der Geraden

4. $x' + \alpha z' = a \qquad y' + \beta z' = b$

so erhalten wir durch die Verbindung von 3. und 4.

$$\frac{b}{m} y - \frac{x + a}{2} + \left(- \frac{\beta}{m} y + \frac{z}{n} + \frac{\alpha}{2}\right) z' = 0$$

Soll dieser Ausdruck von z′ unabhängig sein, so muß $\frac{b}{m} y - \frac{x + a}{2} = 0$ und $- \frac{\beta}{m} y + \frac{z}{n} + \frac{\alpha}{2} = 0$ werden, oder, was dasselbe ist,

5. $x - \frac{2b}{\beta n} z + \frac{\alpha b - \beta a}{\beta} = 0 \qquad y - \frac{m}{n\beta} x - \frac{\alpha m}{2\beta} = 0$

4. und 5. sind konjugirte Polaren.

Der Cosinus des Winkels der Geraden $x + pz = 0$ und $y + qz = 0$; $x + p'z = 0$ und $y + q'z = 0$ ist $\frac{pp' + qq' + 1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}\sqrt{1 + p'^2 + q'^2}}$. Also ist der Cosinus der Polaren 4 und 5

6. $\frac{(n - m)\beta - 2b\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2}\sqrt{n^2\beta^2 + 4b^2 + m^2}}$

Wenn dieser Winkel ein Rechter ist, so muß die Bedingung erfüllt werden

7. $(n - m)\beta - 2b\alpha = 0$

In den Gleichungen 5 sind die Coefficienten von z unabhängig von α und a; hieraus folgt:

Die Polaren aller Geraden, welche in einer mit der xAxe parallelen Ebene liegen, sind unter sich parallel.

Der Ausdruck 6 ist unabhängig von a, woraus man schließt:

Alle Gerade, welche in einer auf der yzEbene senkrechten Ebene liegen und unter sich parallel sind, bilden mit ihren konjugirten Geraden denselben Winkel.

Angenommen, der Pol (x′, y′, z′) bewege sich auf der Ebene

8. $\alpha x' + \beta y' + \gamma z' = 1$

so verbinden wir die Gleichungen 3 und 8 und erhalten

$$\left(\frac{y}{m} + \frac{\beta}{2\alpha}\right) y' + \left(\frac{z}{n} + \frac{\gamma}{2\alpha}\right) z' = \frac{1 + \alpha x}{2\alpha}$$

Wenn dieser Ausdruck von y′ und z′ unabhängig sein soll, so müssen die Relationen statt finden:

9. $x = - \frac{1}{\alpha}; \quad y = - \frac{m\beta}{2\alpha}; \quad z = - \frac{n\gamma}{2\alpha}$

Dieß sind die Gleichungen des Pols der Polarebene 8. Man kann die Gleichung 8 auch in dieser Form schreiben

$$x' + \frac{\beta}{\alpha} y' + \frac{\gamma}{\alpha} z' = \frac{1}{\alpha}$$

Wenn sich die Polarebene parallel mit sich selbst bewegt, so bleiben die Verhältnisse $\frac{\beta}{\alpha}$ und $\frac{\gamma}{\alpha}$, also auch die Werthe von y und z in 9. ungeändert; hieraus schließt man:

Die Pole aller unter sich parallelen Polarebenen liegen in einer mit der xAxe parallelen Geraden.

x, y, z sind die laufenden Coordinaten der Normale, deren Fußpunkt auf der Fläche (x′, y′, z′) ist. Die Gleichungen dieser Normale sind:

$$10.\quad x = -\frac{n}{2z'}z + x' + \frac{n}{2} \qquad y = \frac{n}{m}\,\frac{y'}{z'}\,z + \frac{m-n}{m}\,y'$$

Setzen wir $z = o$, so wird $x - x' = \frac{n}{2}$; $\frac{y}{y'} = \frac{m-n}{m}$, woraus folgt:

Bei einem Paraboloid ist die Differenz der Abstände des Fußpunkts einer Normale und ihres Durchschnittspunkts mit der xyEbene von der yzEbene konstant; wie auch das Verhältniß der Abstände dieser beiden Punkte von der xzEbene.

Setzen wir noch $x' = \text{const.}$, so ist auch x konstant; ebenso ist es bei y′ und y:

Die Normalen, deren Fußpunkte eine zu einer Hauptebene parallele Kurve bilden, schneiden eine andere Hauptebene in einer Geraden, die zur ersten parallel ist.

Die Entfernung der Ebene $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ vom Ursprung sei P, so ist $P = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$; die Gleichung 3 der Tangentialebene des Paraboloids können wir auch unter diese Form bringen:

$$-\frac{x}{x'} + \frac{2y'}{mx'}y + \frac{2z'}{nx'}z = 1;$$

die Entfernung P derselben vom Ursprung ist somit gleich

$$11.\quad P = \frac{x'}{\sqrt{1 + \frac{4y'^2}{m^2} + \frac{4z'^2}{n^2}}}$$

P ist die Entfernung der Tangential- oder der Polarebene des Punkts (x′, y′, z′) vom Ursprung oder Scheitel des Paraboloids, je nachdem dieser Punkt auf der Fläche liegt oder nicht. **Bei den zwei Paraboloiden $\frac{y^2}{m} \pm \frac{z^2}{n} = x$, wo m und n gleiche absolute Werthe haben, sind also die Entfernungen der Polarebenen eines und desselben Punkts vom Scheitel gleich.**

Bewegt sich der Pol auf der Fläche $\frac{x'}{\sqrt{1 + \frac{4y'^2}{m^2} + \frac{4z'^2}{n^2}}} = k$ oder

$$\frac{x'^2}{k^2} - \frac{y'^2}{\frac{m^2}{4}} - \frac{z'^2}{\frac{n^2}{4}} = 1$$

welche ein zweimantliges Hypperboloid ist, so berührt seine Polarebene die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = k^2$.

Die Formeln 29 und 30 des §. 4 heißen

$$\frac{1}{R\,.\,R'} = \frac{g}{k^4} \qquad \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{h}{k^3}$$

Mit Benützung der Gleichungen 2 erhalten wir

$$k^2 = 1 + p^2 + q^2 = \frac{1}{z^2}\left(z^2 + \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{m^2}y^2\right) = \frac{n^2}{4z^2}\left(1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2}\right)$$

$$g = rt - s^2 = \frac{n^3}{4m\,z^4}$$

$$h = (1+q^2)r + (1+p^2)t - 2pqs = -\frac{n^2}{mz^3}\left(\frac{m+n}{4} + x\right) = -\frac{n^2}{4mz^3}(m+n+4x)$$

$$\frac{1}{R.R'} = \frac{n^3}{4m\left(z^2 + \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{m^2}y^2\right)^2}$$

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = -\frac{n^2\left(\frac{m+n}{4} + x\right)}{m\left(z^2 + \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{m^2}y^2\right)^{3/2}}$$

$$\frac{1}{R} = -\frac{h \pm \sqrt{h^2 - 4k^2 g}}{2k^3}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{m + n + 4x \pm \sqrt{(m+n+4x)^2 - 4mn\left(1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2}\right)}}{\frac{mn}{4}\left(1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2}\right)^{3/2}}$$

Die allgemeine Differenzialgleichung der Krümmungslinien ist

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\{(1+q^2)s - pqt)\} + \frac{dy}{dx}\{(1+q^2)r - (1+p^2)t\} - (1+p^2)s + pqr = 0$$

Mit Hülfe der Gleichungen 2 erhält man für das elliptische Paraboloid

$$\frac{m-n}{n}y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{m-n-4x}{2}\frac{dy}{dx} + y = 0$$

Durch Differenziation

$$\frac{d^2y}{dx^2}\left(2\frac{m-n}{n}y\frac{dy}{dx} + \frac{m-n-4x}{2}\right) + \frac{dy}{dx}\left(\frac{m-n}{n}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1\right) = 0$$

Setzt man hier aus der vorigen Gleichung

$$\frac{m-n-4x}{2}\frac{dy}{dx} = -\frac{m-n}{n}y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y$$

so ergibt sich

$$\frac{d^2y}{dx^2}y\left(\frac{m-n}{n}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left(\frac{m-n}{n}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1\right) = 0$$

oder nach Weglassung des gemeinschaftlichen Faktors

$$\frac{d^2y}{dx^2}y + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$$

und durch Integration

$$y\frac{dy}{dx} = \beta$$

durch nochmalige Integration

12. $$\frac{y^2}{2} = \beta x + \gamma$$

Dieß ist die Gleichung der Krümmungslinien auf dem Paraboloid: β läßt

sich bestimmen mit Hülfe der Differenzialgleichung der Krümmungslinien, und $y \frac{dy}{dx} = \beta$; wir erhalten dadurch

$$\frac{m-n}{n}\beta^2 + \frac{m-n-4x}{2}\beta + y^2 = o$$

und mit Hülfe von 12.

$$\left(\beta + \frac{n}{4}\right)^2 = -\frac{2n}{m-n}\gamma + \frac{n^2}{16}$$

Durch Verbindung von 11. mit der Gleichung 1 des Paraboloids erhalten wir ferner

$$13. \quad y^2\left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{m}\right) - \frac{\beta}{n}z^2 = \gamma \qquad z^2 = \left(\frac{2n}{m}\beta + n\right)x + \frac{2n}{m}\gamma$$

Die Gleichungen 12 und 13 enthalten folgenden Satz:

Die Krümmungslinien des Paraboloids projiciren sich auf die beiden durch die xAxe gehenden Hauptebenen als Parabeln, und auf die dritte Hauptebene als Hyperbeln (Ellipsen).

Die Gleichung der Tangentialebene des Paraboloids können wir auch unter diese Form bringen:

$$-\frac{1}{x'}x + \frac{2y'}{mx'}y + \frac{2z'}{nx'}z = 1$$

Es sei P das vom Ursprung oder dem Scheitel des Paraboloids auf diese Tangentialebene gefällte Perpendikel, so ist nach der allgemeinen Formel $P = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$ für die auf die Ebene $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ herabgelassene Senkrechte

$$14. \quad P = \frac{x'}{\sqrt{1 + \frac{4y'^2}{m^2} + \frac{4z'^2}{n^2}}}$$

Mit Zugrundlegung dieses Werths können wir den Ausdruck für $\frac{1}{R}$ vereinfachen, indem wir in $\frac{1}{R} = \frac{-h \mp \sqrt{h^2 - 4k^2g}}{2k^3}$ setzen

$$k^2 = \frac{n^2}{4z^2}\left(1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2}\right) = \frac{n^2}{4z^2}\,\frac{x^2}{P^2}$$

$$15. \quad \frac{1}{R} = \frac{\frac{m+n+4x}{m} \mp \sqrt{\left(\frac{m+n+4x}{m}\right)^2 - \frac{4nx^2}{mP^2}}}{\frac{nx^3}{P^3}}$$

$$R = \frac{mx}{4P}\left(\frac{m+n+4x}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{m+n+4x}{m}\right)^2 - \frac{4nx^2}{mP^2}}\right)$$

$$= \frac{x}{4P}\left(m + n + 4x + \sqrt{(m+n+4x)^2 - \frac{4mnx^2}{P^2}}\right)$$

Die Gleichung der geodätischen Linien auf irgend einer Fläche ist nach Joachimsthal:

$$\frac{dXd^2x + dYd^2y + dZd^2z}{dXdx + dYdy + dZdz} + \frac{Xdx + Ydy + Zdz}{X^2 + Y^2 + Z^2} - \frac{dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = o$$

Bei der Fläche $\frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n} = z$ ist

$$X = 1; \quad Y = \frac{2y}{m}; \quad Z = \frac{2z}{n}$$

$$dX = o; \quad dY = \frac{2}{m} dy; \quad dZ = \frac{2}{n} dz$$

$$dX\,dx + dY\,dy + dZ\,dz = \frac{2}{m} dy^2 + \frac{2}{n} dz^2$$

$$dX\,d^2x + dY\,d^2y + dZ\,d^2z = \frac{2}{m} dy\,d^2y + \frac{2}{n} dz\,d^2z$$

$$\int \frac{dXd^2x + dYd^2y + dZd^2z}{dXdx + dYdy + dZdz} = \int \frac{\frac{dy\,d^2y}{m} + \frac{dz\,d^2z}{n}}{\frac{dy^2}{m} + \frac{dz^2}{n}} = \frac{1}{2} \log\left(\frac{dy^2}{m} + \frac{dz^2}{n}\right)$$

$$\int \frac{Xdx + Ydy + Zdz}{X^2 + Y^2 + Z^2} = \frac{1}{2} \log(X^2 + Y^2 + Z^2) = \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2}\right)$$

$$\int \frac{dxd^2x + dyd^2y + dz\,d^2z}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{1}{2} \log(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

Man erhält somit für die Gleichung der geodätischen Linien auf dem Paraboloid ein erstes Integral:

$$16. \quad 1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2} = C \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\frac{dy^2}{m} + \frac{dz^2}{n}}$$

indem man die Konstante mit C bezeichnet. $dx^2 + dy^2 + dz^2$ ist $= ds^2$, ds ist das Element der geodätischen Linie, $1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2} = \frac{x^2}{P^2}$ nach 14.; $\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\frac{dy^2}{m} + \frac{dz^2}{n}} = \frac{1}{\frac{dy^2}{m\,ds^2} + \frac{dz^2}{n\,ds^2}} = \frac{1}{\frac{\cos^2\beta}{m} + \frac{\cos^2\gamma}{n}}$; wenn die Winkel, welche die Tangente der geodätischen Linie, oder das Element ds mit den y und z Axen bildet, durch β und γ bezeichnet werden.

Die Gleichung 16 verwandelt sich also in

$$17. \quad C = \frac{x^2}{P^2} \left(\frac{\cos^2\beta}{m} + \frac{\cos^2\gamma}{n}\right)$$

$$\frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n} = x + \varrho$$

Wenn die Gleichung des Paraboloids in dieser Form gegeben ist, so hat man

$$p = \frac{n}{2z}; \; q = -\frac{n}{m}\frac{y}{z}; \; r = -\frac{n^2}{4z^3}; \; s = \frac{n^2y}{2mz^3}; \; t = -\frac{n^2(x + \varrho)}{mz^3}$$

$$\frac{y'}{m} y + \frac{z'}{n} z = \frac{x' + x}{2} + \varrho \text{ oder } -\frac{x}{2\varrho + x'} + \frac{2y'}{m(2\varrho + x')} y + \frac{2z'}{n(2\varrho + x')} = 1$$

Dieß sind die Gleichungen der Tangentialebene im Punkt (x', y', z').

Das vom Ursprung auf die Tangentialebene des Punkts (x, y, z) gefällte Perpendikel P hat den Werth

$$P = \frac{x + 2\varrho}{\sqrt{1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2}}}$$

In der Gleichung $\frac{1}{R} = -\frac{h \pm \sqrt{h^2 - 4k^2g}}{2k^3}$ haben wir

$$k^2 = \frac{n^2}{4z^2}\left(1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2}\right)$$

$$g = rt - s^2 = \frac{n^3}{4mz^4}$$

$$h = (1 + q^2)r + (1 + p^2)t - 2pqs = -\frac{n^2}{4mz^3}(m + n + 4x + 4\varrho)$$

$$20.\ \frac{1}{R} = -\frac{m+n+4x+4\varrho \pm \sqrt{(m+n+4x+4\varrho)^2 - 4mn\left(1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2}\right)}}{\frac{mn}{4}\left(1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2}\right)^{3/2}}$$

§. 21. Die homofokalen centrischen Flächen zweiten Grads.

Das Ellipsoid und die beiden Hyperboloide.

Wir nehmen drei zu einander rechtwinklige Axen an. Die Lage eines Punkts im Raum läßt sich mittelst dieser Axen auf sehr verschiedene Weise bestimmen. Die gewöhnlichste und einfachste besteht darin, daß man durch denselben drei zu einander und zu den Coordinatenaxen senkrechte Ebenen legt, welche die Axen in drei Punkten schneiden, deren Abstände vom Ursprung beziehungsweise gleich x, y, z sind. Diese Größen sind die rechtwinkligen Coordinaten des Punkts im Raum. Bewegt sich derselbe auf einer dieser drei Ebenen, z. B. auf derjenigen, die auf der z Axe senkrecht steht, so hat man die Gleichung

$$z = \text{const.}$$

für die genannte Ebene. Für jede beliebige Linie, die der Punkt auf dieser Fläche beschreibt, gilt die Gleichung z = const. Ferner sind

$$z = \text{const.} \quad y = \text{const.}$$

Die Gleichungen des Durchschnitts von zwei Ebenen, die auf den Axen der z und y senkrecht stehen. Will man von einem Punkt (x, y, z) des Raums zu einem beliebigen andern übergehen, so gibt man den Coordinaten x, y, z die Veränderungen l, m, n und nennt den zweiten Punkt (x + l, y + m, z + n).

Eine zweite Art, die Lage eines Punkts im Raum zu bestimmen, besteht darin, daß man durch denselben nicht drei zu den Axen rechtwinklige Ebenen oder Flächen ersten Grades legt, sondern drei zu den Axen rechtwinklige Flächen zweiten Grades, nämlich ein Ellipsoid, ein einmantliges und ein zweimantliges Hyperboloid. Diese Flächen bezeichnen wir mit (ϱ); (μ); (ν); ihre Gleichungen sind

$$1. \quad \frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 1$$
$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1$$

b und c sind zwei konstante Größen, die als gegeben angenommen werden müssen; und die Betrachtung vorstehender Gleichungen führt sogleich darauf, daß diese Größen nichts anders sind, als die Distanzen der Brennpunkte vom Mittelpunkt bei denjenigen zwei Diametralschnitten der drei Flächen, die in der xy Ebene und in der xz Ebene liegen. Bei dem dritten Diametral- oder Hauptschnitt, welcher in der yz Ebene liegt, ist die Entfernung des Brennpunkts vom Mittelpunkt $= \sqrt{c^2 - b^2}$. Es ist $c > b$ angenommen. Da die durch die Gleichungen 1 repräsentirten Flächen die Eigenschaft haben, daß bei ihren Hauptschnitten die Brennpunkte gemeinschaftlich sind, so nennt man sie homofokal.

Die großen Halbaxen der centrischen homofokalen Flächen zweiten Grades, des Ellipsoids (ϱ), des einmantligen Hyperboloids (μ) und des zweimantligen Hyperboloids (ν) sind ϱ, μ und ν. ϱ ist $> c > b$ und kann jeden beliebigen Werth zwischen c und ∞ annehmen. μ ist eingeschlossen zwischen den Grenzen c und b, es müssen also immer die Ungleichungen stattfinden

$$c > \mu > b$$

endlich bewegt sich ν zwischen den Grenzen b und o, d. h.

$$c > b > \nu > o$$

Es ist nun klar, daß ein Punkt im Raum bestimmt ist, wenn die Größen ϱ, μ und ν gegeben sind, d. h. wenn man die großen Halbaxen der drei durch ihn gelegten homofokalen Flächen kennt. Denn, da b und c unter allen Umständen als gegebene Parameter angenommen werden, so sind durch Bestimmung von ϱ, μ und ν auch die übrigen Axen der homofokalen Flächen (ϱ), (μ) und (ν) gegeben. Wir bezeichnen den Punkt, bei welchem die großen Halbaxen der drei durch ihn gehenden homofokalen Flächen beziehungsweise gleich ϱ, μ und ν sind, mit (ϱ,μ,ν) und nennen ϱ, μ und ν die elliptischen Coordinaten dieses Punkts, ganz ähnlich, wie man x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten des Punkts (x, y, z) heißt, welche die Abstände vom Ursprung der drei durch ihn gehenden auf den Coordinatenaxen senkrecht stehenden Ebenen sind.

Bewegt sich der Punkt auf dem Ellipsoid (ϱ), so ist seine Gleichung in elliptischen Coordinaten:

$$\varrho = \text{const.}$$

bewegt er sich aber auf den Flächen (ϱ) und (μ) zugleich, so bestehen die Relationen

$$\varrho = \text{const.} \quad \mu = \text{const.}$$

Da nun, wie dieß später gezeigt werden wird, die homofokalen Flächen sich gegenseitig in ihren Krümmungslinien schneiden, so sieht man schon hier, welche einfache Form die Gleichungen dieser Linien bei Zugrundelegung elliptischer Coordinaten bekommen. Wenn wir die Gleichungen der Krümmungslinien des andern Systems haben wollen, so dürfen wir nur annehmen, daß sich der Punkt auf dem Durchschnitt des Ellipsoids (ϱ) und des zweimantligen Hyperboloids (ν) bewege, und erhalten alsdann

$$\varrho = \text{const.} \quad \nu = \text{const.}$$

Es handelt sich jetzt zunächst darum, den Uebergang von den gewöhn-

lichen Coordinaten x, y, z zu den elliptischen ϱ, μ, ν zu finden. Zu diesem Zweck bemerken wir, daß sich die Gleichungen 1 auch so schreiben lassen:

$$2. \quad \frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} = 1 \quad \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{z^2}{\mu^2 - c^2} = 1$$
$$\frac{x^2}{\nu^2} + \frac{y^2}{\nu^2 - b^2} + \frac{z^2}{\nu^2 - c^2} = 1$$

wobei immer vorausgesetzt ist, daß die Grenzen $\varrho > c > b$, $c > \mu > b$, $c > b > \nu$ eingehalten werden. Aus den Formeln 2 lassen sich die Werthe von ϱ, μ, ν als Funktion von b, c, x, y, z ausdrücken. Da aber diese Gleichungen eine und dieselbe Form haben, so können wir ϱ, μ, ν als die drei Wurzeln von $\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} = 1$ ansehen, welche Gleichung sich auch unter diese Form bringen läßt

$$3. \quad \varrho^6 - \varrho^4(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2) + \varrho^2\{(b^2 + c^2)x^2 + c^2y^2 + b^2z^2 + b^2c^2\} - b^2c^2x^2 = 0$$

sie ist in Beziehung auf ϱ^2 vom dritten Grade; wir betrachten also ϱ^2 als die Variabele. Nun ist nach den bekannten Sätzen über die Coefficienten der Gleichungen mit einer Variabelen der Coefficient von ϱ^4 gleich der Summe der drei Wurzeln, derjenige von ϱ^2 gleich der Summe der Produkte von je zweien der Wurzeln, und endlich der Ausdruck ohne ϱ gleich dem Produkt der drei Wurzeln. Letztere bezeichnen wir mit ϱ^2, μ^2, ν^2 und erhalten demnach

$$4. \quad \varrho^2 + \mu^2 + \nu^2 = x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2$$
$$5. \quad \varrho^2\mu^2 + \varrho^2\nu^2 + \mu^2\nu^2 = (b^2 + c^2)x^2 + c^2y^2 + b^2z^2 + b^2c^2$$
$$6. \quad \varrho^2\mu^2\nu^2 = b^2c^2x^2$$

Hieraus ergibt sich sogleich

$$7. \quad bcx = \varrho\mu\nu$$
$$8. \quad b\sqrt{c^2 - b^2}\,.\,y = \sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}$$
$$9. \quad c\sqrt{c^2 - b^2}\,.\,z = \sqrt{\varrho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}$$

Die vom Mittelpunkt O nach einem Punkt M oder (ϱ, μ, ν) gezogene Gerade bezeichnen wir mit H, so ist $H^2 = x^2 + y^2 + z^2$ oder nach 4. in elliptischen Coordinaten

$$10. \quad H^2 = \varrho^2 + \mu^2 + \nu^2 - b^2 - c^2$$

Die Gleichung einer Kugel, deren Mittelpunkt O ist, in elliptischen Coordinaten heißt somit

$$11. \quad \varrho^2 + \mu^2 + \nu^2 = \text{const.}$$

Die Gleichungen des Durchschnitts dieser Kugel mit dem Ellipsoid (ϱ) oder einer sphärischen Kurve auf dieser Fläche sind

$$12. \quad \mu^2 + \nu^2 = \text{const.} \qquad \varrho = \text{const.}$$

Aus 11. erhalten wir folgenden Satz:

Bewegt sich ein Punkt im Raume so, daß seine Entfernung vom Mittelpunkt oder Ursprung des Coordinatensystems konstant ist, so ist die Quadratsumme der drei großen Halbaxen von den durch ihn gehenden homofokalen Flächen konstant.

In der Gleichung 5 setzen wir $(b^2 + c^2)x^2 + c^2y^2 + b^2z^2 = \text{const.}$, d. h. wir lassen den Punkt (x, y, z) sich auf einem Ellipsoid bewegen; dann erhalten wir aus 5.

$$\varrho^2\mu^2 + \varrho^2\nu^2 + \mu^2\nu^2 = \text{const.}$$

Diese Gleichung enthält den Satz:

Bewegt sich ein Punkt auf der Fläche $(b^2+c^2)x^2+c^2y^2+b^2z^2 = \text{const.}$, so ist die Quadratsumme der drei Rechtecke, welche sich aus je zwei großen Halbaxen der drei durch ihn gelegten homofokalen Flächen bilden lassen, konstant.

Die Gleichungen 6 und 7 sind identisch. Setzen wir in 7., 8. und 9. der Reihe nach x, y, z konstant, so ergeben sich die Resultate

$$\varrho\mu\nu = \text{const.}$$
$$\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2} = \text{const.}$$
$$\sqrt{\varrho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2} = \text{const.}$$

Hierin ist dieser Satz ausgesprochen:

Bewegt sich ein Punkt in einer Ebene, die parallel mit einer der drei Coordinatenebenen ist, so ist das Produkt der drei auf dieser Coordinatenebene senkrechten Halbaxen von den homofokalen Flächen, welche sich durch den Punkt legen lassen, konstant.

In 7. können wir sowohl x als auch ϱ konstant annehmen, und erhalten sofort

$$\mu\nu = \text{const.}$$

In diesem Fall bewegt sich der Punkt auf einem Schnitte von (ϱ), welcher parallel der yz Ebene ist; ein ganz ähnliches Resultat würden wir aus den zwei andern Gleichungen erhalten haben, indem wir irgend zwei von den sechs Größen, x, y, z, ϱ, μ, ν in einer derselben als konstant annehmen. Hiedurch erhalten wir den Satz:

Gegeben ist eine centrische Fläche zweiten Grades und ein Schnitt parallel einer der Hauptebenen; durch alle Punkte des Schnitts lassen sich zwei homofokale Flächen legen; diejenigen Scheitel dieser Flächen, die auf einer Axe liegen, senkrecht auf jener Hauptebene, bilden eine Involution.

Das vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene einer centrischen Fläche zweiten Grades gefällte Perpendikel bezeichnen wir im folgenden stets mit P; man hat dafür den Ausdruck (§. 18, 14)

$$P = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ist die Gleichung der Fläche. Wenn wir den Werth von P in elliptischen Coordinaten haben wollen, so müssen wir statt a^2, b^2, c^2 bei dem Ellipsoid ϱ^2, $\varrho^2 - b^2$, $\varrho^2 - c^2$ setzen, und für x, y, z ihre Werthe aus den Gleichungen 7, 8, 9 substituiren, dadurch erhalten wir für den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen

$$\frac{\mu^2\nu^2}{\varrho^2 b^2 c^2} + \frac{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)}{(\varrho^2 - b^2)\, b^2 (c^2 - b^2)} + \frac{(c^2 - \mu^2)(c^2 - \nu^2)}{(\varrho^2 - c^2)\, c^2 (c^2 - b^2)}$$

Wenn wir der Einfachheit wegen den Index 2 weglassen, und die Brüche gleichnamig machen, so ergibt sich

$$\frac{\mu\nu(\varrho-b)(\varrho-c)(c-b) + (\mu-b)(b-\nu)\varrho(\varrho-c)c + (c-\mu)(c-\nu)\varrho(\varrho-b)b}{\varrho(\varrho-b)(\varrho-c)\, bc\, (c-b)}$$

Die drei Summanden des Nenners bezeichnen wir der Reihe nach mit A, B, C und erhalten

$$A = \mu\nu \{\varrho\varrho c - \varrho\varrho b - \varrho cc + \varrho bc - b\varrho c + b\varrho b + bcc - bcb\}$$
$$B = \varrho c \{\mu b\varrho - \mu bc - \mu\nu\varrho + \mu\nu c - bb\varrho + bbc + b\nu\varrho - b\nu c\}$$
$$C = \varrho b \{cc\varrho - ccb - c\nu\varrho + c\nu b - \mu c\varrho + \mu cb + \mu\nu\varrho - \mu\nu b\}$$

Nachdem man in der Summe $A + B + C$ die sich gegenseitig aufhebenden Glieder gestrichen hat, bleibt noch

$$A+B+C = \mu\nu(bcc-bcb) + \varrho\varrho(bcc-bbc) - \varrho\mu(cbc-bcb) - \varrho\nu(cbc-bcb)$$
$$= bc\,(c - b)\,(\varrho\varrho + \mu\nu - \varrho\mu - \varrho\nu)$$
$$= bc\,(c - b)\,(\varrho - \mu)\,(\varrho - \nu)$$

Mit Hülfe dieses Werths von $A + B + C$ reducirt sich der Bruch auf

$$\frac{(\varrho - \mu)\,(\varrho - \nu)}{\varrho\,(\varrho - b)\,(\varrho - c)}$$

Wenn wir den Index 2 wieder setzen, so erhalten wir den Ausdruck

$$13. \quad P = \frac{\varrho \sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}$$

Dieß ist einer der häufigen Fälle, wo sich bei Anwendung elliptischer Coordinaten anscheinend zusammengesetzte Ausdrücke, die aus mehreren zu summirenden Brüchen bestehen, in Produkte auflösen, welche für viele algebraische Operationen sehr bequem sind.

P ist das vom Mittelpunkt auf diejenige Ebene gefällte Perpendikel, welche das Ellipsoid (ϱ) in dem Punkte berührt, wo es von dem einmantligen Hyperboloid (μ) und von dem zweimantligen Hyperboloid (ν) geschnitten wird, oder was dasselbe ist, wo sich die Krümmungslinien $\varrho = \text{const.}$ $\mu = \text{const.}$ und $\varrho = \text{const.}$ $\nu = \text{const.}$ schneiden. Will man das vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene von (μ) im Punkt (ϱ, μ, ν) gefällte Perpendikel finden, so hat man in 13. nur μ statt ϱ und ϱ statt μ zu setzen, und erhält

$$\frac{\mu \sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - c^2}}{\sqrt{\mu^2 - \varrho^2}\sqrt{\mu^2 - \nu^2}} = \frac{\mu \sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}$$

Durch Verwechslung der Buchstaben ϱ und ν gegen einander in 13. erhalten wir für das auf die Tangentialebene von (ν) im Punkt (ϱ, μ, ν) herabgelassene Perpendikel

$$\frac{\nu \sqrt{\nu^2 - b^2}\sqrt{\nu^2 - c^2}}{\sqrt{\nu^2 - \varrho^2}\sqrt{\nu^2 - \mu^2}} = \frac{\nu \sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}$$

Eine solche Verwechslung der Buchstaben ϱ und μ oder ϱ und ν ist darum zuläßig, weil die Gleichungen der homofokalen Flächen (ϱ), (μ) und (ν), wie sie in 2. dargestellt sind, gleich lauten.

Im Punkt (ϱ, μ, ν) schneiden sich die homofokalen Flächen (ϱ), (μ), (ν); im Punkt ($\varrho + d\varrho, \mu, \nu$) schneiden sich die Flächen ($\varrho + d\varrho$), (μ), (ν); die Verbindungslinie beider Punkte ist ein Element der Durchschnittslinie der Hyperboloide (μ) und (ν). Wir bezeichnen dieses Element mit ds und erhalten in rechtwinkligen Coordinaten die bekannte Formel

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

dx, dy und dz sind die Projektionen von ds auf den Axen der x, y und z. Diese Projektionen kann man sogleich aus den Formeln 7, 8, 9 ableiten, indem man darin die Größen x, y, z und ϱ als die einzigen Variabeln betrachtet. Durch Differenziation dieser Formeln ergibt sich

$$bc\,dx = \mu\nu\, d\varrho$$

$$b\sqrt{c^2 - b^2}\, dy = \frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - b^2}} \sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}$$

$$c\sqrt{c^2 - b^2} . dz = \frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - c^2}} \sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}$$

also $ds^2 = \left\{ \frac{\mu^2\nu^2}{b^2c^2} + \frac{\varrho^2(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)}{(\varrho^2-b^2)b^2(c^2-b^2)} + \frac{\varrho^2(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)}{(\varrho^2-c^2)c^2(c^2-b^2)} \right\} d\varrho^2$

$= \frac{\varrho^2}{P^2} d\varrho^2$ (siehe die Entwicklung von P)

Hieraus erhält man mit Hülfe von 13. folgenden Werth für ds

14. $$ds = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}{\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}} d\varrho$$

Auf ähnliche Weise läßt sich der Werth des Abstands ds' der Punkte (ϱ, μ, ν) und $(\varrho, \mu + d\mu, \nu)$ ableiten, indem man in den Formeln 7, 8, 9 die Größen x, y, z und μ als variabel ansieht und differenziirt, oder einfacher, wenn man in 14. blos μ statt ϱ und ϱ statt μ setzt

15. $$ds' = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}} d\mu$$

und der Werth des Abstands ds'' der Punkte (ϱ, μ, ν) und $(\varrho, \mu, \nu + d\nu)$, wenn man in 7., 8., 9. die Größen x, y, z und ν als variabel ansieht und differenziirt, oder indem man blos die Buchstaben ϱ und ν in 14. gegenseitig vertauscht

16. $$ds'' = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}{\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}} d\nu$$

Durch Verbindung der Gleichungen 14 und 13 ergibt sich

17. $P . ds = \varrho . d\varrho$

Das Produkt P . ds ist somit unabhängig von μ und ν und also für das Ellipsoid (ϱ) konstant. Wir können nach dem Vorhergehenden leicht die Winkel a, a', a'' bestimmen, welche das Element ds oder die Richtung der Tangente der Durchschnittslinie von (μ) und (ν) mit den Axen der x, y und z bildet. Es ist nämlich

$$\cos a = \frac{dx}{ds}; \quad \cos a' = \frac{dy}{ds}; \quad \cos a'' = \frac{dz}{ds} \text{ also}$$

18. $$\cos a = \frac{\mu\nu\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{bc\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}} \quad \cos a' = \frac{\varrho\sqrt{\varrho^2 - c^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}$$

$$\cos a'' = \frac{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}$$

Auf ganz gleichem Wege erhalten wir für die Cosinus der Winkel α, α', α'', welche das Element ds' oder der Durchschnitt der Flächen (ϱ) und (ν) mit den Axen bildet

19. $$\cos \alpha = \frac{\varrho\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}.\nu}{bc\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\mu^2 - \nu^2}} \quad \cos \alpha' = \frac{\sqrt{\varrho^2 - b^2}.\mu.\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}$$

$$\cos \alpha'' = -\frac{\sqrt{\varrho^2 - c^2}.\mu.\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}$$

und für die Cosinus der Winkel a, a', a'', welche das Element ds'' oder der Durchschnitt der Flächen (ϱ) und (μ) mit den Axen macht

$$20.\quad \cos a = \frac{\varrho\mu\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{bc\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}$$

$$\cos a' = -\frac{\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}\,.\,\nu}{b\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}$$

$$\cos a'' = -\frac{\sqrt{\varrho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}\,.\,\nu}{c\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}$$

Chasles hat die vorstehenden Formeln auf synthetischem Wege ermittelt, dessen Kenntniß gleichfalls von Werth ist. Das vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene des Ellipsoids (ϱ) im Punkte (ϱ, μ, ν) gefällte Perpendikel haben wir mit P bezeichnet; es ist parallel mit ds; die Winkel, welche dasselbe mit den Axen bildet, sind somit gleich a, a', a'' und nach einem synthetisch sehr leicht zu beweisenden Satze besteht die Relation

$$P^2 = \varrho^2 \cos^2 a + (\varrho^2 - b^2)\cos^2 a' + (\varrho^2 - c^2)\cos^2 a''$$

Das vom Mittelpunkt auf eine parallele Tangentialebene von (μ) gefällte Perpendikel sei $= P'$, so ist

$$P'^2 = \mu^2 \cos^2 a + (\mu^2 - b^2)\cos^2 a' - (c^2 - \mu^2)\cos^2 a''$$

$$P^2 - P'^2 = \varrho^2 - \mu^2$$

Hierin ist der bekannte Satz von Chasles enthalten:

Gegeben sind zwei homofokale Flächen. Die Differenz der Quadrate der vom Mittelpunkt auf irgend zwei parallele Tangentialebenen dieser Flächen gefällten Perpendikel ist konstant.

In dem Punkt (ϱ, μ, ν) ziehe man die Tangentialebene von (μ) und eine parallele Tangentialebene von (ϱ), so ist

$$P^2 - P'^2 = \varrho^2 - \mu^2$$

Derjenige Semidiameter von (ϱ), welcher senkrecht auf diesen Tangentialebenen steht, ist gleich $\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}$. Denn wenn man drei beliebige konjugirte Semidiameter auf P projicirt, so ist die Quadratsumme ihrer Projektionen gleich P^2. Man nehme nun für diese Semidiameter denjenigen, welcher in (ϱ, μ, ν) endigt, so ist das Quadrat seiner Projektion gleich $P,^2$: Der zweite Semidiameter D ist parallel der Normale von (μ) in (ϱ, μ, ν), also ist er selbst seine Projektion, der dritte D' ist senkrecht auf D, also ist seine Projektion $= 0$, mithin ist $P'^2 + D^2 = P^2$ oder $D^2 = P^2 - P'^2$

$$D = \sqrt{\varrho^2 - \mu^2}$$

$$D' = \sqrt{\varrho^2 - \nu^2}$$

P . D . D' ist das Volumen des aus drei konjugirten Semidiametern des des Ellipsoids (ϱ) konstruirten Parallelepipeds. Dieses Volumen ist konstant und gleich dem Parallelepiped der drei Halbaxen, also

$$P = \frac{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}$$

Bei dem unendlich nahen Ellipsoid ($\varrho + d\varrho$) sei das auf die Tangentialebene des Punkts ($\varrho + d\varrho, \mu, \nu$) gefällte Perpendikel $= P + dP$, so ist

$$(P + dP)^2 - P^2 = (\varrho + d\varrho)^2 - \varrho^2$$

$$PdP = \varrho d\varrho$$

dP ist aber gleich ds, also

$$ds = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}{\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}\, d\varrho \quad \text{(Journal v. Liouville. 1846.)}$$

Die Werthe von D und D′ können wir leicht analytisch entwickeln; man hat nämlich die bekannten Gleichungen

$$D^2 D'^2 = \frac{a^2b^2c^2}{P^2} \qquad D^2 + D'^2 = a^2 + b^2 + c^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$$

P ist das vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene im Punkt (x, y, z) des Ellipsoids $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ gefällte Perpendikel; D und D′ sind die Halbaxen desjenigen Diametralschnitts, welcher dieser Tangentialebene parallel ist. Durch Anwendung elliptischer Coordinaten erhalten wir

$$a^2b^2c^2 = \varrho^2(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2) \qquad P^2 = \frac{\varrho^2(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}{(\varrho^2 - \mu^2)(\varrho^2 - \nu^2)}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3\varrho^2 - b^2 - c^2 \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2 + \mu^2 + \nu^2 - b^2 - c^2 \quad (4)$$

$$D^2 D'^2 = (\varrho^2 - \mu^2)(\varrho^2 - \nu^2) \qquad D^2 + D'^2 = (\varrho^2 - \mu^2) + (\varrho^2 - \nu^2)$$

21. $D = \sqrt{\varrho^2 - \mu^2}$

22. $D' = \sqrt{\varrho^2 - \nu^2}$

Aus 18., 19. und 20. findet man

$$\cos a \,.\, \cos\alpha + \cos a' \,.\, \cos\alpha' + \cos a'' \,.\, \cos\alpha''$$
$$= \frac{\varrho\mu\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}}{b^2c^2(c^2 - b^2)(\varrho^2 - \mu^2)\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}\left\{\nu^2(c^2 - b^2) + c^2(b^2 - \nu^2) - b^2(c^2 - \nu^2)\right\}$$
$$= 0$$

ebenso

$$\cos a \,.\, \cos\mathfrak{a} + \cos a' \,.\, \cos\mathfrak{a}' + \cos a'' \,.\, \cos\mathfrak{a}'' = 0$$
$$\cos\alpha \,.\, \cos\mathfrak{a} + \cos\alpha' \,.\, \cos\mathfrak{a}' + \cos\alpha'' \,.\, \cos\mathfrak{a}'' = 0$$

Die centrischen homofokalen Flächen schneiden sich orthogonal, und mithin nach dem Satz von Dupin in ihren Krümmungslinien.

Dieses Theorem wird später noch auf andere Art bewiesen werden.

An die angeführten Formeln knüpfen sich verschiedene Betrachtungen an. Es sei A B C D ein von vier Krümmungslinien auf einer Fläche zweiten Grads, z. B. auf dem Ellipsoid (ϱ) gebildetes Viereck. Wir ziehen in den Punkten A, B, C, D die Tangentialebenen von (ϱ) und bezeichnen die vom Mittelpunkt auf dieselben gefällten Perpendikel der Reihe nach mit P_a, P_b, P_c, P_d. In dem Punkt A schneiden sich die homofokalen Hyperboloide (μ) und (ν), dieser Punkt werde also durch ($\varrho\mu\nu$) bezeichnet. In B schneiden sich die homofokalen Hyperboloide (μ) und (ν'), also bezeichnen wir ihn mit ($\varrho\mu\nu'$); ebenso bezeichnen wir C mit ($\varrho\mu'\nu'$) und D mit ($\varrho\mu'\nu$), weil sich in diesen Punkten die homofokalen Hyperboloide (μ'), (ν') und (μ'), (ν) schneiden. Wir haben nun zufolge der Gleichung 16 folgende Relationen:

$$P_a = \frac{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}} \qquad P_b = \frac{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu'^2}}$$

$$P_c = \frac{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu'^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu'^2}} \qquad P_d = \frac{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu'^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}$$

Hieraus läßt sich sogleich ableiten:

23. $P_a . P_c = P_b . P_d$ oder $P_a : P_b = P_d : P_c$

Wenn man auf einer centrischen Fläche zweiten Grads ein Viereck bildet aus vier Krümmungslinien, und auf die Tangentialebenen in den vier Ecken vom Mittelpunkt aus Perpendikel fällt, so bilden diese Perpendikel eine Proportion.

Zwei Gegenseiten des Vierecks gehören dem einen System der Krümmungslinien an, und die beiden andern Seiten dem andern System.

Aus der Gleichung 14 läßt sich eine ganz ähnliche Folgerung ziehen. Es seien die Abstände der Ecken A, B, C, D von dem unendlich nahen Ellipsoid $(\varrho + d\varrho)$ beziehungsweise gleich ds_a, ds_b, ds_c, ds_d, so haben wir die Gleichungen

$$ds_a = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}{\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}} d\varrho \qquad ds_b = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu'^2}}{\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}} d\varrho$$

$$ds_c = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \mu'^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu'^2}}{\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}} d\varrho \qquad ds_d = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \mu'^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}{\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}} d\varrho$$

24. $ds_a . ds_c = ds_b . ds_d$ oder $ds_a : ds_b = ds_d : ds_c$

Die Abstände der Ecken eines von vier Krümmungslinien auf einer Fläche zweiten Grads gebildeten Vierecks von der unendlich nahen einschließenden homofokalen Fläche bilden eine Proportion (Satz von Bertrand).

Durch den Punkt A auf dem Ellipsoid (ϱ) gehen die beiden Krümmungslinien $\mu = \text{const.}$ und $\nu = \text{const.}$ Derjenige Semidiameter des Ellipsoids, welcher der Tangente der ersten Krümmungslinie parallel ist, hat den Ausdruck $\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}$. Dieser Werth bleibt aber konstant längs aller Punkte der zweiten Krümmungslinie, da sich hier weder ϱ noch ν verändert; somit haben wir den Satz:

Alle Semidiameter einer centrischen Fläche zweiten Grads, welche mit den konjugirten Tangenten einer Krümmungslinie parallel sind, sind gleich lang; sie bilden also auf der Fläche eine sphärische Kurve. Wenn man auf solche Art die Semidiameter zieht, welche den konjugirten Tangenten der übrigen Krümmungslinien parallel sind, so erhält man auf der Fläche zwei Systeme von sphärischen Kurven.

In dem Viereck ABCD schneiden sich in jeder Ecke zwei Krümmungslinien; zieht man ihre Tangenten, so ergeben sich acht Tangenten. Die beiden Semidiameter, welche den Tangenten der Linie AB und AD parallel sind, seien D_a und D'_a so ist

$$D_a = \sqrt{\varrho^2 - \nu^2} \qquad D'_a = \sqrt{\varrho^2 - \mu^2}$$

Ebenso erhalten wir für die Semidiameter, welche den in den Ecken B, C, D zusammenstoßenden Tangenten parallel sind

$$D_b = \sqrt{\varrho^2 - \mu^2} \qquad D_c = \sqrt{\varrho^2 - \nu'^2} \qquad D_d = \sqrt{\varrho^2 - \mu'^2}$$

$$D'_b = \sqrt{\varrho^2 - \nu'^2} \qquad D_c = \sqrt{\varrho^2 - \mu'^2} \qquad D_d = \sqrt{\varrho^2 - \nu^2}$$

25. $D_a . D_b . D_c . D_d = D'_a . D'_b . D'_c . D'_d$

Hierin liegt der Satz:

Die acht Semidiameter einer centrischen Fläche zweiten Grads, welche den acht Tangenten in den Ecken eines von vier

Krümmungslinien gebildeten Vierecks parallel sind, bilden zwei Gruppen; das Produkt der vier Semidiameter der einen Art ist gleich dem Produkt der vier Semidiameter der andern Art.

Die Gleichungen 4 geben die Werthe der Coordinaten x, y, z eines Punkts (xyz) oder ($\varrho\mu\nu$) ausgedrückt durch die großen Halbaxen der drei durch ihn gehenden homofokalen Flächen (ϱ), (μ), (ν). Die Linie, welche vom Mittelpunkt nach diesem Punkt gezogen ist, bezeichnen wir mit H, so ist $H = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ oder nach 10.

26. $H = \sqrt{\varrho^2 + \mu^2 + \nu^2 - b^2 - c^2}$

Es seien H_a, H_b, H_c, H_d die vier Halbmesser, welche sich vom Mittelpunkt nach den vier Ecken des auf dem Ellipsoid (ϱ) von vier Krümmungslinien gebildeten Vierecks ziehen lassen, so haben wir nach dem Obigen folgende Relationen:

$H_a = \sqrt{\varrho^2 + \mu^2 + \nu^2 - b^2 - c^2}$ $\quad H_b = \sqrt{\varrho^2 + \mu^2 + \nu'^2 - b^2 - c^2}$

$H_c = \sqrt{\varrho^2 + \mu'^2 + \nu'^2 - b^2 - c^2}$ $\quad H_d = \sqrt{\varrho^2 + \mu'^2 + \nu^2 - b^2 - c^2}$

27. $H^2_a + H^2_c = H^2_b + H^2_d$

Die Quadratsumme der nach zwei Gegenecken eines von vier Krümmungslinien auf einer centrischen Fläche zweiten Grads gebildeten Vierecks gezogenen Halbmesser ist gleich der Quadratsumme der nach den beiden andern Gegenecken gezogenen Halbmesser.

Man denke sich noch ein zweites homofokales Ellipsoid (ϱ'), so bilden die Flächen (μ), (μ') und (ν), (ν') auf demselben das Krümmungslinienviereck A'B'C'D', bezeichnen wir die vom Mittelpunkt aus nach den Ecken desselben gezogenen Halbmesser mit H'_a, H'_b, H'_c, H'_d, so haben wir

$H'_a = \sqrt{\varrho'^2 + \mu^2 + \nu^2 - b^2 - c^2}$ $\quad H'_b = \sqrt{\varrho'^2 + \mu^2 + \nu'^2 - b^2 - c^2}$

$H'_c = \sqrt{\varrho'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 - b^2 - c^2}$ $\quad H'_d = \sqrt{\varrho'^2 + \mu'^2 + \nu^2 - b^2 - c^2}$

28. $H^2_a + H'^2_c = H^2_b + H'^2_d = H^2_c + H'^2_a = H^2_d + H'^2_b$

Die Quadratsummen von je zwei Halbmessern, welche nach zwei Gegenecken eines von sechs homofokalen Flächen gebildeten Parallelepipeds gezogen werden, sind einander gleich.

Es sei O der Mittelpunkt der homofokalen Flächen, oder der Anfangspunkt des Coordinatensystems. M ist ein beliebiger Punkt, dessen Coordinaten x, y, z sind. Die Cosinus der drei Winkel, welche die Linie OM mit den Axen bildet, sind

$$\frac{x}{OM}, \frac{y}{OM}, \frac{z}{OM}$$

Ebenso sind die Cosinus der drei Winkel, welche die nach einem andern Punkt M' gezogene Linie OM' mit den Axen bildet

$$\frac{x'}{OM'}, \frac{y'}{OM'}, \frac{z'}{OM'}$$

mithin ist

$$\cos MOM' = \frac{xx'}{OM \cdot OM'} + \frac{yy'}{OM \cdot OM'} + \frac{zz'}{OM \cdot OM'}$$

Die Halbaxen der drei durch M gehenden homofokalen Flächen sind ϱ, μ, ν; ebenso die Halbaxen der drei durch M' gehenden homofokalen Flächen ϱ', μ', ν'.

Zufolge der Gleichung 26 ist

$$OM = \sqrt{\varrho^2 + \mu^2 + \nu^2 - b^2 - c^2} \qquad OM' = \sqrt{\varrho'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 - b^2 - c^2}$$

Die Werthe von x, y, z; x', y', z' erhalten wir aus den Gleichungen 7, 8, 9; mithin ist

$$29.\ \cos MOM' = \frac{1}{OM.OM'}\left\{\frac{\varrho\mu\nu\varrho'\mu'\nu'}{b^2c^2} + \frac{\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{\varrho'^2-b^2}\sqrt{\mu'^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu'^2}}{b^2(c^2-b^2)}\right.$$
$$\left. + \frac{\sqrt{\varrho^2-c^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}\sqrt{\varrho'^2-c^2}\sqrt{c^2-\mu'^2}\sqrt{c^2-\nu'^2}}{c^2(c^2-b^2)}\right\}$$

Wir betrachten wieder das Viereck ABCD, welches durch Krümmungslinien auf dem Ellipsoid (ϱ) gebildet ist. Die Punkte A B C D sind nach den durch sie gehenden homofokalen Flächen zu bezeichnen mit ($\varrho\mu\nu$), ($\varrho\mu\nu'$), ($\varrho\mu'\nu'$), ($\varrho\mu'\nu$).

Die Gleichung 29 führt nun sogleich auf die Formel

$$OA \,.\, OC \,.\, \cos AOC = OB \,.\, OD \,.\, \cos BOD$$

Nach einem bekannten geometrischen Lehrsatz ist:

$$AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2\, OA \,.\, OC \,.\, \cos AOC$$
$$BD^2 = OB^2 + OD^2 - 2\, OB \,.\, OD \,.\, \cos BOD$$

Da nun nach 27. $OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$ ist, so haben wir auch $AC^2 = BD^2$ oder

30. $AC = BD$

Jn jedem von vier Krümmungslinien auf einer centrischen Fläche zweiten Grads gebildeten Viereck ist die Entfernung von zwei Gegenecken gleich der Entfernung der beiden andern.

Sind z. B. A, B, C die Endpunkte der drei Axen eines Ellipsoids, und ist D ein Nabelpunkt, so ist ABCD ein spezielles Krümmungslinienviereck. Nun haben wir $AC^2 = \varrho^2 + \varrho^2 - c^2$ Die Coordinaten von D sind

$$x = \varrho\frac{b}{c} \qquad y = o \qquad z = \frac{1}{c}\sqrt{(\varrho^2 - c^2)(c^2 - b^2)} \quad \text{also}$$

$$BD^2 = \varrho^2 - b^2 + \varrho^2\frac{b^2}{c^2} + \frac{1}{c^2}(\varrho^2 - c^2)(c^2 - b^2) = \varrho^2 + \varrho^2 - c^2 \quad \text{oder}$$

$$AC = BD$$

Sechs homofokale Flächen schließen ein Parallelepiped ein, nämlich zwei Ellipsoide (ϱ) und (ϱ'); zwei einmantlige Hyperboloide (μ) und (μ'); zwei zweimantlige Hyperboloide (ν) und (ν'). Die Ecken A, B, C, D; A', B', C', D, sind nach den großen Halbaxen der drei durch jede derselben gehenden Flächen zu bezeichnen mit

$$(\varrho\mu\nu) \quad (\varrho\mu\nu') \quad (\varrho\mu'\nu') \quad (\varrho\mu'\nu)$$
$$(\varrho'\mu\nu) \quad (\varrho'\mu\nu') \quad (\varrho'\mu'\nu') \quad (\varrho'\mu'\nu)$$

Da nun nach 28.

$$OA^2 + OC'^2 = OB^2 + OD'^2 = OC^2 + OA'^2 = OD^2 + OB'^2 \text{ ist,}$$

ferner nach 29.

$$OA \,.\, OC' \,.\, \cos AOC' = OB \,.\, OD' \,.\, \cos BOD' = OC \,.\, OA' \,.\, \cos COA'$$
$$= OD \,.\, OB' \,.\, \cos DOB'$$

so ergibt sich bei Anwendung des genannten geometrischen Lehrsatzes auf die Dreiecke AOC', BOD', COA', DOB'

31. $AC' = BD' = CA' = DB'$

Jn jedem von sechs homofokalen Flächen eingeschlossenen Parallelepiped sind je zwei Gegenecken gleichweit von einander entfernt.

Es seien A, B, C die Endpunkte von drei Axen und D der Nabelpunkt auf dem Ellipsoid (ϱ), die gleiche Bedeutung haben die Buchstaben A′ B′ C′ D′ für das Ellipsoid (ϱ'), so ist ABCD A′B′C′D′ ein von sechs homofokalen Flächen eingeschlossenes Parallelepiped. Nun haben wir

$$AC'^2 = \varrho^2 + \varrho'^2 - c^2$$

Die Coordinaten von D′ sind

$$x' = \varrho' \frac{b}{c} \qquad y' = o \qquad z' = \frac{1}{c}\sqrt{(\varrho^2 - c^2)(c^2 - b^2)} \text{ also}$$

$$BD'^2 = \varrho^2 - b^2 + \varrho'^2 \frac{b^2}{c^2} + \frac{1}{c^2}(\varrho'^2 - c^2)(c^2 - b^2) \text{ oder}$$

$$AC' = BD'$$

Dieser Satz stammt von Ivory, und ist bekannt unter der Form: die Entfernung zweier Punkte im Raum (zweier Gegenecken unseres Parallelepipeds) ist gleich der Entfernung ihrer korrespondirenden Punkte (zweier andern Gegenecken dieses Parallelepipeds) (recueil des savants étrangers; Chasles: sur l' attraction des ellipsoides, IX. S. 629).

Der allgemeine Ausdruck für die beiden Hauptkrümmungshalbmesser auf einer centrischen Fläche zweiten Grades, deren Halbaxen a, b, c sind, im Punkt x, y, z ist (§. 18, 15)

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2} \frac{P^2}{a^2 b^2 c^2} \Big\{ (a^2 + b^2 + c^2 - x^2 - y^2 - z^2) P$$
$$\pm \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 - x^2 - y^2 - z^2)^2 P^2 - 4a^2 b^2 c^2} \Big\}$$

P ist das vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene im Punkt (xyz) gefällte Perpendikel. Wenden wir diese Formel auf das Ellipsoid (ϱ) an, so haben wir folgende Werthe zu setzen:

$$P = \frac{\varrho \sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2 + \mu^2 + \nu^2 - b^2 - c^2$$

$$a = \varrho \qquad b = \sqrt{\varrho^2 - b^2} \qquad c = \sqrt{\varrho^2 - c^2}$$

Dadurch verwandelt sich obige Formel in

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2} \frac{1}{(\varrho^2 - \mu^2)(\varrho^2 - \nu^2)} \Big\{ (\varrho^2 - \mu^2 + \varrho^2 - \nu^2) \frac{\varrho \sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}$$
$$\pm \sqrt{(\varrho^2 - \mu^2 + \varrho^2 - \nu^2)^2 \frac{\varrho^2 (\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}{(\varrho^2 - \mu^2)(\varrho^2 - \nu^2)} - 4\varrho^2(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)} \Big\}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2} \varrho \sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2} \left(\frac{\varrho^2 - \mu^2 + \varrho^2 - \nu^2}{(\varrho^2 - \mu^2)^{3/2}(\varrho^2 - \nu^2)^{3/2}} \pm \frac{\mu^2 - \nu^2}{(\varrho^2 - \mu^2)^{3/2}(\varrho^2 - \nu^2)^{3/2}} \right)$$

oder, wenn wir die beiden Hauptkrümmungshalbmesser mit R und R′ bezeichnen, $R > R'$, d. h. R entspricht den Krümmungslinien μ und R′ den Krümmungslinien ν, so ist

32. $$R = \frac{(\varrho^2 - \mu^2)^{1/2}(\varrho^2 - \nu^2)^{3/2}}{\varrho \sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}} \qquad R' = \frac{(\varrho^2 - \mu^2)^{3/2}(\varrho^2 - \nu^2)^{1/2}}{\varrho \sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}$$

In dem Krümmungslinienviereck ABCD sind im Ganzen für die vier Ecken acht Hauptkrümmungshalbmesser anzuführen. Wir bezeichnen diejenigen, welche den Krümmungslinien μ entsprechen, d. h. den durch die Hyperboloide

(μ) und (μ') auf dem Ellipsoid hervorgebrachten Schnitten, mit R_a, R_b, R_c, R_d. Ebenso bezeichnen wir die andern vier Hauptkrümmungshalbmesser, welche den Krümmungslinien ν entsprechen, oder den auf dem Ellipsoid durch die Hyperboloide (ν) und (ν') hervorgebrachten Schnitten mit R'_a, R'_b, R'_c, R'_d, so bestehen nachstehende Gleichungen, indem der Kürze wegen

$$\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2} = \lambda$$

gesetzt wird,

$$R_a = \frac{1}{\lambda}(\varrho^2 - \mu^2)^{1/2}(\varrho^2 - \nu^2)^{3/2} \qquad R_b = \frac{1}{\lambda}(\varrho^2 - \mu^2)^{1/2}(\varrho^2 - \nu'^2)^{3/2}$$

$$R_c = \frac{1}{\lambda}(\varrho^2 - \mu'^2)^{1/2}(\varrho^2 - \nu'^2)^{3/2} \qquad R_d = \frac{1}{\lambda}(\varrho^2 - \mu'^2)^{1/2}(\varrho^2 - \nu^2)^{3/2}$$

33. $R_a \,.\, R_c = R_b \,.\, R_d$

$$R'_a = \frac{1}{\lambda}(\varrho^2 - \mu^2)^{3/2}(\varrho^2 - \nu^2)^{1/2} \qquad R_b = \frac{1}{\lambda}(\varrho^2 - \mu^2)^{3/2}(\varrho^2 - \nu'^2)^{1/2}$$

$$R'_c = \frac{1}{\lambda}(\varrho^2 - \mu'^2)^{3/2}(\varrho^2 - \nu'^2)^{1/2} \qquad R_d = \frac{1}{\lambda}(\varrho^2 - \mu'^2)^{3/2}(\varrho^2 - \nu^2)^{1/2}$$

34. $R'_a \,.\, R'_c = R'_b \,.\, R'_d$

oder auch

$$R_a : R_b = R_d : R_c$$
$$R'_a : R'_b = R'_d : R'_c$$

In einem Krümmungslinienviereck auf einer centrischen Fläche zweiten Grades sind die vier Hauptkrümmungshalbmesser der einen Art in Proportion, sowie auch die vier Hauptkrümmungshalbmesser der andern Art. Diesen Satz hat zuerst Bertrand für das Ellipsoid aufgestellt.

In dem Punkt A treffen die drei homofokalen Flächen (ϱ), (μ), (ν) zusammen. Wir bezeichnen die beiden Hauptkrümmungshalbmesser des Ellipsoids (ϱ) wie oben mit $R > R'$; diejenigen des einmantligen Hyperboloids (μ) mit M (positiv) M′ (negativ); und endlich diejenigen des zweimantligen Hyperboloids (ν) mit $N > N'$, so haben wir nachstehende Relationen, wo der Kürze wegen

$$\lambda' = \mu\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2} \qquad \lambda'' = \nu\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}$$

gesetzt wird:

$$R = \frac{1}{\lambda}(\varrho^2 - \mu^2)^{1/2}(\varrho^2 - \nu^2)^{3/2} \qquad R' = \frac{1}{\lambda}(\varrho^2 - \mu^2)^{3/2}(\varrho^2 - \nu^2)^{1/2}$$

$$M = \frac{1}{\lambda'}(\varrho^2 - \mu^2)^{1/2}(\mu^2 - \nu^2)^{3/2} \qquad M' = -\frac{1}{\lambda'}(\varrho^2 - \mu^2)^{3/2}(\mu^2 - \nu^2)^{1/2}$$

$$N = \frac{1}{\lambda''}(\varrho^2 - \nu^2)^{3/2}(\mu^2 - \nu^2)^{1/2} \qquad N' = \frac{1}{\lambda''}(\varrho^2 - \nu^2)^{1/2}(\mu^2 - \nu^2)^{3/2}$$

35. $R' \,.\, M \,.\, N = - R \,.\, M' \,.\, N'$

Wenn sich in einem Punkte drei homofokale Flächen schneiden, so bilden die sechs Hauptkrümmungshalbmesser der Flächen in diesem Punkte zwei Gruppen; das Produkt der drei Halbmesser der ersten Gruppe vermehrt um das Produkt der Halbmesser der zweiten Gruppe ist gleich Null.

$$\frac{R}{R'} = \frac{\varrho^2 - \nu^2}{\varrho^2 - \mu^2} \qquad \frac{M}{M'} = -\frac{\mu^2 - \nu^2}{\varrho^2 - \mu^2} \qquad \frac{N}{N'} = \frac{\varrho^2 - \nu^2}{\mu^2 - \nu^2}$$

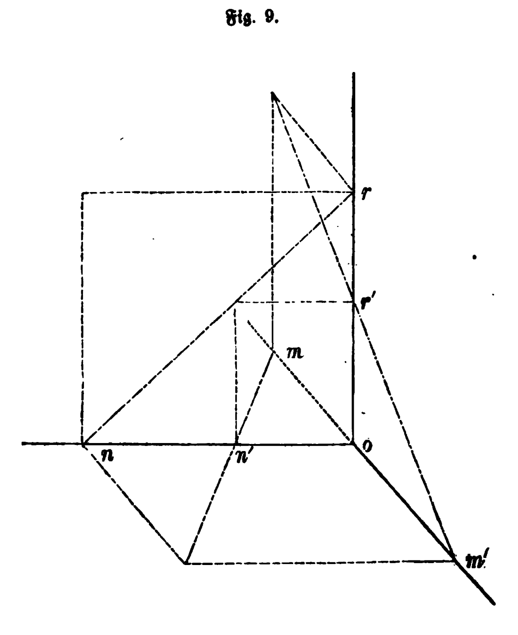
Aus diesen Gleichungen lassen sich noch folgende weitere ableiten:

36. $\frac{R}{R'} + \frac{M}{M'} = 1 \qquad \frac{R'}{R} + \frac{N'}{N} = 1 \qquad \frac{M'}{M} + \frac{N}{N'} = 1$

35. hat zuerst Lamé aufgestellt; die Relationen 36 rühren von Bertrand her.

Es sei o der Punkt, in welchem sich die drei homofokalen Flächen schneiden; man ziehe durch o die drei Normalen dieser Flächen und bestimme auf jeder die beiden Krümmungsmittelpunkte; r und r′ seien die Krümmungsmittelpunkte des Ellipsoids (ϱ), m und m′ diejenigen des Hyperboloids (μ) und n und n′ diejenigen des zweimantligen Hyperboloids (ν). or $= R$, or′ $= R'$, om $= M$, om′ $= M'$, on $= N$, on′ $= N'$.

Fig. 9.



Die Gleichungen 36 lassen sich nun in folgender Weise geometrisch darstellen, wobei zu bemerken ist, daß die Punkte m und m′ auf entgegengesetzten Seiten von o liegen, während die Punkte r und r′ sich auf der nämlichen Seite dieses Punkts befinden, wie auch n und n′. Die durch r mit mm′ und durch m mit rr′ gezogenen Parallelen schneiden sich auf der Verlängerung der Geraden m′r′; die durch r′ mit nn′ und durch n′ mit rr′ gezogenen Parallelen treffen sich auf der Linie rn; endlich liegt der Durchschnittspunkt der Geraden, welche durch m′ parallel mit nn′ und durch n parallel mit mm′ gezogen werden, auf der Verlängerung der Geraden mn′. Wir haben somit folgenden Lehrsatz:

Wenn man von den sechs Krümmungsmittelpunkten, welche drei in einem Punkt sich schneidenden homofokalen Flächen entsprechen, drei Paare verbindet, und durch die andern drei Paare Parallelen mit den Normalen zieht, so liegen die Durchschnittspunkte der Parallelen auf den Verbindungslinien.

Die Gleichungen 4 enthalten die Werthe der Coordinaten x, y, z eines Punkts im Raum, ausgedrückt durch die großen Halbaxen ϱ, μ, ν der drei homofokalen Flächen, (ϱ), (μ), (ν), welche sich durch diesen Punkt legen lassen. Es ist dabei, wie immer, vorausgesetzt, daß die Entfernungen der Brennpunkte, b und c, gegeben sind. Wir wollen die Coordinaten der Eckpunkte des Krümmungslinienvierecks ABCD mit

$$x_a, y_a, z_a; \; x_b, y_b, z_b; \; x_c, y_c, z_c; \; x_d, y_d, z_d$$

bezeichnen, so haben wir aus den Gleichungen 7, 8, 9 folgende Werthe:

$$x_a = \frac{\varrho\mu\nu}{bc} \qquad y_a = \frac{\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}$$

$$z_a = \frac{\sqrt{\varrho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}$$

$$x_b = \frac{\varrho\mu\nu'}{bc} \qquad y_b = \frac{\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu'^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}$$

$$z_b = \frac{\sqrt{\varrho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu'^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}$$

$$x_c = \frac{\varrho\mu'\nu'}{bc} \qquad y_c = \frac{\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\mu'^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu'^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}$$

$$z_c = \frac{\sqrt{\varrho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \mu'^2}\sqrt{c^2 - \nu'^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}$$

$$x_d = \frac{\varrho\mu'\nu}{bc} \qquad y_d = \frac{\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\mu'^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \nu'^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}$$

$$z_d = \frac{\sqrt{\varrho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \mu'^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}$$

Hieraus lassen sich die Relationen ableiten

37. $x_a \,.\, x_c = x_b \,.\, x_d$ oder $x_a : x_b = x_d : x_c$
$y_a \,.\, y_c = y_b \,.\, y_d$ oder $y_a : y_b = y_d : y_c$
$z_a \,.\, z_c = z_b \,.\, z_d$ oder $z_a : z_b = z_d : z_c$

worin folgender Satz ausgesprochen ist:

Die Projektionen der vom Mittelpunkt einer centrischen Fläche zweiten Grades nach den vier Ecken eines Krümmungslinienvierecks gezogenen Halbmesser auf irgend einer der drei Axen bilden eine Proportion.

Der Cosinus des Winkels, welchen die Normale des Ellipsoids im Punkt x', y', z' mit der x Axe macht, läßt sich auch aus den Gleichungen dieser Normale ableiten:

$$x - x' = \frac{x'}{z'}\,\frac{\varrho^2 - c^2}{\varrho^2}\,(z - z') \qquad y - y' = \frac{y'}{z'}\,\frac{\varrho^2 - c^2}{\varrho^2 - b^2}\,(z - z')$$

man erhält daraus:

$$\frac{\frac{x'}{z'}\,\frac{\varrho^2 - c^2}{\varrho^2}}{\sqrt{\frac{x'^2}{z'^2}\,\frac{(\varrho^2 - c^2)^2}{\varrho^4} + \frac{y'^2}{z'^2}\,\frac{(\varrho^2 - c^2)^2}{(\varrho^2 - b^2)^2} + 1}} \quad \text{oder gleich}$$

$$\frac{x'}{\varrho^2\sqrt{\frac{x'^2}{\varrho^4} + \frac{y'^2}{(\varrho^2 - b^2)^2} + \frac{z'^2}{(\varrho^2 - c^2)^2}}} = \frac{x'P}{\varrho^2}$$

Setzen wir nun für x' und P ihre Werthe aus 7. und 13., so erhalten wir

$$\frac{\mu\,\nu\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{b\,c\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}$$

Ebenso sind die Cosinus der Winkel, welche diese Normale mit den y und z Axen bildet, gleich

$$\frac{\varrho\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}} \quad \text{und} \quad \frac{\varrho\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}\sqrt{\varrho^2-b^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{\varrho^2-\mu^2}\sqrt{\varrho^2-\nu^2}}$$

Wir nennen die Winkel, welche die Normalen in den Ecken des Krümmungslinienvierecks ABCD mit den drei Axen bilden, a a' a''; b, b', b''; c, c', c''; d, d', d''; und erhalten nach dem Vorhergehenden folgende Zusammenstellung:

38. $$\cos a = \frac{\mu\nu\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{b\,c\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}$$

$$\cos a' = \frac{\varrho\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}$$

$$\cos a'' = \frac{\varrho\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}\sqrt{\varrho^2 - b^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}$$

Die Werthe der Cosinus der übrigen Winkel lassen sich aus diesen Gleichungen ohne Mühe ableiten; bei cos b, cos b', cos b'' ist statt ν ν' zu setzen; bei cos c, cos c', cos c'' ersetzt man μ und ν durch μ' und ν' und endlich bei cos d, cos d', cos d'' μ durch μ'. Hieraus erhalten wir folgende Gleichungen:

39. $\cos a \,.\, \cos c = \cos b \,.\, \cos d$; $\cos a' \,.\, \cos c' = \cos b' \,.\, \cos d'$; $\cos a'' \,.\, \cos c'' = \cos b'' \,.\, \cos d''$

Die Cosinus der Winkel, welche die Normalen in den vier Ecken eines Krümmungslinienvierecks einer centrischen Fläche zweiten Grads mit irgend einer von den drei Axen bilden, sind in Proportion.

Durch Vergleichung der Formeln 39 mit 13. und 32. ergeben sich folgende Sätze:

Wenn man auf die vier Tangentialebenen in den Ecken eines Krümmungslinienvierecks einer centrischen Fläche zweiten Grads vom Mittelpunkt aus Perpendikel fällt, so sind die Projektionen der Abschnitte dieser Perpendikel zwischen dem Mittelpunkt und ihrem Fußpunkt auf irgend einer der drei Axen in Proportion.

Wir haben oben gesehen, daß in jedem Punkt einer Fläche zwei Hauptkrümmungshalbmesser zu unterscheiden sind. Diejenigen, welche dem einen System der Krümmungslinien entsprechen, wollen wir Hauptkrümmungshalbmesser der ersten Art, und die andern Hauptkrümmungshalbmesser der zweiten Art nennen.

Die Projektionen der vier Hauptkrümmungshalbmesser der ersten oder der zweiten Art in den Ecken eines Krümmungs-

linienvierecks einer centrischen Fläche zweiten Grads auf den Axen sind in Proportion.

Wir eliminiren aus den beiden ersten von den Gleichungen 1 der Reihe nach z, y und x, und erhalten dann folgende Ausdrücke:

$$40.\quad \frac{x^2}{\frac{\varrho^2\mu^2}{c^2}} + \frac{y^2}{\frac{(\varrho^2-b^2)(\mu^2-b^2)}{c^2-b^2}} = 1 \quad \frac{x^2}{\frac{\varrho^2\mu^2}{b^2}} + \frac{z^2}{\frac{(\varrho^2-c^2)(c^2-\mu^2)}{c^2-b^2}} = 1$$

$$-\frac{y^2}{\frac{1}{b^2}(\varrho^2-b^2)(\mu^2-b^2)} + \frac{z^2}{\frac{1}{c^2}(\varrho^2-c^2)(c^2-\mu^2)} = 1$$

welche den Projektionen der Durchschnittslinie des Ellipsoids (ϱ) und des einmantligen Hyperboloids (μ) auf den xy, xz und yz Ebenen entsprechen. Die zwei ersten Gleichungen stellen Ellipsen vor, und die letzte ist eine Hyperbel. Durch Differenziation derselben nach ν erhalten wir mit Benützung der bekannten Relationen

$$bcx = \varrho\mu\nu$$
$$b\sqrt{c^2-b^2}.y = \sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}$$
$$c\sqrt{c^2-b^2}.z = \sqrt{\varrho^2-c^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}$$

$$41.\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\mu^2-b^2}.\nu.c}{\varrho\mu\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-b^2}} \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\sqrt{\varrho^2-c^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\nu.b}{\varrho\mu\sqrt{c^2-\nu^2}.\sqrt{c^2-b^2}}$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\sqrt{\varrho^2-c^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{b^2-\nu^2}\,b}{\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\nu^2}\,c}$$

Diese Gleichungen geben die Werthe der trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche die Projektionen der Tangente einer Krümmungslinie des Ellipsoids auf den xy, xz und yz Ebenen mit den Axen der x und y bilden. Diese Krümmungslinie ist der Durchschnitt der Flächen (ϱ) und (μ); die Tangente berührt sie im Punkt (xyz) oder ($\varrho\mu\nu$).

Wenn auf dem Ellipsoid ein Krümmungslinienviereck ABCD gezeichnet ist, so enthält die erste der Gleichungen 41 den Werth von $\frac{dy}{dx}$ für die Projektion der Geraden, welche die Krümmungslinie AB in A berührt. Setzt man in diesem Ausdruck der Reihe nach ν statt ν', μ' und ν' statt μ und ν, μ' für μ, so erhält man drei weitere Werthe von $\frac{dy}{dx}$, welche wir mit $\frac{dy}{dx_b}$, $\frac{dy}{dx_c}$, $\frac{dy}{dx_d}$ bezeichnen, während der erste Werth, worin die Buchstaben $\varrho\mu\nu$ ohne Accente enthalten sind, gleich $\frac{dy}{dx_a}$ gesetzt werden soll. Man findet nun ohne Mühe nachstehende Relationen:

$$42.\quad \frac{dy}{dx_a}\cdot\frac{dy}{dx_c} = \frac{dy}{dx_b}\cdot\frac{dy}{dx_d} \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx_a}:\frac{dy}{dx_b} = \frac{dy}{dx_d}:\frac{dy}{dx_c}$$

$\frac{dy}{dx_a}$, $\frac{dy}{dx_b}$, $\frac{dy}{dx_c}$, $\frac{dy}{dx_d}$ sind aber die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche die Projektionen der Tangenten von AB in A und B und der

Tangenten von CD in C und D auf der xy Ebene mit der x Axe bilden. Wir haben somit nachstehenden Lehrsatz:

Die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche die Projektionen der Tangenten der Krümmungslinien des einen Systems in den vier Ecken eines Krümmungslinienvierecks auf einer Coordinatenebene mit einer Axe bilden, sind in Proportion.

Aus 42. lassen sich die Ausdrücke für die Cosinus der drei Winkel a, a', a'' entwickeln, welche die Tangente einer Krümmungslinie des Ellipsoids (ϱ) mit den Axen der x, y und z bildet. Wir haben zunächst die Formel

$$\cos a = \frac{+\dfrac{1}{\frac{dz}{dx}}}{\sqrt{\dfrac{1}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(\frac{dz}{dy}\right)^2} + 1}}$$

anzuwenden. Indem wir die Werthe von $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ hier aus 42. einsetzen, erhalten wir

$$\cos a = \frac{\varrho\mu\sqrt{c^2-\nu^2}\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}}{\sqrt{\{\varrho^2\mu^2(c^2-\nu^2)(c^2-b^2)(b^2-\nu^2)+c^2(\varrho^2-b^2)(\mu^2-b^2)(c^2-\nu^2)\nu^2+b^2(\varrho^2-c^2)(c^2-\mu^2)(b^2-\nu^2)\nu^2\}}}$$

Die drei Summanden unter dem Wurzelzeichen des Nenners bezeichnen wir mit A, B, C, und führen die Multiplikationen aus, so ergeben sich die Gleichungen:

$$A = \varrho\mu\,(ccb - cc\nu - cbb + cb\nu - \nu cb + \nu c\nu + \nu bb - \nu b\nu)$$
$$B = c\nu\,(\varrho\mu c - \varrho\mu\nu - \varrho bc + \varrho b\nu - b\mu c + b\mu\nu + bbc - bb\nu)$$
$$C = b\nu\,(\varrho cb - \varrho c\nu - \varrho\mu b + \varrho\mu\nu - ccb + cc\nu + c\mu b - c\mu\nu)$$

Der Einfachheit wegen sind die Zahlen 2, welche die Quadrate angeben, nicht gesetzt worden. Nachdem diejenigen Ausdrücke, welche in der Summe A + B + C sich aufheben, weggelassen worden sind, bleibt noch

$$A + B + C = (\varrho\mu bc - \varrho\nu bc - c\nu b\mu + c\nu b\nu)(c - b)$$
$$A + B + C = bc\,(c - b)(\varrho\mu - \varrho\nu - \mu\nu + \nu\nu)$$
$$= bc\,(c - b)(\mu - \nu)(\varrho - \nu)$$

Wir erhalten auf solche Art, indem die Zahlen 2, welche die Quadrate angeben, wieder gesetzt werden:

$$\cos a = \frac{\varrho\mu\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{bc\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}$$

Für $\nu = b$ wird $\cos a = o$, $a = 90^0$. Die Tangente der Durchschnittslinie der Flächen (ϱ) und (μ) in dem Punkte, wo sie die zx Ebene trifft, ist senkrecht auf der x Axe.

Für $\nu = o$ wird $\cos a = 1$, $a = o$. Die Tangente in dem Punkte dieser Durchschnittslinie, wo sie die zy Ebene trifft, ist parallel zur x Axe. Mit Benützung der bekannten Gleichungen

$$\cos a' = \frac{+\frac{1}{\frac{dz}{dy}}}{\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{dz}{dy}\right)^2} + 1}} \quad \text{und}$$

$$\cos a'' = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{dz}{dy}\right)^2} + 1}}$$

erhalten wir auf analoge Weise $\cos a'$ und $\cos a''$ durch die fünf Größen ϱ, μ, ν, b, c ausgedrückt; man kann auf diese Art die Werthe aller Cosinus in den Formeln 18 — 20 finden.

Durch die Gleichungen 1 mit den Konstanten b und c ist ein System homofokaler Flächen bestimmt. Wir nehmen an, der Punkt (ϱ, μ, ν) nähere sich mehr und mehr dem Mittelpunkt und falle endlich mit ihm zusammen. Dann ist die kleine Axe des Ellipsoids (ϱ) gleich Null geworden, also $\varrho = c$ und die Gleichung desselben hat sich verwandelt in

43. $\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2 - b^2} = 1$

Ebenso ist die mittlere Axe von (μ) gleich Null, $\mu = b$, und statt des einmantligen Hyperboloids hat man die Hyperbel

44. $\frac{x^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2 - b^2} = 1$

Endlich ist auch die x Axe von (ν) verschwunden, $\nu = o$, und das zweimantlige Hyperboloid geht in die imaginäre Kurve über

45. $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$

43., 44., 45. sind die Gleichungen der Fokallinien, und zwar stellen die beiden ersten insbesondere die Fokalellipse und die Fokalhyperbel vor. Sie verhalten sich zu den Flächen zweiten Grades wie die Brennpunkte zu den Kegelschnitten.

Setzt man aber in 1. $\varrho = b = c$, so erhält man

$$z = o \qquad \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} = 1$$

welche Gleichungen sich auf homofokale Kegelschnitte beziehen. Sehr viele von den in diesem Paragraph und in den folgenden angeführten Sätzen können unmittelbar auf die analytische Geometrie der Ebene übertragen werden.

§. 22. Die homofokalen centrischen Flächen zweiten Grades. Fortsetzung.

Die Gleichung $\frac{\xi x}{\varrho^2} + \frac{\eta y}{\varrho^2 - b^2} + \frac{\zeta z}{\varrho^2 - c^2} = 1$ stellt die Polarebene des Punkts $(\xi \eta \zeta)$ in Beziehung auf die Fläche $\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2}$

Krümmungslinien gebildeten Vierecks parallel sind, bilden zwei Gruppen; das Produkt der vier Semidiameter der einen Art ist gleich dem Produkt der vier Semidiameter der andern Art.

Die Gleichungen 4 geben die Werthe der Coordinaten x, y, z eines Punkts (xyz) oder ($\varrho\mu\nu$) ausgedrückt durch die großen Halbaxen der drei durch ihn gehenden homofokalen Flächen (ϱ), (μ), (ν). Die Linie, welche vom Mittelpunkt nach diesem Punkt gezogen ist, bezeichnen wir mit H, so ist $H = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ oder nach 10.

26. $H = \sqrt{\varrho^2 + \mu^2 + \nu^2 - b^2 - c^2}$

Es seien H_a, H_b, H_c, H_d die vier Halbmesser, welche sich vom Mittelpunkt nach den vier Ecken des auf dem Ellipsoid (ϱ) von vier Krümmungslinien gebildeten Vierecks ziehen lassen, so haben wir nach dem Obigen folgende Relationen:

$H_a = \sqrt{\varrho^2 + \mu^2 + \nu^2 - b^2 - c^2}$ $\quad$ $H_b = \sqrt{\varrho^2 + \mu^2 + \nu'^2 - b^2 - c^2}$

$H_c = \sqrt{\varrho^2 + \mu'^2 + \nu'^2 - b^2 - c^2}$ $\quad$ $H_d = \sqrt{\varrho^2 + \mu'^2 + \nu^2 - b^2 - c^2}$

27. $H^2_a + H^2_c = H^2_b + H^2_d$

Die Quadratsumme der nach zwei Gegenecken eines von vier Krümmungslinien auf einer centrischen Fläche zweiten Grads gebildeten Vierecks gezogenen Halbmesser ist gleich der Quadratsumme der nach den beiden andern Gegenecken gezogenen Halbmesser.

Man denke sich noch ein zweites homofokales Ellipsoid (ϱ'), so bilden die Flächen (μ), (μ') und (ν), (ν') auf demselben das Krümmungslinienviereck A'B'C'D', bezeichnen wir die vom Mittelpunkt aus nach den Ecken desselben gezogenen Halbmesser mit H'_a, H'_b, H'_c, H'_d, so haben wir

$H'_a = \sqrt{\varrho'^2 + \mu^2 + \nu^2 - b^2 - c^2}$ $\quad$ $H'_b = \sqrt{\varrho'^2 + \mu^2 + \nu'^2 - b^2 - c^2}$

$H'_c = \sqrt{\varrho'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 - b^2 - c^2}$ $\quad$ $H'_d = \sqrt{\varrho'^2 + \mu'^2 + \nu^2 - b^2 - c^2}$

28. $H^2_a + H'^2_c = H^2_b + H'^2_d = H^2_c + H'^2_a = H^2_d + H'^2_b$

Die Quadratsummen von je zwei Halbmessern, welche nach zwei Gegenecken eines von sechs homofokalen Flächen gebildeten Parallelepipeds gezogen werden, sind einander gleich.

Es sei O der Mittelpunkt der homofokalen Flächen, oder der Anfangspunkt des Coordinatensystems. M ist ein beliebiger Punkt, dessen Coordinaten x, y, z sind. Die Cosinus der drei Winkel, welche die Linie OM mit den Axen bildet, sind

$$\frac{x}{OM}, \frac{y}{OM}, \frac{z}{OM}$$

Ebenso sind die Cosinus der drei Winkel, welche die nach einem andern Punkt M' gezogene Linie OM' mit den Axen bildet

$$\frac{x'}{OM'}, \frac{y'}{OM'}, \frac{z'}{OM'}$$

mithin ist

$$\cos MOM' = \frac{xx'}{OM \, . \, OM'} + \frac{yy'}{OM \, . \, OM'} + \frac{zz'}{OM \, . \, OM'}$$

Die Halbaxen der drei durch M gehenden homofokalen Flächen sind ϱ, μ, ν; ebenso die Halbaxen der drei durch M' gehenden homofokalen Flächen ϱ', μ', ν'.

Zufolge der Gleichung 26 ist

$$OM = \sqrt{\varrho^2 + \mu^2 + \nu^2 - b^2 - c^2} \qquad OM' = \sqrt{\varrho'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 - b^2 - c^2}$$

Die Werthe von x, y, z; x', y', z' erhalten wir aus den Gleichungen 7, 8, 9; mithin ist

$$29.\ \cos MOM' = \frac{1}{OM.OM'}\left\{\frac{\varrho\mu\nu\varrho'\mu'\nu'}{b^2c^2} + \frac{\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{\varrho'^2-b^2}\sqrt{\mu'^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu'^2}}{b^2(c^2-b^2)} \right.$$
$$\left. + \frac{\sqrt{\varrho^2-c^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}\sqrt{\varrho'^2-c^2}\sqrt{c^2-\mu'^2}\sqrt{c^2-\nu'^2}}{c^2(c^2-b^2)}\right\}$$

Wir betrachten wieder das Viereck ABCD, welches durch Krümmungslinien auf dem Ellipsoid (ϱ) gebildet ist. Die Punkte A B C D sind nach den durch sie gehenden homofokalen Flächen zu bezeichnen mit ($\varrho\mu\nu$), ($\varrho\mu\nu'$), ($\varrho\mu'\nu'$), ($\varrho\mu'\nu$).

Die Gleichung 29 führt nun sogleich auf die Formel

$$OA \,.\, OC \,.\, \cos AOC = OB \,.\, OD \,.\, \cos BOD$$

Nach einem bekannten geometrischen Lehrsatz ist:

$$AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2\,OA \,.\, OC \,.\, \cos AOC$$
$$BD^2 = OB^2 + OD^2 - 2\,OB \,.\, OD \,.\, \cos BOD$$

Da nun nach 27. $OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$ ist, so haben wir auch $AC^2 = BD^2$ oder

30. $AC = BD$

Jn jedem von vier Krümmungslinien auf einer centrischen Fläche zweiten Grads gebildeten Viereck ist die Entfernung von zwei Gegenecken gleich der Entfernung der beiden andern.

Sind z. B. A, B, C die Endpunkte der drei Axen eines Ellipsoids, und ist D ein Nabelpunkt, so ist ABCD ein spezielles Krümmungslinienviereck. Nun haben wir $AC^2 = \varrho^2 + \varrho^2 - c^2$ Die Coordinaten von D sind

$$x = \varrho\frac{b}{c} \qquad y = o \qquad z = \frac{1}{c}\sqrt{(\varrho^2 - c^2)(c^2 - b^2)} \quad \text{also}$$

$$BD^2 = \varrho^2 - b^2 + \varrho^2\frac{b^2}{c^2} + \frac{1}{c^2}(\varrho^2 - c^2)(c^2 - b^2) = \varrho^2 + \varrho^2 - c^2 \quad \text{oder}$$

$$AC = BD$$

Sechs homofokale Flächen schließen ein Parallelepiped ein, nämlich zwei Ellipsoide (ϱ) und (ϱ'); zwei einmantlige Hyperboloide (μ) und (μ'); zwei zweimantlige Hyperboloide (ν) und (ν'). Die Ecken A, B, C, D; A', B', C', D, sind nach den großen Halbaxen der drei durch jede derselben gehenden Flächen zu bezeichnen mit

($\varrho\mu\nu$) ($\varrho\mu\nu'$) ($\varrho\mu'\nu'$) ($\varrho\mu'\nu$)
($\varrho'\mu\nu$) ($\varrho'\mu\nu'$) ($\varrho'\mu'\nu'$) ($\varrho'\mu'\nu$)

Da nun nach 28.

$$OA^2 + OC'^2 = OB^2 + OD'^2 = OC^2 + OA'^2 = OD^2 + OB'^2 \text{ ist,}$$

ferner nach 29.

$$OA \,.\, OC' \,.\, \cos AOC' = OB \,.\, OD' \,.\, \cos BOD' = OC \,.\, OA' \,.\, \cos COA'$$
$$= OD \,.\, OB' \,.\, \cos DOB'$$

so ergibt sich bei Anwendung des genannten geometrischen Lehrsatzes auf die Dreiecke AOC', BOD', COA', DOB'

31. $AC' = BD' = CA' = DB'$

Jn jedem von sechs homofokalen Flächen eingeschlossenen Parallelepiped sind je zwei Gegenecken gleichweit von einander entfernt.

Es seien A, B, C die Endpunkte von drei Axen und D der Nabelpunkt auf dem Ellipsoid (ϱ), die gleiche Bedeutung haben die Buchstaben A′ B′ C′ D′ für das Ellipsoid (ϱ'), so ist ABCD A′B′C′D′ ein von sechs homofokalen Flächen eingeschlossenes Parallelepiped. Nun haben wir

$$AC'^2 = \varrho^2 + \varrho'^2 - c^2$$

Die Coordinaten von D′ sind

$$x' = \varrho' \frac{b}{c} \qquad y' = o \qquad z' = \frac{1}{c}\sqrt{(\varrho^2 - c^2)(c^2 - b^2)} \text{ also}$$

$$BD'^2 = \varrho^2 - b^2 + \varrho'^2 \frac{b^2}{c^2} + \frac{1}{c^2}(\varrho'^2 - c^2)(c^2 - b^2) \text{ oder}$$

$$AC' = BD'$$

Dieser Satz stammt von Ivory, und ist bekannt unter der Form: die Entfernung zweier Punkte im Raum (zweier Gegenecken unseres Parallelepipeds) ist gleich der Entfernung ihrer korrespondirenden Punkte (zweier andern Gegenecken dieses Parallelepipeds) (recueil des savants étrangers; Chasles: sur l' attraction des ellipsoides, IX. S. 629).

Der allgemeine Ausdruck für die beiden Hauptkrümmungshalbmesser auf einer centrischen Fläche zweiten Grades, deren Halbaxen a, b, c sind, im Punkt x, y, z ist (§. 18, 15)

$$\frac{1}{R} = \tfrac{1}{2} \frac{P^2}{a^2 b^2 c^2}\Big\{(a^2 + b^2 + c^2 - x^2 - y^2 - z^2) P$$

$$\pm \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 - x^2 - y^2 - z^2)^2 P^2 - 4a^2b^2c^2}\Big\}$$

P ist das vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene im Punkt (xyz) gefällte Perpendikel. Wenden wir diese Formel auf das Ellipsoid (ϱ) an, so haben wir folgende Werthe zu setzen:

$$P = \frac{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2 + \mu^2 + \nu^2 - b^2 - c^2$$

$$a = \varrho \qquad b = \sqrt{\varrho^2 - b^2} \qquad c = \sqrt{\varrho^2 - c^2}$$

Dadurch verwandelt sich obige Formel in

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2}\frac{1}{(\varrho^2-\mu^2)(\varrho^2-\nu^2)}\Big\{(\varrho^2 - \mu^2 + \varrho^2 - \nu^2)\frac{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}$$

$$\pm\sqrt{(\varrho^2 - \mu^2 + \varrho^2 - \nu^2)^2\frac{\varrho^2(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2)}{(\varrho^2-\mu^2)(\varrho^2-\nu^2)} - 4\varrho^2(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2)}\Big\}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2}\varrho\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\varrho^2-c^2}\left(\frac{\varrho^2-\mu^2+\varrho^2-\nu^2}{(\varrho^2-\mu^2)^{3/2}(\varrho^2-\nu^2)^{3/2}} \pm \frac{\mu^2 - \nu^2}{(\varrho^2-\mu^2)^{3/2}(\varrho^2-\nu^2)^{3/2}}\right)$$

oder, wenn wir die beiden Hauptkrümmungshalbmesser mit R und R′ bezeichnen, R > R′, d. h. R entspricht den Krümmungslinien μ und R′ den Krümmungslinien ν, so ist

$$32. \quad R = \frac{(\varrho^2 - \mu^2)^{1/2}(\varrho^2-\nu^2)^{3/2}}{\varrho\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\varrho^2-c^2}} \qquad R' = \frac{(\varrho^2-\mu^2)^{3/2}(\varrho^2-\nu^2)^{1/2}}{\varrho\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\varrho^2-c^2}}$$

In dem Krümmungslinienviereck ABCD sind im Ganzen für die vier Ecken acht Hauptkrümmungshalbmesser anzuführen. Wir bezeichnen diejenigen, welche den Krümmungslinien μ entsprechen, d. h. den durch die Hyperboloide

(μ) und (μ') auf dem Ellipsoid hervorgebrachten Schnitten, mit R_a, R_b, R_c, R_d. Ebenso bezeichnen wir die andern vier Hauptkrümmungshalbmesser, welche den Krümmungslinien ν entsprechen, oder den auf dem Ellipsoid durch die Hyperboloide (ν) und (ν') hervorgebrachten Schnitten mit R'_a, R'_b, R'_c, R'_d, so bestehen nachstehende Gleichungen, indem der Kürze wegen

$$\varrho \sqrt{\varrho^2 - b^2} \sqrt{\varrho^2 - c^2} = \lambda$$

gesetzt wird,

$$R_a = \frac{1}{\lambda} (\varrho^2 - \mu^2)^{1/2} (\varrho^2 - \nu^2)^{3/2} \qquad R_b = \frac{1}{\lambda} (\varrho^2 - \mu^2)^{1/2} (\varrho^2 - \nu'^2)^{3/2}$$

$$R_c = \frac{1}{\lambda} (\varrho^2 - \mu'^2)^{1/2} (\varrho^2 - \nu'^2)^{3/2} \qquad R_d = \frac{1}{\lambda} (\varrho^2 - \mu'^2)^{1/2} (\varrho^2 - \nu^2)^{3/2}$$

33. $R_a \,.\, R_c = R_b \,.\, R_d$

$$R'_a = \frac{1}{\lambda} (\varrho^2 - \mu^2)^{3/2} (\varrho^2 - \nu^2)^{1/2} \qquad R_b = \frac{1}{\lambda} (\varrho^2 - \mu^2)^{3/2} (\varrho^2 - \nu'^2)^{1/2}$$

$$R'_c = \frac{1}{\lambda} (\varrho^2 - \mu'^2)^{3/2} (\varrho^2 - \nu'^2)^{1/2} \qquad R_d = \frac{1}{\lambda} (\varrho^2 - \mu'^2)^{3/2} (\varrho^2 - \nu^2)^{1/2}$$

34. $R'_a \,.\, R'_c = R'_b \,.\, R'_d$

oder auch

$$R_a : R_b = R_d : R_c$$
$$R'_a : R'_b = R'_d : R'_c$$

In einem Krümmungslinienviereck auf einer centrischen Fläche zweiten Grades sind die vier Hauptkrümmungshalbmesser der einen Art in Proportion, sowie auch die vier Hauptkrümmungshalbmesser der andern Art. Diesen Satz hat zuerst Bertrand für das Ellipsoid aufgestellt.

In dem Punkt A treffen die drei homofokalen Flächen (ϱ), (μ), (ν) zusammen. Wir bezeichnen die beiden Hauptkrümmungshalbmesser des Ellipsoids (ϱ) wie oben mit $R > R'$; diejenigen des einmantligen Hyperboloids (μ) mit M (positiv) M' (negativ); und endlich diejenigen des zweimantligen Hyperboloids (ν) mit $N > N'$, so haben wir nachstehende Relationen, wo der Kürze wegen

$$\lambda' = \mu \sqrt{\mu^2 - b^2} \sqrt{c^2 - \mu^2} \qquad \lambda'' = \nu \sqrt{b^2 - \nu^2} \sqrt{c^2 - \nu^2}$$

gesetzt wird:

$$R = \frac{1}{\lambda} (\varrho^2 - \mu^2)^{1/2} (\varrho^2 - \nu^2)^{3/2} \qquad R' = \frac{1}{\lambda} (\varrho^2 - \mu^2)^{3/2} (\varrho^2 - \nu^2)^{1/2}$$

$$M = \frac{1}{\lambda'} (\varrho^2 - \mu^2)^{1/2} (\mu^2 - \nu^2)^{3/2} \qquad M' = -\frac{1}{\lambda'} (\varrho^2 - \mu^2)^{3/2} (\mu^2 - \nu^2)^{1/2}$$

$$N = \frac{1}{\lambda''} (\varrho^2 - \nu^2)^{3/2} (\mu^2 - \nu^2)^{1/2} \qquad N' = \frac{1}{\lambda''} (\varrho^2 - \nu^2)^{1/2} (\mu^2 - \nu^2)^{3/2}$$

35. $R' \,.\, M \,.\, N = - R \,.\, M' \,.\, N'$

Wenn sich in einem Punkte drei homofokale Flächen schneiden, so bilden die sechs Hauptkrümmungshalbmesser der Flächen in diesem Punkte zwei Gruppen; das Produkt der drei Halbmesser der ersten Gruppe vermehrt um das Produkt der Halbmesser der zweiten Gruppe ist gleich Null.

$$\frac{R}{R'} = \frac{\varrho^2 - \nu^2}{\varrho^2 - \mu^2} \qquad \frac{M}{M'} = -\frac{\mu^2 - \nu^2}{\varrho^2 - \mu^2} \qquad \frac{N}{N'} = \frac{\varrho^2 - \nu^2}{\mu^2 - \nu^2}$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich noch folgende weitere ableiten:

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} = 1$$

Die Polarebene des Punkts ($\xi\,\eta\,\zeta$) in Beziehung auf (ϱ) hat die Gleichung

$$\frac{\xi x}{\varrho^2} + \frac{\eta y}{\varrho^2 - b^2} + \frac{\zeta z}{\varrho^2 - c^2} = 1$$

Hier sind x, y, z die Coordinaten der Polarebene. Bewegt sich nun der Punkt auf der Geraden

6. $\xi + \alpha\zeta = m \qquad \eta + \beta\zeta = n$

so erhält man durch Verbindung dieser Gleichungen mit der unmittelbar vorhergehenden

$$\frac{mx}{\varrho^2} + \frac{ny}{\varrho^2 - b^2} - \left(\frac{\alpha x}{\varrho^2} + \frac{\beta y}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z}{\varrho^2 - c^2}\right)\zeta = 1$$

Soll diese Gleichung von ζ unabhängig sein, so müssen die Relationen statt haben:

$$\frac{\alpha x}{\varrho^2} + \frac{\beta y}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z}{\varrho^2 - c^2} = 0 \qquad \frac{mx}{\varrho^2} + \frac{ny}{\varrho^2 - b^2} = 1$$

oder auch

$$7. \quad x + \frac{n\dfrac{\varrho^2}{\varrho^2 - c^2}}{\alpha n - \beta m} z = -\frac{\beta\varrho^2}{\alpha n - \beta m} \qquad y + \frac{m\dfrac{\varrho^2 - b^2}{\varrho^2 - c^2}}{\alpha n - \beta m} z = \frac{\alpha(\varrho^2 - b^2)}{\alpha n - \beta m}$$

Gegeben ist die Fläche (ϱ) $\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} = 1$; es sollen die Relationen gesucht werden, welche zwischen den Konstanten der Ebene $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ stattfinden müssen, damit sie die Fläche in einer Krümmungslinie berühre. Wir wollen annehmen, es sei dieß die Krümmungslinie, welche auf der Fläche (ϱ) durch das homofokale Hyperboloid (μ). $\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 1$ hervorgebracht wird. Die Projektionen dieser Linie auf den xy und xz Ebenen sind

$$\frac{x^2}{\dfrac{\varrho^2\mu^2}{c^2}} + \frac{y^2}{\dfrac{(\varrho^2 - b^2)(\mu^2 - b^2)}{c^2 - b^2}} = 1 \qquad \frac{x^2}{\dfrac{\varrho^2\mu^2}{b^2}} + \frac{z^2}{\dfrac{(\varrho^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}{c^2 - b^2}} = 1$$

die Coordinaten der Durchschnittspunkte mit den Axen von der Ebene $\frac{\xi x}{\varrho^2} + \frac{\eta y}{\varrho^2 - b^2} + \frac{\zeta z}{\varrho^2 - c^2} = 1$, welche das Ellipsoid ($\varrho$) im Punkt (x y z) berührt, bezeichnen wir wieder, wie oben, mit x′, y′, z′ und erhalten

$$x' = \frac{\varrho^2}{x}, \qquad y' = \frac{\varrho^2 - b^2}{y}, \qquad z' = \frac{\varrho^2 - c^2}{z}$$

Durch Substitution der Werthe der Coordinaten des Berührungspunkts x, y, z in den vorhergehenden beiden Gleichungen findet man

$$\frac{\varrho^2}{x'^2\dfrac{\mu^2}{c^2}} + \frac{\varrho^2 - b^2}{y'^2\dfrac{\mu^2 - b^2}{c^2 - b^2}} = 1 \qquad \frac{\varrho^2}{x'^2\dfrac{\mu^2}{b^2}} + \frac{\varrho^2 - c^2}{z'^2\dfrac{c^2 - \mu^2}{c^2 - b^2}} = 1$$

Da die Ebene $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ mit der Tangentialebene zusammenfallen soll, so sind die Coordinaten ihrer Durchschnittspunkte mit den Axen auch gleich x', y' und z'; aus der Gleichung $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ erhalten wir $x' = \frac{1}{\alpha}$, $y' = \frac{1}{\beta}$, $z' = \frac{1}{\gamma}$ und mit Benützung der beiden vorhergehenden Formeln

$$\frac{\varrho^2 \alpha^2}{\frac{\mu^2}{c^2}} + \frac{(\varrho^2 - b^2)\beta^2}{\frac{\mu^2 - b^2}{c^2 - b^2}} = 1 \qquad \frac{\varrho^2 \alpha^2}{\frac{\mu^2}{b^2}} + \frac{(\varrho^2 - c^2)\gamma^2}{\frac{c^2 - \mu^2}{c^2 - b^2}} = 1$$

Dieß ist die Bedingungsgleichung, welche zwischen den Konstanten der Ebene $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ stattfinden muß, damit sie das Ellipsoid (ϱ) in einer Krümmungslinie tangire. Soll die Berührung auf der andern Krümmungslinie stattfinden, welche durch den Schnitt der Fläche (ϱ) und des zweimantligen Hyperboloids (ν) $\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1$ entsteht, so müssen die Bedingungsgleichungen

$$\frac{\varrho^2 \alpha^2}{\frac{\nu^2}{c^2}} - \frac{(\varrho^2 - b^2)\beta^2}{\frac{b^2 - \nu^2}{c^2 - b^2}} = 1 \qquad \frac{\varrho^2 \alpha^2}{\frac{\nu^2}{b^2}} + \frac{(\varrho^2 - c^2)\gamma^2}{\frac{c^2 - \nu^2}{c^2 - b^2}} = 1$$

erfüllt werden.

Es ist nun noch eine zweite homofokale Fläche (ϱ_0)

$$\frac{x^2}{\varrho_0^2} + \frac{y^2}{\varrho_0^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho_0^2 - c^2} = 1$$

gegeben. Die Coordinaten des Pols der Ebene $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ in Beziehung auf diese Fläche sind nach 1.

$$x = \alpha \varrho_0^2 \quad y = \beta(\varrho_0^2 - b^2) \quad z = \gamma(\varrho_0^2 - c^2)$$

Substituiren wir hieraus die Werthe von α, β und γ in die vier Bedingungsgleichungen, so erhalten wir

8. $$\frac{x^2}{\frac{\varrho_0^4}{\varrho^2}\frac{\mu^2}{c^2}} + \frac{y^2}{\frac{(\varrho_0^2 - b^2)^2}{\varrho^2 - b^2}\frac{\mu^2 - b^2}{c^2 - b^2}} = 1 \qquad \frac{x^2}{\frac{\varrho_0^4}{\varrho^2}\frac{\mu^2}{b^2}} + \frac{z^2}{\frac{(\varrho_0^2 - c^2)^2}{\varrho^2 - c^2}\frac{c^2 - \mu^2}{c^2 - b^2}} = 1$$

$$\frac{x^2}{\frac{\varrho_0^4}{\varrho^2}\frac{\nu^2}{c^2}} - \frac{y^2}{\frac{(\varrho_0^2 - b^2)^2}{\varrho^2 - b^2}\frac{b^2 - \nu^2}{c^2 - b^2}} = 1 \qquad \frac{x^2}{\frac{\varrho_0^4}{\varrho^2}\frac{\nu^2}{b^2}} + \frac{z^2}{\frac{(\varrho_0^2 - c^2)^2}{\varrho^2 - c^2}\frac{c^2 - \nu^2}{c^2 - b^2}} = 1$$

Diese Gleichungen gehören der Linie an, welche der Pol in Beziehung auf das Ellipsoid (ϱ_0) derjenigen Ebene beschreibt, welche das homofokale Ellipsoid (ϱ) in einer Krümmungslinie tangirt. Diese Kurve liegt also auf dem Durchschnitt elliptischer oder hyperbolischer Cylinder mit der Fläche

$$\frac{x^2}{\frac{\varrho_0^4}{\varrho^2}} + \frac{y^2}{\frac{(\varrho_0^2 - b^2)^2}{\varrho^2 - b^2}} + \frac{z^2}{\frac{(\varrho_0^2 - c^2)^2}{\varrho^2 - c^2}} = 1$$

welche die Polarfläche von (ϱ) in Beziehung auf (ϱ_0) ist. Wir haben somit den Satz:

G e g e b e n s i n d z w e i h o m o f o k a l e c e n t r i s c h e F l ä c h e n z w e i t e n G r a d e s , u n d e i n e E b e n e , w e l c h e d i e e r s t e F l ä c h e i n e i n e r K r ü m m u n g s l i n i e t a n g i r t . D e r P o l d i e s e r E b e n e h i n s i c h t l i c h d e r

zweiten Fläche beschreibt eine Kurve, die sich auf den Hauptebenen in concentrischen Kegelschnitten projicirt.

Die Gleichungen 6 und 7 sind diejenigen von zwei konjugirten Geraden hinsichtlich der Fläche (ϱ). Der Cosinus des Winkels derselben ist gegeben durch den Ausdruck

$$9. \quad \frac{\alpha n \varrho^2 - \beta m(\varrho^2 - b^2) + (\beta m - \alpha n)(\varrho^2 - c^2)}{\sqrt{1^2 + \alpha^2 + \beta^2}\sqrt{n^2\varrho^2 + m^2(\varrho^2 - b^2)^2 + (\beta m - \alpha n)(\varrho^2 - c^2)^2}}$$

Soll dieser Winkel ein Rechter sein, so muß

$$\alpha n \varrho^2 - \beta m(\varrho^2 - b^2) + (\beta m - \alpha n)(\varrho^2 - c^2) = 0$$

werden, oder nach einigen Reduktionen

$$10. \quad \alpha n c^2 - \beta m(c^2 - b^2) = 0$$

Dieser Ausdruck ist von ϱ unabhängig; würde man den Winkel gesucht haben, welchen die Gerade 6 mit ihrer konjugirten Geraden hinsichtlich einer der beiden Flächen

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1$$

bildet, so wäre man auf einen ähnlichen Ausdruck gekommen, wie 9., und die Bedingung, daß dieser Winkel ein Rechter sein soll, ist gleichfalls in der Gleichung 10 enthalten. Wenn nun eine Gerade $\xi + \alpha\zeta = m$ und $\eta + \beta\zeta = n$ und ein System von homofokalen Flächen durch die Konstanten b und c gegeben ist, so müssen die vier Konstanten in der Gleichung der Geraden der Relation 10 genügen, wenn ihre konjugirten Geraden in Beziehung auf die homofokalen Flächen rechte Winkel mit ihr bilden sollen. Wir haben somit folgenden Satz:

Wenn eine Gerade auf ihrer konjugirten hinsichtlich einer centrischen Fläche zweiten Grades senkrecht steht, so steht sie auch senkrecht auf ihren konjugirten Geraden hinsichtlich aller übrigen homofokalen Flächen.

Die Tangente einer Krümmungslinie steht senkrecht auf ihrer konjugirten Tangente; mithin stehen die Tangenten einer Krümmungslinie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades senkrecht auf allen ihren konjugirten Geraden.

Da sich zu jeder Geraden, die nicht durch den Mittelpunkt eines Systems von homofokalen Flächen geht, wenigstens eine unter diesen Flächen finden läßt, welche sie berührt, so folgt daraus, daß diese Gerade eine Tangente der Krümmungslinie auf dieser Fläche sein muß, wenn sie die Eigenschaft haben soll, auf ihren konjugirten Geraden hinsichtlich der homofokalen Flächen senkrecht zu stehen:

Die Tangenten der Krümmungslinien sind die einzigen Geraden, welche auf ihren konjugirten Geraden senkrecht stehen.

Wenn man die Relationen 2, 6 und 10 vergleicht, so findet man, daß die Gerade $x - \frac{\alpha}{\gamma} z = \alpha c^2 \quad y - \frac{\beta}{\gamma} z = \beta(c^2 - b^2)$, welche die Pollinie der Ebene $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 1$ ist, vermöge der in ihren Gleichungen vorkommenden Konstanten der Bedingung 10 Genüge leistet, wir haben somit den Satz:

Wenn man ein System von homofokalen Flächen durch eine Transversalebene schneidet, so ist die Gerade, auf welcher die Pole dieser Ebene hinsichtlich der homofokalen Flächen liegen,

die Tangente einer Krümmungslinie, und steht demgemäß auf ihren sämmtlichen konjugirten Geraden senkrecht.

Wir wollen nun annehmen, daß die Tangente einer Krümmungslinie auf einer Fläche zweiten Grades noch eine zweite homofokale Fläche berühre; da diese Tangente auf allen ihren konjugirten Geraden hinsichtlich der homofokalen Flächen des Systems senkrecht steht, so steht sie auch senkrecht auf ihrer konjugirten Geraden hinsichtlich der zweiten homofokalen Fläche, die sie berührt. Diese Gerade ist aber ebenfalls eine Tangente der Fläche, mithin ist sie eine Tangente der zweiten durch den Berührungspunkt gehenden Krümmungslinie; denn wenn zwei durch einen Punkt einer Fläche gehende konjugirte Tangenten sich rechtwinklig kreuzen, so sind sie die Tangenten der Krümmungslinien. Hieraus folgt also:

Wenn die Tangente einer Krümmungslinie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades eine zweite homofokale Fläche berührt, so berührt sie dieselbe gleichfalls in einer Krümmungslinie.

Die Tangente einer Krümmungslinie ist zugleich Pollinie, d. h. sie enthält nach dem früheren die Pole derjenigen Transversalebene, welche im Berührungspunkt senkrecht auf die Tangente gezogen wird. Da aber einer Pollinie nur eine einzige solche Transversal- oder Polarebene entspricht, so müssen die Berührungspunkte einer gemeinschaftlichen Tangente von zwei Krümmungslinien zweier homofokaler Flächen zusammenfallen; der Berührungspunkt ist also beiden Flächen gemeinschaftlich, oder er gehört ihrer Durchschnittslinie an. Mithin ist diese Durchschnittslinie die Krümmungslinie von beiden homofokalen Flächen; somit wäre das bekannte Theorem bewiesen:

Zwei homofokale Flächen verschiedener Art schneiden sich in ihren Krümmungslinien.

Nachdem dieses nachgewiesen ist, so läßt sich mit Hülfe des vorigen Satzes leicht zeigen, daß es unmöglich ist, wenn eine Gerade zwei homofokale Flächen in ihren Krümmungslinien berührt, daß der Berührungspunkt nicht zugleich der Durchschnittspunkt ist. Denn im andern Fall hätte man zwei verschiedene Berührungspunkte, und da sich in jeder Krümmungslinie zwei homofokale Flächen schneiden, so müßte die genannte Tangente im Ganzen vier homofokale Flächen berühren. Nun schließen die homofokalen Flächen einer Art, z. B. die Ellipsoide, einander gegenseitig ein, können also keine gemeinschaftliche Tangente haben. Da es nur drei verschiedene Arten im Ganzen gibt, so müßten unter den vier genannten Flächen mindestens zwei gleichartige sein. Die Tangente einer Krümmungslinie kann also nur zwei homofokale Flächen zugleich berühren. Die Eigenschaft homofokaler Flächen, sich in ihren Krümmungslinien zu schneiden, ist ein spezieller Fall eines allgemeinen Theorems, welches Dupin aufstellte (§. 16):

Drei Flächen, welche sich in allen Punkten ihrer Durchschnittslinie senkrecht treffen, schneiden sich in ihren Krümmungslinien.

§. 23. Die Krümmungslinien der centrischen homofokalen Flächen.

Die Gleichungen der Krümmungslinien auf den homofokalen Flächen lassen sich auf sehr verschiedene Arten darstellen. Zunächst erhält man durch Elimination von z, y, x aus je zwei der Gleichungen

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1$$

1. $$\frac{x^2}{\frac{\varrho^2\mu^2}{c^2}} + \frac{y^2}{\frac{(\varrho^2-b^2)(\mu^2-b^2)}{c^2-b^2}} = 1 \qquad \frac{x^2}{\frac{\varrho^2\mu^2}{b^2}} + \frac{z^2}{\frac{(\varrho^2-c^2)(c^2-\mu^2)}{c^2-b^2}} = 1$$

$$-\frac{y^2}{\frac{1}{b^2}(\varrho^2-b^2)(\mu^2-b^2)} + \frac{z^2}{\frac{1}{c^2}(\varrho^2-c^2)(c^2-\mu^2)} = 1$$

2. $$\frac{x^2}{\frac{\varrho^2\nu^2}{c^2}} - \frac{y^2}{\frac{(\varrho^2-b^2)(b^2-\nu^2)}{c^2-b^2}} = 1 \qquad \frac{x^2}{\frac{\varrho^2\nu^2}{b^2}} + \frac{z^2}{\frac{(\varrho^2-c^2)(c^2-\nu^2)}{c^2-b^2}} = 1$$

$$+\frac{y^2}{\frac{1}{b^2}(\varrho^2-b^2)(b^2-\nu^2)} + \frac{z^2}{\frac{1}{c^2}(\varrho^2-c^2)(c^2-\nu^2)} = 1$$

3. $$\frac{x}{\frac{\mu^2\nu^2}{c^2}} - \frac{y^2}{\frac{(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)}{c^2-b^2}} = 1 \qquad \frac{x^2}{\frac{\mu^2\nu^2}{b^2}} - \frac{z^2}{\frac{(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)}{c^2-b^2}} = 1$$

$$+\frac{y^2}{\frac{1}{b^2}(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)} - \frac{z^2}{\frac{1}{c^2}(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)} = 1$$

Die Gleichungen 1, 2 und 3 beziehen sich auf die Projektionen der Krümmungslinien der Flächen (ϱ), (μ) und (ν) auf den xy, xz und zy Ebenen; 1. und 2. sind die Krümmungslinien der Fläche (ϱ), 1. und 3. diejenigen der Fläche (μ), 2. und 3. diejenigen der Fläche (ν). Diese Kurven sind entweder Ellipsen oder Hyperbeln. Die Halbaxen derselben, welche mit den Coordinatenaxen zusammenfallen, bezeichnen wir mit X, Y; X', Z; Y', Z'; setzen also $X^2 = \frac{\varrho^2\mu^2}{c^2}$, $Y^2 = \frac{(\varrho^2 - b^2)(\mu^2 - b^2)}{c^2 - b^2}$; $X'^2 = \frac{\varrho^2\mu^2}{b^2}$,

$$Z^2 = \frac{(\varrho^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}{c^2 - b^2}; \qquad Y'^2 = \frac{1}{b^2}(\varrho^2 - b^2)(\mu^2 - b^2),$$

$Z'^2 = \frac{1}{c^2}(\varrho^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)$, so erhalten wir durch Elimination von μ folgende Gleichungen:

4. $$\frac{X^2}{\frac{\varrho^2 b^2}{c^2}} - \frac{Y^2}{\frac{\varrho^2 - b^2}{c^2 - b^2} b^2} = 1 \qquad \frac{X'^2}{\varrho^2 \frac{c^2}{b^2}} + \frac{Z^2}{\frac{\varrho^2 - c^2}{c^2 - b^2} c^2} = 1$$

$$\frac{Y'^2}{\frac{(\varrho^2 - b^2)(c^2 - b^2)}{b^2}} + \frac{Z'^2}{\frac{(\varrho^2 - c^2)(c^2 - b^2)}{c^2}} = 1$$

Diese Kurven, welche Monge hyerboles et ellipses auxiliaires nennt, dienen zur Construction der Axen derjenigen Ellipsen und Hyperbeln, in welchen sich die Krümmungslinien des Elipsoids (ϱ) auf den xy, xz und zy Ebenen projiciren. Für die hyperboles et ellipses auxiliaires, welche zur

Construktion der Projektion der Krümmungslinien des einmantligen Hyperboloids (μ) und des zweimantligen (ν) auf den Coordinatenebenen dienen, ergeben sich dieselben Gleichungen.

Gleichwie bei rechtwinkligen Coordinaten ein Punkt im Raum als der Durchschnitt von drei Ebenen angesehen wird, die mit den Coordinatenaxen parallel sind und sich rechtwinklig schneiden, so wird bei elliptischen Coordinaten ein Punkt im Raum als der Durchschnitt von drei homofokalen Flächen betrachtet, die sich ebenfalls rechtwinklig schneiden. Die elliptischen Coordinaten sind die großen Halbaxen ϱ, μ, ν der Flächen (ϱ), (μ), (ν). Bewegt sich der Punkt so, daß er immer auf dem Ellipsoid (ϱ) bleibt, so findet die Gleichung statt $\varrho = \text{const.}$; bleibt er zugleich auf dem Hyperboloid (ν), so muß er außerdem noch die Gleichung $\mu = \text{const.}$ befriedigen. Diese zwei Relationen entsprechen also dem Durchschnitt beider Flächen, d. h. einer Krümmungslinie entweder des Ellipsoids oder des Hyperboloids. Wir haben nun für die Krümmungslinien des Ellipsoids, des ein- und des zweimantligen Hyperboloids die nachstehenden drei Paare von Gleichungen:

5. $\mu = \text{const.} \quad \nu = \text{const.}$
   $\varrho = \text{const.} \quad \varrho = \text{const.}$
6. $\varrho = \text{const.} \quad \nu = \text{const.}$
   $\mu = \text{const.} \quad \mu = \text{const.}$
7. $\varrho = \text{const.} \quad \mu = \text{const.}$
   $\nu = \text{const.} \quad \nu = \text{const.}$

$D = \sqrt{\varrho^2 - \mu^2}$ und $D' = \sqrt{\varrho^2 - \nu^2}$ sind die Semidiameter des Ellipsoids, welche den Tangenten der beiden durch den Punkt (ϱ, μ, ν) auf dem Ellipsoid (ϱ) gehenden Krümmungslinien parallel sind, und zwar ist D parallel der Tangente der Krümmungslinie $\varrho = \text{const.}$ $\nu = \text{const.}$, und D' parallel der Tangente der Krümmungslinie $\varrho = \text{const.}$ $\mu = \text{const.}$ Das vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene von (ϱ) gefällte Perpendikel wurde P genannt. Die Gleichung 13 des §. 21 gibt den Werth

$$P = \frac{\varrho \sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}$$

Hieraus findet man nun sogleich, daß bei der Krümmungslinie $\varrho = \text{const.}$ $\mu = \text{const.}$ das Produkt $P.D' = \dfrac{\varrho \sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}}$ auch konstant ist, und daß bei der Krümmungslinie $\varrho = \text{const.}$ $\nu = \text{const.}$ das Produkt $P.D = \dfrac{\varrho \sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}$ konstant ist. Aehnliche Resultate würde man für die Krümmungslinien der beiden andern homofokalen Flächen gefunden haben.

8. $P.D = \text{const.}$

Diese weitere Form für die Gleichung der Krümmungslinien enthält folgendes Theorem (von Joachimsthal, de curvis curvaturae et lineis brevissimis in superficiebus secundi gradus, Crelle XXVI. S. 155):

Längs einer Krümmungslinie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades ist das Produkt des vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene gefällten Perpendikels und desjenigen Semi-

diameters, welcher der Tangente der Krümmungslinie parallel ist, konstant.

Derjenige Hauptkrümmungshalbmesser des Ellipsoids (ϱ), welcher der Krümmungslinie $\varrho = \text{const.}$ $\mu = \text{const.}$ entspricht, hat den Werth

$$R = \frac{(\varrho^2 - \mu^2)^{1/2} (\varrho^2 - \nu^2)^{3/2}}{\varrho \sqrt{\varrho^2 - b^2} \sqrt{\varrho^2 - c^2}} \quad \frac{R}{D'^3} = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}}{\varrho \sqrt{\varrho^2 - b^2} \sqrt{\varrho^2 - c^2}} = \text{const.}$$

Für die Krümmungslinien $\varrho = \text{const.}$ $\nu = \text{const.}$ würde man gefunden haben

$$\frac{R'}{D^3} = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}}{\varrho \sqrt{\varrho^2 - b^2} \sqrt{\varrho^2 - c^2}}$$

9. $\frac{R}{D^3} = \text{const.}$

Der Satz, welcher in dieser Krümmungsliniengleichung enthalten ist, läßt sich so aussprechen:

Längs einer Krümmungslinie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades ist das Verhältniß des Hauptkrümmungshalbmessers zur dritten Potenz des der Tangente parallelen Semidiameters konstant.

Aus den angeführten Formeln finden wir ohne Mühe die weitern

$$R \,.\, P^3 = \frac{\varrho^2 (\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}{\varrho^2 - \mu^2} \qquad R' \,.\, P^3 = \frac{\varrho^2 (\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}{\varrho^2 - \nu^2},$$

also sind auch diese Produkte für die Krümmungslinien ϱ und $\mu = \text{const.}$ ϱ und $\nu = \text{const.}$ konstant.

10. $R \,.\, P^3 = \text{const.}$

Diese Formel kann ebenfalls als die Gleichung der Krümmungslinien angesehen werden und führt demgemäß zu dem Satz:

Längs einer Krümmungslinie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades ist das Produkt des derselben entsprechenden Hauptkrümmungshalbmessers und der dritten Potenz des Abstandes der Tangentialebene vom Mittelpunkt konstant.

11. $\frac{R}{R'} = \frac{\varrho^2 - \nu^2}{\varrho^2 - \mu^2} = \frac{D'^2}{D^2}$

In jedem Punkt einer centrischen Fläche zweiten Grades ist das Verhältniß der beiden Hauptkrümmungshalbmesser gleich dem reciproken Werth des Verhältnisses der Quadrate von den Semidiametern, welche den entsprechenden Krümmungslinien parallel sind.

Der vom Mittelpunkt nach dem Punkt (ϱ, μ, ν) gezogene Halbmesser hat zufolge der Gleichung 10 des §. 21 den Werth $H = \sqrt{\varrho^2 + \mu^2 + \nu^2 - b^2 - c^2}$ also

$$H^2 - \nu^2 = \varrho^2 + \mu^2 - b^2 - c^2$$

Der Ausdruck rechts ist längs der Krümmungslinie $\varrho = \text{const.}$ $\mu = \text{const.}$ konstant; also haben wir die Formel:

12. $H^2 - \nu^2 = \text{const.}$

Bei einer Krümmungslinie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades ist die Differenz der Quadrate des nach einem Punkt derselben gezogenen Halbmessers und der großen Halb-

axe von derjenigen homofokalen Fläche, welche die Krümmungslinie in dem Punkte senkrecht schneidet, konstant.

Die Gleichungen 7, 8, 9 des §. 21 führen noch zu einem weiteren Satze; man erhält daraus

$$13. \quad \frac{x}{\nu} = \frac{\varrho\mu}{bc}; \quad \frac{y}{\sqrt{b^2 - \nu^2}} = \frac{\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}};$$

$$\frac{z}{\sqrt{c^2 - \nu^2}} = \frac{\sqrt{\varrho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}$$

Die Ausdrücke rechts von diesen Gleichungen sind konstant längs der Krümmungslinien $\varrho = \text{const.}$ $\mu = \text{const.}$, also sind es auch die linken Ausdrücke:

Bei einer Krümmungslinie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades ist das Verhältniß der Abscisse eines Punktes zu derjenigen Halbaxe der die Krümmungslinie in diesem Punkte senkrecht schneidenden homofokalen Fläche, welche mit dieser Abscisse gleiche Richtung hat, konstant.

Eine andere Form für die Gleichung der Krümmungslinien läßt sich noch auf folgende Art finden: Man nehme eine weitere homofokale Fläche (ϱ_0) an, $\frac{x^2}{\varrho_0^2} + \frac{y^2}{\varrho_0^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho_0^2 - c^2} = 1$, und nenne wie oben den Abstand der Tangentialebene von (ϱ) von ihrem Pol hinsichtlich dieser neuen Fläche $\mathfrak{P}$, so ist nach §. 22

$$P \,.\, \mathfrak{P} = \varrho_0^2 - \varrho^2 \qquad \mathfrak{P} = \frac{\varrho_0^2 - \varrho^2}{P} \text{ oder}$$

$$\mathfrak{P} = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}\,(\varrho_0^2 - \varrho^2)}{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}$$

$$\frac{\mathfrak{P}}{D} = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}\,(\varrho_0^2 - \varrho^2)}{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}} \qquad \frac{\mathfrak{P}}{D'} = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\,(\varrho_0^2 - \varrho^2)}{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}$$

Bei einer Krümmungslinie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades ist das Verhältniß des Abstandes der Tangentialebene von ihrem Pol hinsichtlich einer homofokalen Fläche zu dem Semidiameter der gegebenen Fläche, welcher der Tangente der Krümmungslinie parallel ist, konstant.

Bei der Wahl der homofokalen Fläche (ϱ_0) ist man unbeschränkt; man kann auch die Flächen (μ) und (ν) nehmen; der obige Ausdruck für $\mathfrak{P}$ gibt alsdann die Werthe

$$\mathfrak{P} = -\frac{(\varrho^2 - \mu^2)^{3/2}\,(\varrho^2 - \nu^2)^{1/2}}{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}} \qquad \mathfrak{P}' = -\frac{(\varrho^2 - \mu^2)^{1/2}\,(\varrho^2 - \nu^2)^{3/2}}{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}$$

$$\mathfrak{P} = -R' \text{ und } \mathfrak{P}' = -R$$

Wir wollen nun an das Ellipsoid (ϱ) eine Tangentialebene legen im Punkt (ϱ, μ, ν). Die Abstände der Pole dieser Ebene hinsichtlich der Flächen (μ) und (ν) sind so groß nach den vorstehenden Gleichungen, als die beiden Hauptkrümmungshalbmesser von (ϱ). Es läßt sich weiter zeigen, daß die Pole, π und π', auf der Normale von (ϱ) liegen, und daß sie mithin mit den beiden Krümmungsmittelpunkten zusammenfallen.

Der Beweis beruht auf dem Satz, daß wenn man einer beliebigen Fläche einen Berührungskegel umschreibt, die Tangente der Berührungskurve und die durch den Berührungspunkt gehende Erzeugende des Kegels konjugirte Tangenten der Fläche sind. Die durch (ϱ, μ, ν) gehende Tangentialebene von (ϱ) schneide das Hyperboloid (μ) in einer Kurve C, und das andere Hyperboloid (ν) in der Kurve C'. Die Tangenten von C und C' im Punkt (ϱ, μ, ν) stehen auf einander senkrecht, weil die Flächen (μ) und (ν) sich senkrecht schneiden. Diese Tangenten berühren zugleich die Krümmungslinien von (μ) und (ν), mithin stehen sie senkrecht auf der konjugirten Tangente dieser Flächen, welche die Normale von (ϱ) ist; nach dem angeführten Satz fällt diese Normale also mit den Erzeugenden der Berührungskegel zusammen, somit liegen die Spitzen dieser Berührungskegel, oder die Pole π und π' der Tangentialebene von (ϱ) hinsichtlich der Flächen (μ) und (ν) auf der genannten Normale. Auf andere Art wurde die gleiche Eigenschaft im vorigen §. nachgewiesen. Wir haben also folgenden Satz:

Die beiden Krümmungsmittelpunkte, welche den Hauptkrümmungshalbmessern in einem Punkt einer centrischen Fläche zweiten Grades entsprechen, sind die Pole der Tangentialebene dieses Punkts hinsichtlich der zwei durch denselben gehenden homofokalen Flächen.

Die Pole aller Ebenen, welche eine centrische Fläche zweiten Grades in einer Krümmungslinie berühren, hinsichtlich der durch diese Krümmungslinie gehenden homofokalen Fläche, liegen auf der Fläche der Krümmungsmittelpunkte der ersteren Fläche; ferner liegen sie noch auf der Polarfläche und endlich auf elliptischen oder hyperbolischen Cylindern. Die Pole in Beziehung auf (μ) der Tangentialebenen, welche (ϱ) in der Durchschnittslinie mit (μ) berühren, haben nach 8. des vorigen §. diese Gleichungen:

14. $$\frac{\frac{x^2}{\mu^6}}{\varrho^2 c^2} + \frac{\frac{y^2}{(\mu^2 - b^2)^3}}{(\varrho^2 - b^2)(c^2 - b^2)} = 1 \qquad \frac{\frac{x^2}{\mu^6}}{\varrho^2 b^2} - \frac{\frac{z^2}{(c^2 - \mu^2)^3}}{(\varrho^2 - c^2)(c^2 - b^2)} = 1$$

$$\frac{\frac{x^2}{\nu^6}}{\varrho^2 c^2} + \frac{\frac{y^2}{(b^2 - \nu^2)^3}}{(\varrho^2 - b^2)(c^2 - b^2)} = 1 \qquad \frac{\frac{x^2}{\nu^6}}{\varrho^2 b^2} - \frac{\frac{z^2}{(c^2 - \nu^2)^3}}{(\varrho^2 - c^2)(c^2 - b^2)} = 1$$

Die zwei letzten Gleichungen gehören den Polen der Ebenen an, welche (ϱ) in der Durchschnittslinie mit (ν) berühren.

Diese Formeln haben noch eine weitere und interessante Bedeutung. Die Krümmungsmittelpunkte irgend einer Fläche liegen auf einer besondern aus zwei Mänteln bestehenden Fläche. Wenn die Normale der gegebenen Fläche auf einer Krümmungslinie des ersten Systems fortschreitet, so berührt sie beide Mäntel zugleich, indem sie auf dem ersten eine geodätische Linie beschreibt, und auf dem zweiten eine Linie von besonderer Gattung, deren Natur mit der geodätischen Linie eng zusammenhängt, und welche wir aus diesem Grunde konjugirte geodätische Linie genannt haben. Bewegt sich dagegen die Normale auf einer Krümmungslinie des zweiten Systems, so beschreibt sie auf dem zweiten Mantel eine geodätische Linie und auf dem ersten eine konjugirte geodätische Linie. Gegeben ist nun ein Ellipsoid (ϱ) und eine Krümmungslinie $\varrho = \text{const.}$ $\mu = \text{const.}$ auf demselben. Wenn die Normale auf derselben fortschreitet, so zieht sie eine geodätische Linie auf dem

ersten Mantel der Krümmungsmittelpunktenfläche, welchen wir mit (m) bezeichnen; auf dem zweiten Mantel (n), welcher ebenfalls von der Normale tangirt wird, beschreibt sie eine konjugirte geodätische Linie, und die Gleichungen der letzteren sind die zwei ersten in 14. Bewegt sich aber die Normale auf der Krümmungslinie $\varrho = \text{const.}$ $\nu = \text{const.}$, so berührt sie (n) in einer geodätischen und (m) in einer konjugirten geodätischen Linie; die Gleichungen derselben sind die zwei letzten in 14. Wir können dieß in folgendem Satz zusammenfassen:

Auf einem Mantel der Fläche, welche die Krümmungsmittelpunkte einer centrischen Fläche zweiten Grades enthält, lassen sich geodätische Linien ziehen, deren Tangenten den zweiten Mantel in einer konjugirten geodätischen Linie berühren, welche sich auf den Hauptebenen in concentrischen Kegelschnitten projicirt.

Die Gleichung der geodätischen Linien auf dem Mantel (m) läßt sich auf diese Art finden:

Die Coordinaten der beiden Krümmungsmittelpunkte auf der Normale des Punkts (ϱ, μ, ν), welche mit den Axen die Winkel a, a′, a″ bildet, bezeichnen wir mit x, y, z und x′, y′, z′; so ist $\frac{x' - x}{R' - R} = \cos a$ $\frac{y' - y}{R' - R} = \cos a'$ $\frac{z' - z}{R' - R} = \cos a''$ oder mit Benützung der bekannten Werthe von R, R′, cos a, cos a′, cos a″

$$x' - x = \frac{\mu \nu}{\varrho b c} (\mu^2 - \nu^2) \qquad y' - y = \frac{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - b^2}} (\mu^2 - \nu^2)$$

$$z' - z = \frac{\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}} (\mu^2 - \nu^2)$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit den zwei ersten von 14. dienen zur Elimination von x, y, z und ν; die übrig bleibende Bedingungsgleichung enthält nur noch die Variabelen x′, y′, z′ und ist die gesuchte Gleichung der geodätischen Linie.

Wir haben oben die drei Winkel, welche die Normale im Punkt $(\varrho\, \mu\, \nu)$ auf dem Ellipsoid (ϱ) mit den Axen der x, y, z bildet, a, a′, a″ genannt und folgende Werthe gefunden:

$$\cos a = \frac{\mu \nu \sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{b c \sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}} \qquad \cos a' = \frac{\varrho \sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{b \sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}$$

$$\cos a'' = \frac{\varrho \sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}\sqrt{\varrho^2 - b^2}}{c \sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}$$

Man ziehe durch den Ursprung eine Linie parallel mit der Normale; die Coordinaten eines Punkts auf dieser Parallele seien x, y, z, so besteht die Relation:

$$x : y : z = \cos a : \cos a' : \cos a'' \text{ oder}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{\mu \sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - b^2}}{\varrho \sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2} . c} \cdot \frac{\nu}{\sqrt{b^2 - \nu^2}}$$

$$\frac{x}{z} = \frac{\mu \sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - b^2}}{\varrho \sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - b^2} \, . \, b} \cdot \frac{\nu}{\sqrt{c^2 - \nu^2}}$$

Wenn man aus diesen beiden Gleichungen ν eliminirt, so erhält man

15. $$\frac{x^2}{\mu^2(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2)} + \frac{y^2}{(\mu^2-b^2)\varrho^2(\varrho^2-c^2)} - \frac{z^2}{(c^2-\mu^2)\varrho^2(\varrho^2-b^2)} = 0$$

Dieß ist die Gleichung des Kegels, der seine Spitze im Mittelpunkt hat, und dessen Erzeugende parallel mit den Normalen des Ellipsoids (ϱ) sind, deren Fußpunkte die Krümmungslinien $\varrho = \text{const.}$ $\mu = \text{const.}$ dieser Fläche bilden.

Würde man aber aus den Werthen von $\frac{x}{y}$ und $\frac{x}{z}$ μ statt ν eliminiren, so erhielte man nachstehende Gleichung:

16. $$\frac{x^2}{\nu^2(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2)} - \frac{y^2}{(b^2-\nu^2)\varrho^2(\varrho^2-c^2)} - \frac{z^2}{(c^2-\nu^2)\varrho^2(\varrho^2-b^2)} = 0$$

Der hiedurch vorgestellte Kegel hat seine Spitze auch im Mittelpunkt und seine Erzeugenden sind parallel mit denjenigen Normalen des Ellipsoids (ϱ), deren Fußpunkte die Krümmungslinien $\varrho = \text{const.}$ $\nu = \text{const.}$ sind.

Diese Kegel sind homofokal; denn man kann, wenn die Nenner der Brüche in 15. A, B, C heißen, statt dieser Gleichung auch

$$\frac{\frac{x^2}{A}}{\varrho^2 - \mu^2} + \frac{\frac{y^2}{B}}{\varrho^2 - \mu^2} + \frac{\frac{z^2}{C}}{\varrho^2 - \mu^2} = 0$$

schreiben; nun ist

$$\frac{A}{\varrho^2 - \mu^2} - \frac{B}{\varrho^2 - \mu^2} = b^2(\varrho^2 - c^2); \quad \frac{A}{\varrho^2 - \mu^2} + \frac{B}{\varrho^2 - \mu^2} = (c^2-b^2)\varrho^2$$

$$\frac{A}{\varrho^2 - \mu^2} + \frac{C}{\varrho^2 - \mu^2} = c^2(\varrho^2 - b^2)$$

Mithin sind die Gleichungen der Fokallinien

17. $$x = \pm \frac{b \, . \sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{c^2 - b^2}\, \varrho} z$$

Wir sind hiedurch auf das bekannte Theorem gekommen:

Wenn man durch den Mittelpunkt einer Fläche zweiten Grades (oder durch einen Punkt im Raum) Parallelen mit denjenigen Normalen zieht, deren Fußpunkte die Krümmungslinien sind, so entstehen zwei Systeme von homofokalen Kegeln. Zieht man also durch den Mittelpunkt Ebenen parallel mit denjenigen, welche die Fläche in einer Krümmungslinie berühren, so umhüllen diese Ebenen die Ergänzungskegel der genannten homofokalen Kegel.

Man lege durch die mittlere Axe des Ellipsoids (ϱ) eine Ebene, welche mit der xy Ebene einen Winkel α bildet, so daß

$$\cos^2 \alpha = \frac{\varrho^2}{c^2} \frac{c^2 - b^2}{\varrho^2 - b^2}$$

ist, so schneidet diese Ebene (ϱ) in einem Kreis. Wir nehmen die Krümmungslinie $\varrho = \text{const.}$ $\mu = \text{const.}$, welche nach 1. auf dem Cylinder

$$\frac{x^2}{\varrho^2 \frac{\mu^2}{c^2}} + \frac{y^2}{\frac{(\varrho^2 - b^2)(\mu^2 - b^2)}{c^2 - b^2}} = 1$$

liegt. Dieser Cylinder schneidet die Kreisschnittebene in einer Ellipse, deren Halbaxen gleich $\frac{\varrho\mu}{c}\,\frac{1}{\cos a}$ und $\frac{\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\mu^2-b^2}}{\sqrt{c^2-b^2}}$, die Gleichung derselben ist also

$$18.\quad \frac{x^2}{\frac{\varrho^2-b^2}{c^2-b^2}\mu^2}+\frac{y^2}{\frac{\varrho^2-b^2}{c^2-b^2}(\mu^2-b^2)}=1$$

Die Differenz der Quadrate der Halbaxen ist $\frac{\varrho^2-b^2}{c^2-b^2}b^2$, mithin unabhängig von μ, demnach ist sie dieselbe für alle Krümmungslinien $\mu=$ const., oder die Ellipsen auf der Kreisschnittebene sind homofokal, d. h. sie haben die Brennpunkte gemein; hierauf beruht dieser bekannte Satz:

Die Krümmungslinien einer centrischen Fläche zweiten Grades projiciren sich auf einer Kreisschnittebene in homofokalen Kegelschnitten. Die Projektionslinien sind parallel der kleinen Axe der Fläche zu ziehen.

§. 24. Die geodätischen Linien auf den homofokalen centrischen Flächen.

Es sei $f(x, y, z) = o$ die Gleichung einer Fläche; wir setzen $\frac{df}{dx}=X$, $\frac{df}{dy}=Y$, $\frac{df}{dz}=Z$, so ist die Gleichung einer geodätischen Linie dieser Fläche

$$X(dy\,d^2z-dz\,d^2y)+Y(dz\,d^2x-dx\,d^2z)+Z(dx\,d^2y-dy\,d^2x)=o$$

welcher Joachimsthal nachstehende Form gegeben hat:

$$\frac{dXd^2x+dYd^2y+dZd^2z}{dXdx+dYdy+dZdz}+\frac{Xdx+Ydy+Zdz}{X^2+Y^2+Z^2}-\frac{dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z}{dx^2+dy^2+dz^2}=o$$

Wenden wir diese Gleichung auf die Fläche

$$\frac{x^2}{\varrho^2}+\frac{y^2}{\varrho^2-b^2}+\frac{z^2}{\varrho^2-c^2}=1$$

an, so finden wir

$$X=\frac{x}{\varrho^2};\ Y=\frac{y}{\varrho^2-b^2};\ Z=\frac{z}{\varrho^2-c^2};$$

$$dX=\frac{dx}{\varrho^2};\ dY=\frac{dy}{\varrho^2-b^2};\ dZ=\frac{dz}{\varrho^2-c^2};$$

$$dXdx+dYdy+dZdz=\frac{dx^2}{\varrho^2}+\frac{dy^2}{\varrho^2-b^2}+\frac{dz^2}{\varrho^2-c^2}$$

$$dXd^2x+dYd^2y+dZd^2z=\frac{1}{2}d\left(\frac{dx^2}{\varrho^2}+\frac{dy^2}{\varrho^2-b^2}+\frac{dz^2}{\varrho^2-c^2}\right)$$

Dadurch verwandelt sich die allgemeine Gleichung der geodätischen Linie in folgende:

$$d\log\left(\frac{dx^2}{\varrho^2}+\frac{dy^2}{\varrho^2-b^2}+\frac{dz^2}{\varrho^2-c^2}\right)-d\log(dx^2+dy^2+dz^2)$$
$$+d\log\left(\frac{x^2}{\varrho^4}+\frac{y^2}{(\varrho^2-b^2)^2}+\frac{z^2}{(\varrho^2-c^2)^2}\right)=o$$

woraus man durch Integration erhält:

$$1. \quad \frac{x^2}{\varrho^4} + \frac{y^2}{(\varrho^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(\varrho^2 - c^2)^2} = C \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\frac{dx^2}{\varrho^2} + \frac{dy^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{dz^2}{\varrho^2 - c^2}}$$

Die durch den Mittelpunkt parallel mit der Tangente der geodätischen Linie gezogene Gerade hat die Gleichung

$$x : y : z = dx : dy : dz$$

Die Coordinaten des Durchschnittspunkts dieser Parallele mit dem Ellipsoid sind also

$$x^2 = \frac{dx^2}{dx^2 + dy^2 + dz^2}(x^2 + y^2 + z^2); \; y^2 = \frac{dy^2}{dx^2 + dy^2 + dz^2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$z^2 = \frac{dz^2}{dx^2 + dy^2 + dz^2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

Da diese Werthe auch der Gleichung $\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} = 1$ genügen müssen, so ist

$$\frac{dx^2}{\varrho^2} + \frac{dy^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{dz^2}{\varrho^2 - c^2} = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

mithin

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\frac{dx^2}{\varrho^2} + \frac{dy^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{dz^2}{\varrho^2 - c^2}}$$

$x^2 + y^2 + z^2$ ist aber das Quadrat des Semidiameters δ, welcher der Tangente der geodätischen Linie parallel ist, und

$$\frac{x^2}{\varrho^4} + \frac{y^2}{(\varrho^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(\varrho^2 - c^2)^2}$$

ist, wie bekannt, gleich $\frac{1}{P^2}$, P ist die Länge des vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene der geodätischen Linie gefällten Perpendikels, mithin verwandelt sich die Gleichung 1 in folgende

$$2. \quad C = \frac{1}{P \, . \, \delta}$$

Hierin ist das Theorem (von Jochimsthal) enthalten:

Längs einer geodätischen Linie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades ist das Produkt des vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene gefällten Perpendikels und des der Tangente der geodätischen Linie parallelen Semidiameters der Fläche konstant.

Wir haben oben gesehen, daß bei einer Krümmungslinie das Produkt $P . D$ konstant ist, D ist derjenige Semidiameter, welcher der Tangente der Krümmungslinie parallel ist. Wenn eine geodätische Linie eine Krümmungslinie berührt, so ist im Berührungspunkt $D = \delta$, mithin $PD = P\delta$; hieraus folgt:

Für alle geodätischen Linien einer centrischen Fläche zweiten Grades, welche eine Krümmungslinie berühren, hat das Produkt $P . \delta$ denselben Werth.

Wir wollen auf dem Ellipsoid (ϱ) zwei symmetrische Krümmungslinien, welche die Durchschnitte des einmantligen Hyperboloids (μ) mit (ϱ) sind, be-

trachten. Die Gleichungen dieser Linien sind also in elliptischen Coordinaten

$$\varrho = \text{const.} \quad \mu = \text{const.}$$

Sie theilen die Fläche in drei Theile; den mittleren wollen wir A, die zwei äußern oder getrennten Theile B und C nennen. Für diese Krümmungslinien gilt die Gleichung

$$P.D = \frac{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}}$$

Zwei weitere Krümmungslinien, wovon die erste im Raum A und die zweite in einem der andern Räume B oder C liegt, haben die Gleichungen

$$P'.D' = \frac{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu'^2}} \qquad P''.D'' = \frac{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu''^2}}$$

Nun ist offenbar $\mu' > \mu > \mu''$ also $P'.D' > P.D > P''.D''$; daraus folgt, daß die geodätische Linie, welche die Krümmungslinien $\varrho = \text{const.}$ $\mu = \text{const.}$ berührt, ganz in dem Raum A liegen muß, und in keinen von den beiden andern Räumen, B oder C, übergehen kann. Denn würde sie z. B. die Krümmungslinie $\varrho = \text{const.}$ $\mu'' = \text{const.}$ berühren, so wäre $P.\delta = P''.D''$, was mit der Bedingung $P.\delta = P.D$ nicht übereinstimmt; würde sie aber diese Krümmungslinie schneiden, so wäre im Durchschnittspunkt zwar $P = P''$, aber $\delta < D''$, da D'' die größere Halbaxe derjenigen Centralellipse ist, deren Ebene mit der Tangentialebene parallel ist, mithin $P\delta < P''D''$, was noch weniger mit der Bedingung $P.\delta = P.D$ harmonirt. Wir haben hiemit nachstehendes Gesetz hinsichtlich des Laufs, welchen die geodätischen Linien auf den centrischen Flächen zweiten Grades im allgemeinen befolgen, gefunden:

Eine geodätische Linie bewegt sich immer zwischen zwei symmetrischen Krümmungslinien, hat sie die eine derselben berührt, so wendet sie sich wieder gegen die andere; und so zieht sie sich in unendlich vielen Windungen im allgemeinen in der von beiden Krümmungslinien eingeschlossenen Zone um die Fläche herum.

Die Nabelpunkte können als die Gränzen der Krümmungslinien angesehen werden; in diesem speziellen Fall führt das Vorhergehende auf den Satz:

Wenn eine geodätische Linie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades von einem Nabelpunkt ausgeht, so kann sie keine Krümmungslinie berühren, sondern sie geht zu dem entgegengesetzten Nabelpunkt über. Alle geodätischen Linien, welche von einem Nabelpunkt ausgehen, bilden einen Strahl von Linien, welche zum zweitenmal im entgegengesetzten Nabelpunkt convergiren.

Zwei geodätische Linien, welche eine Krümmungslinie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades berühren, schneiden eine zweite Krümmungslinie in den Punkten A und B. Die vom Mittelpunkt auf die Tangentialebenen von A und B gefällten Perpendikel sollen P und P' heißen, während die Semidiameter der Fläche, welche den Tangenten der Krümmungslinien in diesen Punkten parallel sind, mit D und D' und diejenigen Semidiameter, welche den Tangenten der geodätischen Linien in A und B parallel sind, mit δ und δ' bezeichnet werden. Dem früheren zufolge ist

$$P . D = P' . D' \quad P . \delta = P' . \delta'$$

mithin

3. $D : D' = \delta : \delta'$

Wenn zwei, eine Krümmungslinie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades berührende oder durch zwei Nabelpunkte gehende, geodätische Linien eine zweite Krümmungslinie schneiden, so sind die vier Semidiameter der Fläche, welche den Tangenten der geodätischen Linien und der zweiten Krümmungslinie parallel gezogen werden, in Proportion.

Eine geodätische Linie schneidet eine Krümmungslinie in den Punkten B und C, die vom Mittelpunkt auf die Tangentialebenen in B und C gefällten Perpendikel seien gleich P' und P''; die den Tangenten der Krümmungslinie in B und C parallelen Semidiameter gleich D' und D'' und die den Tangenten der geodätischen Linie parallelen Semidiameter gleich δ' und δ''.

$$P' . D' = P'' . D''; \; P' . \delta' = P'' . \delta''$$

4. $D' : D'' = \delta' : \delta''$

Wenn eine geodätische Linie eine Krümmungslinie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades in zwei Punkten schneidet, so sind die vier Semidiameter der Fläche, welche den Tangenten dieser beiden Linien in ihren zwei Durchschnittspunkten parallel sind, in Proportion.

Dieser Satz läßt sich leicht ausdehnen auf den Fall, wo eine geodätische Linie eine Krümmungslinie in mehr als zwei Punkten schneidet, oder wo letztere von mehreren eine Krümmungslinie berührenden oder durch einen Nabelpunkt gehenden geodätischen Linien getroffen wird.

Es sei ABCD ein von vier Krümmungslinien gebildetes Viereck.

P, P', P'', P''' sind die vier vom Mittelpunkt auf die Tangentialebenen der Ecken des Vierecks gefällten Perpendikel. Man verbinde nun die Punkte A und D durch eine geodätische Linie, wie auch die Punkte B und C; die den Tangenten der ersten Verbindungslinie in A und D parallelen Semidiameter sind gleich δ und δ'''; die zwei andern Semidiameter der Fläche, welche den Tangenten von der zweiten Verbindungslinie in B und C parallel sind, sollen mit δ' und δ'' bezeichnet werden. Nun ist

$$P . \delta = P''' . \delta'''; \; P' . \delta' = P'' . \delta''$$

$$P . P'' . \delta . \delta'' = P' . P''' . \delta' . \delta'''$$

aber nach einem Satz des §. 21 haben wir

$$P . P'' = P' . P''' \text{ also auch}$$

5. $\delta . \delta'' = \delta' . \delta'''$ oder $\delta : \delta' = \delta''' : \delta''$

Die vier Semidiameter einer centrischen Fläche zweiten Grades, welche den vier Tangenten von zwei geodätischen Linien parallel sind, wovon jede zwei Ecken eines Krümmungslinienvierecks verbindet, sind in Proportion.

In dem Krümmungslinienviereck ABCD sind die genannten zwei geodätischen Linien entweder AB und CD, oder AD und BC, oder endlich auch die Diagonalen AC und BD.

Vier geodätische Linien, welche eine Krümmungslinie berühren, bilden ein geodätisches Viereck 𝔄𝔅ℭ𝔇. Die vom Mittelpunkt auf die Tangentialebenen von 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇 gefällten Perpendikel sollen wieder mit P, P', P'', P'''

bezeichnet werden. Die vier Semidiameter, welche den Tangenten der geodätischen Linien 𝔄𝔅 und ℭ𝔇 in den Punkten 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇 parallel sind, nennen wir δ, δ', δ'', δ''' und die andern vier Semidiameter, welche den Tangenten der geodätischen Linien 𝔄ℭ und 𝔅𝔇 in den Punkten 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇 parallel sind, d, d′, d″, d‴, so ist

$$P.\delta = P'.\delta' = P''.\delta'' = P'''.\delta''' = P.d = P'.d' = P''.d'' = P'''.d'''$$

$$\delta = d,\ \delta' = d',\ \delta'' = d'',\ \delta''' = d'''$$

In einem Punkt A einer Krümmungslinie laufen zwei geodätische Linien zusammen, welche eine zweite Krümmungslinie berühren. Man ziehe durch den Mittelpunkt der Fläche eine Ebene parallel der Tangentialebene von A. Die Durchschnittskurve ist ein Kegelschnitt, dessen Halbaxen wir mit D und D′ bezeichnen wollen; diejenigen Semidiameter desselben, welche den Tangenten der geodätischen Linien in ihrem Durchschnittspunkt A parallel sind, seien δ und δ'; so hat man, wenn P das vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene gefällte Perpendikel ist, $P.\delta = P.\delta'$, weil beide geodätische Linien *eine* Krümmungslinie tangiren, also $\delta = \delta'$, mithin wird der Winkel und der Nebenwinkel der Semidiameter δ und δ' von den Halbaxen D und D′ des Kegelschnitts halbirt; letztere Halbaxen sind aber den Tangenten der sich in A schneidenden Krümmungslinien parallel, somit haben wir folgenden Satz:

Wenn sich in einem Punkt auf einer centrischen Fläche zweiten Grades zwei geodätische Linien, die eine Krümmungslinie berühren oder durch zwei Nabelpunkte gehen, schneiden, so wird der Winkel, den sie im Durchschnittspunkt bilden, von den beiden Krümmungslinien halbirt, die durch diesen Durchschnittspunkt gehen.

Es seien A und B zwei symmetrische Punkte einer Krümmungslinie hinsichtlich einer der Hauptebenen der Fläche. Man ziehe durch A und B zwei geodätische Linien, welche eine zweite Krümmungslinie berühren, so besteht die Gleichung $P.\delta = P.\delta'$; da offenbar die Abstände der Tangentialebene der Punkte A und B vom Mittelpunkt einander gleich sind; mithin ist $\delta = \delta'$; die beiden Diametralschnitte, welche diesen Tangentialebenen parallel durch den Mittelpunkt gelegt werden, sind kongruent, also sind die Winkel, welche ihre Semidiameter δ und δ' mit den Axen der Schnitte machen, gleich, und da letztere Axen parallel den Tangenten der Krümmungslinie in A und B sind, so schneiden auch die geodätischen Linien die Krümmungslinie AB unter demselben Winkel; hierauf beruht der Satz:

Zwei geodätische Linien einer centrischen Fläche zweiten Grades, welche eine Krümmungslinie berühren, oder durch einen Nabelpunkt gehen, schneiden eine zweite Krümmungslinie in zwei zu einer der Hauptebenen der Fläche symmetrischen Punkten unter gleichem Winkel.

Die geradlinigen Erzeugenden eines einmantligen Hyperboloids sind zwei geodätische Linien, welche die genannte Eigenschaft haben; also halbiren die Krümmungslinien in einem Punkt eines einmantligen Hyperboloids die Winkel der durch diesen Punkt gehenden geradlinigen Erzeugenden.

Dieser Satz wurde zuerst von Dupin aufgestellt, und läßt sich noch auf viele andere Arten beweisen.

Wenn man durch einen Punkt auf einer Fläche zwei Tangenten zieht, so daß sie gleiche Winkel mit den Tangenten der durch diesen Punkt gehenden

Krümmungslinien bilden, so haben die beiden durch jene Tangenten gehenden Normalschnitte der Fläche gleiche Krümmungshalbmesser. Hieraus läßt sich der Satz ableiten:

Die Krümmungshalbmesser von zwei geodätischen Linien auf einer centrischen Fläche zweiten Grades, welche eine Krümmungslinie berühren, oder durch zwei Nabelpunkte gehen, in dem Punkt, wo sie sich kreuzen, sind einander gleich.

Nach dem Satze von Dupin sind die Krümmungshalbmesser in einem Punkt einer centrischen Fläche zweiten Grades den Quadraten der Semidiameter desjenigen Diametralschnitts der Fläche proportional, welcher der Tangentialebene dieses Punkts parallel ist.

Wir haben in §. 21 die Gleichungen gefunden

$$R = \frac{(\varrho^2 - \mu^2)^{1/2}(\varrho^2 - \nu^2)^{3/2}}{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}} > R' = \frac{(\varrho^2 - \mu^2)^{3/2}(\varrho^2 - \nu^2)^{1/2}}{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}$$

$$P = \frac{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}} \quad D' = \sqrt{\varrho^2 - \mu^2} \quad D = \sqrt{\varrho^2 - \nu^2}$$

$$R = \frac{D^2}{P} \quad R' = \frac{D'^2}{P}, \quad R : R' = D^2 : D'^2$$

Weil nun D und D' die Halbaxen dieses Diametralschnitts sind, welche den Tangenten der Krümmungslinien parallel laufen, so folgt daraus unmittelbar

$$6. \quad r = \frac{\delta^2}{P}$$

hier bezeichnet r den Krümmungshalbmesser der durch den Punkt auf der Fläche gehenden geodätischen Linie, deren Tangente parallel dem Semidiameter δ des Diametralschnitts ist. Da längs einer geodätischen Linie das Produkt $P \cdot \delta$ konstant ist, so haben wir nach 6.

$$7. \quad \frac{\delta^3}{r} = \text{constante}$$

Diese zweite Gleichung der geodätischen Linie enthält folgendes Theorem:

Längs einer geodätischen Linie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades ist das Verhältniß der dritten Potenz des der Tangente parallelen Semidiameters der Fläche zum Krümmungshalbmesser dieser Linie konstant.

Zwei geodätische Linien, welche eine Krümmungslinie berühren, schneiden eine zweite Krümmungslinie in den Punkten A und B; ihre Krümmungshalbmesser seien in $A = r$ und in $B = r'$. Die Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche, welche den durch die Tangenten der Krümmungslinie in A und B gelegten Normalschnitten entsprechen, bezeichnen wir mit R und R' und die vom Mittelpunkt auf die Tangentialebenen dieser Punkte gefällten Perpendikel mit P und P', endlich seien die den Tangenten der sich in A und B kreuzenden Linien parallelen Semidiameter D und δ, D' und δ', so ist

$$R = \frac{D^2}{P}; \; R' = \frac{D'^2}{P'}; \quad r = \frac{\delta^2}{P}; \; r' = \frac{\delta'^2}{P'} \text{ also}$$

$$\frac{D^2}{R} = \frac{\delta^2}{r} \qquad \frac{\delta'^2}{r'} = \frac{D'^2}{R'}$$

Nach der Gleichung 3 dieses Paragraphs ist $D^2 \cdot \delta'^2 = D'^2 \cdot \delta^2$ also

$$8. \quad R : R' = r : r'$$

Wenn zwei, eine Krümmungslinie berührende oder durch zwei Nabelpunkte gehende, geodätische Linien einer centrischen Fläche zweiten Grades eine zweite Krümmungslinie schneiden, so sind die Krümmungshalbmesser der den Tangenten der geodätischen Linien und der Krümmungslinie in den Durchschnittspunkten entsprechenden Normalschnitte der Fläche in Proportion.

Eine solche Proportionalität der Krümmungshalbmesser findet in allen Punkten statt, wo eine Krümmungslinie von mehreren geodätischen Linien getroffen wird, für welche $P . \delta$ denselben Werth hat.

Ganz analog wird mittelst der Gleichung 4 dieses Paragraphs der Beweis des Satzes geführt:

Wenn eine geodätische Linie eine Krümmungslinie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades in zwei Punkten schneidet, so sind die Krümmungshalbmesser der den Tangenten der geodätischen und der Krümmungslinie in den Durchschnittspunkten entsprechenden Normalschnitte der Fläche in Proportion.

Aus der Gleichung 6 folgt

9. $r . P^3 = P^2 . \delta^2 = \text{const.}$

Hierauf beruht der Satz (von Joachimsthal):

Längs einer geodätischen Linie verhalten sich die Krümmungshalbmesser der Linie umgekehrt wie die dritten Potenzen der vom Mittelpunkt der Fläche auf die Tangentialebenen gefällten Perpendikel.

Wenn man zwei geodätische Linien auf einer centrischen Fläche zweiten Grades zieht, wovon jede zwei Ecken eines Krümmungslinienvierecks verbindet, so sind die vier Krümmungshalbmesser der geodätischen Linien in den Ecken des Vierecks proportionirt.

ABC ist ein geodätisches Dreieck. Die beiden Krümmungshalbmesser der in den Ecken A, B, C zusammenstoßenden geodätischen Linien bezeichnen wir der Reihe nach mit r_a, r'_a; r_b, r'_b; r_c, r'_c; die vom Mittelpunkt der Fläche auf die Tangentialebenen von A, B und C gefällten Perpendikel mit P_a, P_b, P_c, so ist zufolge der Gleichung 9

$$r_a . P^3_a = r'_b . P^3_b ; \; r_b . P^3_b = r'_c . P^3_c ; \; r_c . P^3_c = r'_a . P^3_a$$

10. $r_a . r_b . r_c = r'_a . r'_b . r'_c$

Die sechs Krümmungshalbmesser in den Ecken eines geodätischen Dreiecks auf einer Fläche zweiten Grades bilden zwei Gruppen; das Produkt der drei in der ersten Gruppe enthaltenen ist gleich dem Produkt der drei andern.

Dieses Theorem von Joachimsthal ist folgender Erweiterung fähig:

Wir nehmen auf einer solchen Fläche ein beliebiges geodätisches Vieleck an, z. B. das Fünfeck ABCDE, und führen ganz analoge Bezeichnungen ein, so bestehen die Gleichungen:

$$r_a . P^3_a = r'_b . P^3_b ; \; r_b . P^3_b = r'_c . P^3_c ; \; r_c . P^3_c = r'_d . P^3_d ;$$
$$r_d . P^3_d = r'_e . P^3_e ; \; r_e . P^3_e = r'_a . P^3_a$$

11. $r_a . r_b . r_c . r_d . r_e = r'_a . r'_b . r'_c . r'_d . r'_e$

Die Krümmungshalbmesser in den Ecken eines geodätischen Vielecks von n Seiten bilden zwei Gruppen. Das Produkt der n Krümmungshalbmesser, welche in der ersten Gruppe enthalten sind, ist gleich dem Produkt der n andern.

Da für eine geodätische Linie das Produkt $P . \delta$ konstant ist, so wollen wir die zehn Semidiameter der Fläche, welche den Tangenten des geodätischen Fünfecks in den Ecken ABCDE parallel sind, der Reihe nach bezeichnen mit δ_a, δ'_a; δ_b, δ'_b; δ_c, δ'_c; δ_d, δ'_d; δ_e, δ'_e und erhalten folgende Gleichungen:

$$\delta_a . P_a = \delta'_b . P_b ; \; \delta_b . P_b = \delta'_c . P_c ; \; \delta_c . P_c = \delta'_d . P_d$$

$$\delta_d . P_d = \delta'_e . P_e ; \; \delta_e . P_e = \delta'_a . P_a$$

12. $\delta_a . \delta_b . \delta_c . \delta_d . \delta_e = \delta'_a . \delta'_b . \delta'_c . \delta'_d . \delta'_e$

Die Semidiameter einer centrischen Fläche zweiten Grades, welche den Tangenten in den Ecken eines geodätischen nEcks parallel sind, theilen sich in zwei Gruppen; das Produkt der nSemidiameter der einen Gruppe ist gleich dem Produkt der nSemidiameter der andern Gruppe.

Durch einen Punkt A auf dem Ellipsoid (ϱ) ziehen wir die beiden Krümmungslinien, deren Gleichungen in elliptischen Coordinaten sind,

$$\varrho = \text{const.} \quad \mu = \text{const.} \quad \text{und} \quad \varrho = \text{const.} \quad \nu = \text{const.}$$

Ferner gehe durch A eine geodätische Linie, welche mit der ersten Krümmungslinie den Winkel i bildet. Durch den Mittelpunkt der Fläche geht eine Ebene, welche dieselbe in einer Ellipse schneidet, deren Halbaxen D und D' heißen. Der Semidiameter dieser Ellipse, welcher der Tangente der geodätischen Linie in A parallel ist, sei gleich δ, so ist der Winkel zwischen δ und $D = i$, da D der Tangente der ersten Krümmungslinie ($\mu = \text{const.}$) parallel ist. Wir haben nun die bekannte Gleichung

$$\frac{1}{\delta^2} = \frac{\cos^2 i}{D^2} + \frac{\sin^2 i}{D'^2}$$

Nach 21. und 22. in §. 21 ist

$$D^2 = \varrho^2 - \nu^2 \quad \text{und} \quad D'^2 = \varrho^2 - \mu^2$$

also

$$\frac{(\varrho^2 - \mu^2)(\varrho^2 - \nu^2)}{\delta^2} = \varrho^2 - (\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i)$$

Nun haben wir für die geodätische Linie $P . \delta = \text{constante} = C$; ferner

$$P = \frac{\varrho \sqrt{\varrho^2 - b^2} \sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2} \sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}$$

Durch Einsetzung dieser Werthe in die vorige Gleichung ist

$$\frac{\varrho^2 (\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}{C^2} = \varrho^2 - (\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i)$$

13. $\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = C'$

C' ist $= \varrho^2 - \dfrac{\varrho^2 (\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}{C^2} = \text{constante}$. Den Werth dieser neuen Konstante C' können wir leicht bestimmen. Es seien $\varrho = \text{const.}$ und $\alpha = \text{const.}$ die Gleichungen in elliptischen Coordinaten derjenigen Krümmungslinie von (ϱ), welche die geodätische Linie tangirt, d. h. α ist die große Halbaxe desjenigen homofokalen Hyperboloids, dessen Durchschnitt mit (ϱ) die genannte Krümmungslinie ist. Im Berührungspunkt ist $i = o$ Grad, also $\cos i = 1$; $\sin i = o$, ferner ist $\mu = \alpha$; die Gleichung 13 verwandelt sich somit in

$$\alpha^2 = C'$$

Da nun der Werth der Konstanten bestimmt ist, so schreiben wir die Gleichung der geodätischen Linie in dieser, von Liouville zuerst gefundenen, Form:

14. $\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \alpha^2$

Wenn die Linie durch einen Nabelpunkt geht, so ist $\alpha = b$, man erhält dann

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = b^2$$

Aus dieser Gleichung lassen sich, wie aus derjenigen von Joachimsthal, viele Eigenschaften der geodätischen Linien ableiten. Schneiden sich z. B. zwei geodätische Linien, welche eine Krümmungslinie berühren, im Punkt A des Ellipsoids, wo die Krümmungslinien $\mu = \text{const.}$ und $\nu = \text{const.}$ zusammentreffen, so ist $\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \alpha^2 \quad \mu^2 \cos^2 i' + \nu^2 \sin^2 i' = \alpha^2$

$$\mu^2 - (\mu^2 - \nu^2) \sin^2 i = \mu^2 - (\mu^2 - \nu^2) \sin^2 i'$$

$$i = i'$$

welchen Satz wir schon oben gefunden haben.

Aus 14. erhalten wir

15. $\cos i = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \nu^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}} \qquad \sin i = \frac{\sqrt{\mu^2 - \alpha^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}} \qquad \operatorname{tg} i = \frac{\sqrt{\mu^2 - \alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2 - \nu^2}}$

Wir ziehen durch den Punkt A des Ellipsoids zwei geodätische Linien, welche die Krümmungslinien $\varrho = \text{const.}$ $\alpha = \text{const.}$ und $\varrho = \text{const.}$ $\beta = \text{const.}$ berühren; diese geodätischen Linien bilden im Punkt A mit der Krümmungslinie $\mu = \text{const.}$ die Winkel i und i'; die Gleichungen 15 führen nun auf folgende:

$$\sin i = \frac{\sqrt{\mu^2 - \alpha^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}} \qquad \sin i' = \frac{\sqrt{\mu^2 - \beta^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}$$

16. $\frac{\sin i}{\sin i'} = \frac{\sqrt{\mu^2 - \alpha^2}}{\sqrt{\mu^2 - \beta^2}}$

So lange sich der Punkt A auf der Krümmungslinie $\mu = \text{const.}$ bewegt, bleibt μ unveränderlich und da die geodätischen Linien, welche von A ausgehen, immer die Krümmungslinien $\alpha = \text{const.}$ und $\beta = \text{const.}$ berühren, so haben wir folgendes Theorem (von Liouville):

Wenn sich die Spitze eines von zwei geodätischen Linien auf einer centrischen Fläche zweiten Grades gebildeten Winkels, welche zwei bestimmte Krümmungslinien berühren, auf einer dritten Krümmungslinie bewegt, so ist das Verhältniß der Sinus der Winkel, welche die geodätischen Linien mit der letzteren Krümmungslinie bilden, konstant.

Nehmen wir aber an, daß sich die durch den Punkt A gezogenen geodätischen Linien, welche die Krümmungslinien $\alpha = \text{const.}$ und $\beta = \text{const.}$ berühren, unter rechtem Winkel schneiden, so haben wir die Gleichungen

$$\cos i = \sin i' \text{ oder } \frac{\sqrt{\alpha^2 - \nu^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}} = \frac{\sqrt{\mu^2 - \beta^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}$$

17. $\mu^2 + \nu^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \text{const.}$

Nun ist die Länge des nach dem Punkte A oder (ϱ, μ, ν) gezogenen Semidiameters der Fläche $= \sqrt{\varrho^2 + \mu^2 + \nu^2 - b^2 - c^2}$, mithin ist auch dieser Semidiameter konstant. Hierin liegt nachstehender Satz (von Michael Roberts):

Die Spitze eines von zwei geodätischen Linien auf einer centrischen Fläche zweiten Grades gebildeten rechten Winkels, welche zwei bestimmte Krümmungslinien berühren, bewegt sich auf einer sphärischen Kurve, oder auch auf einer solchen Kurve, welche die Eigenschaft hat, daß die nach ihren Punkten gezogenen Semidiameter der Fläche den konjugirten Tangenten einer dritten Krümmungslinie parallel sind.

Dieser Satz hat natürlich auch noch seine Geltung, wenn die beiden geodätischen Linien nur eine Krümmungslinie berühren, oder wenn sie durch zwei Nabelpunkte gehen; in allen drei Fällen bietet die Geometrie der Ebene merkwürdige Analogieen dar.

Auch das vorhin angeführte Theorem von Liouville ist eine Verallgemeinerung des Satzes, nach dem zwei geodätische Linien, welche eine Krümmungslinie berühren, eine zweite Krümmungslinie unter gleichen Winkeln schneiden; denn man erhält aus 16., wenn $\alpha = \beta$ gesetzt wird,

$$\sin i = \sin i'$$

Man nehme auf einer Krümmungslinie fünf Punkte an, ABCDE, und verbinde dieselben durch geodätische Linien. Die Winkel, welche je zwei in A, B, C, D, E zusammenstoßende Seiten des Fünfecks mit der Krümmungslinie bilden, bezeichnen wir der Reihe nach mit i, J; i^1, J^1; i^2, J^2; i^3, J^3; i^4, J^4; die geodätischen Linien AB, BC, CD, DE, EA berühren die Krümmungslinien $\alpha = \text{const.}$; $\beta = \text{const.}$; $\gamma = \text{const.}$; $\delta = \text{const.}$; $\varepsilon = \text{const.}$

Wir haben somit folgende zehn Gleichungen, indem wir bemerken, daß die Krümmungslinie ABCDE oder $\mu = \text{const.}$ in A, B, C, D, E von den Krümmungslinien $\nu = \text{const.}$; $\nu' = \text{const.}$; $\nu'' = \text{const.}$; $\nu''' = \text{const.}$; $\nu'''' = \text{const.}$ geschnitten wird:

$$\sin i = \frac{\sqrt{\mu^2 - \alpha^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}};\ \sin i^1 = \frac{\sqrt{\mu^2 - \beta^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu'^2}};\ \sin i^2 = \frac{\sqrt{\mu^2 - \gamma^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu''^2}}$$

$$\sin i^3 = \frac{\sqrt{\mu^2 - \delta^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu'''^2}};\ \sin i^4 = \frac{\sqrt{\mu^2 - \varepsilon^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu''''^2}}$$

$$\sin J = \frac{\sqrt{\mu^2 - \varepsilon^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}};\ \sin J^1 = \frac{\sqrt{\mu^2 - \alpha^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu'^2}};\ \sin J^2 = \frac{\sqrt{\mu^2 - \beta^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu''^2}}$$

$$\sin J^3 = \frac{\sqrt{\mu^2 - \gamma^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu'''^2}};\ \sin J^4 = \frac{\sqrt{\mu^2 - \delta^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu''''^2}}$$

18. $\sin i \,.\, \sin i^1 \,.\, \sin i^2 \,.\, \sin i^3 \,.\, \sin i^4 = \sin J \,.\, \sin J^1 \,.\, \sin J^2 \,.\, \sin J^3 \,.\, \sin J^4$

Diese Schlußweise läßt sich auf ein beliebiges, einer Krümmungslinie einbeschriebenes geodätisches Vieleck ausdehnen. Die Gleichung 18 gibt uns den Lehrsatz:

Wenn man einer Krümmungslinie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades ein geodätisches Vieleck von n Seiten einbeschreibt, so lassen sich die Winkel, welche jede Seite des Vielecks mit der Krümmungslinie bildet, in zwei Gruppen bringen. Das Produkt der Sinus der n Winkel in der ersten Gruppe ist gleich dem Produkt der Sinus der n Winkel in der andern Gruppe.

Man kann auch einer Krümmungslinie ein geodätisches Vieleck von der Art einbeschreiben, daß dessen Seiten sämmtlich wieder eine zweite Krümmungslinie berühren; alsdann bilden je zwei anstoßende Seiten mit der ersten

Krümmungslinie gleiche Winkel. Wir wollen diese Winkel für ein geodätisches Dreieck ABC i, i^1, i^2 nennen. Die erste Krümmungslinie sei $\mu = \text{const}$, die zweite $\alpha = \text{const}$. Nun finden die drei Gleichungen statt

$$\sin i = \frac{\sqrt{\mu^2 - \alpha^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}; \quad \sin i' = \frac{\sqrt{\mu^2 - \alpha^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu'^2}}; \quad \sin i'' = \frac{\sqrt{\mu^2 - \alpha^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu''^2}}$$

Diese drei Relationen enthalten zwei Konstante, μ und α, und sechs Variabeln, $\sin i$, $\sin i^1$, $\sin i^2$; ν, ν', ν'', mithin kann denselben auf unendlich viele Arten Genüge geleistet werden; wenn also allgemein eine Krümmungslinie auf einer Fläche zweiten Grades gegeben ist, so gibt es unendlich viele Dreiecke (oder Vielecke von bestimmter Seitenzahl), welche derselben so einbeschrieben werden können, daß ihre Seiten zugleich alle eine zweite Krümmungslinie berühren.

Nach dem Theorem von Euler besteht die Gleichung

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}\cos^2 i + \frac{1}{R'}\sin^2 i$$

Wenden wir dieselbe auf die geodätischen Linien der Flächen zweiten Grades an. R und R' sind die Hauptkrümmungshalbmesser des Ellipsoids (ϱ) in dem Punkte, wo es von den homofokalen Hyperboloiden (μ) und (ν) geschnitten wird, also

$$R = \frac{(\varrho^2 - \mu^2)^{1/2}(\varrho^2 - \nu^2)^{3/2}}{\varrho(\varrho^2 - b^2)^{1/2}(\varrho^2 - c^2)^{1/2}} \qquad R' = \frac{(\varrho^2 - \mu^2)^{3/2}(\varrho^2 - \nu^2)^{1/2}}{\varrho(\varrho^2 - b^2)^{1/2}(\varrho^2 - c^2)^{1/2}}$$

i ist der Winkel, welchen die Tangente der geodätischen Linie mit der Krümmungslinie (μ) macht; r ist der Krümmungshalbmesser der geodätischen Linie, und also zugleich des durch die Tangente gehenden Normalschnitts der Fläche. Durch Substitution der Werthe von R und R' in die obige Gleichung erhalten wir

19. $$\frac{1}{r} = \frac{\varrho(\varrho^2 - b^2)^{1/2}(\varrho^2 - c^2)^{1/2}}{(\varrho^2 - \mu^2)^{3/2}(\varrho^2 - \nu^2)^{3/2}}\left\{\varrho^2 - (\mu^2\cos^2 i + \nu^2\sin^2 i\right\}$$

Nach dem Satze von Liouville ist die Größe $\mu^2\cos^2 i + \nu^2\sin^2 i = \text{const.}$ längs aller geodätischen Linien des Ellipsoids (ϱ), welche eine Krümmungslinie dieser Fläche tangiren; also haben wir auch für solche geodätische Linien

20. $$\frac{(\varrho^2 - \mu^2)^{3/2}(\varrho^2 - \nu^2)^{3/2}}{r} = \text{const.} \quad \text{oder} \quad \frac{D^3 . D'^3}{r} = \text{const.}$$

$D . D' . \pi$ ist der Inhalt desjenigen Diametralschnitts von dem Ellipsoid (ϱ), welcher der Tangentialebene der geodätischen Linie parallel ist. Die Gleichungen 20 enthalten somit diesen Satz:

Längs aller geodätischen Linien einer centrischen Fläche zweiten Grades, welche eine Krümmungslinie berühren, ist das Verhältniß der dritten Potenz des Inhalts von dem der Tangentialebene parallelen Diametralschnitt der Fläche zum Krümmungshalbmesser der geodätischen Linie konstant.

Wir können auch die frühere Gleichung (9) $r . P^3 = \text{const.}$ ableiten aus 19., da $P = \frac{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}$ und finden dann weiter, daß die Krümmungshalbmesser aller, eine Krümmungslinie berührenden, oder durch einen Nabelpunkt gehenden geodätischen Linien einer centrischen Fläche zweiten Grades da, wo sie eine

Poloide treffen, oder eine Linie, für welche die vom Mittelpunkt der Fläche auf ihre Tangentialebenen gefällten Perpendikel einen konstanten Werth haben, einander gleich sind.

Setzen wir aber umgekehrt die Gleichung $r \,.\, P^3 = \text{const.}$ für geodätische Linien als bekannt voraus, so führt die Gleichung 19 auf die Liouville'sche Form $\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \text{const.}$, und wir haben somit einen weiteren Beweis dieser letzteren Relation.

Die Gleichung 15 des §. 4 heißt

$$\triangle = \frac{\frac{1}{R}\cos^2 i + \frac{1}{R'}\sin^2 i}{\frac{1}{R^2}\cos^2 i + \frac{1}{R_,^2}\sin^2 i}$$

Hier ist $\triangle$ die Poldistanz des Elements einer Linie auf einer Fläche, welches mit einer Krümmungslinie den Winkel i bildet. Es sei z. B. MM' ein solches Element. Die beiden Normalen der Fläche, deren Fußpunkte M und M' sind, schneiden sich nicht, vorausgesetzt, daß MM' keiner Krümmungslinie angehört; dagegen gibt es zwei Punkte auf den Normalen, welche ihre kürzeste Entfernung angeben; die Verbindungslinie derselben steht senkrecht auf beiden Normalen, und der Punkt, wo diese Verbindungslinie die erste Normale trifft, heißt nach Joachimsthal der Pol des Elements MM', die Entfernung des Pols von der Fläche ist die Poldistanz dieses Elements. Wir wollen nun annehmen, MM' sei ein Element einer geodätischen Linie auf dem Ellipsoid (ϱ) und i sei der Winkel, welchen MM' mit der durch M gehenden Krümmungslinie (μ) bildet, so haben wir, mit Benützung der bekannten Werthe von R und R', und indem wir annehmen, daß sich in M die beiden Krümmungslinien (μ) und (ν) schneiden,

$$\triangle = \frac{1}{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}} \frac{\frac{\cos^2 i}{(\varrho^2 - \mu^2)^{1/2}(\varrho^2 - \nu^2)^{3/2}} + \frac{\sin^2 i}{(\varrho^2 - \mu^2)^{3/2}(\varrho^2 - \nu^2)^{1/2}}}{\frac{\cos^2 i}{(\varrho^2 - \mu^2)(\varrho^2 - \nu^2)^3} + \frac{\sin^2 i}{(\varrho^2 - \mu^2)^3(\varrho^2 - \nu^2)}}$$

$$= \frac{(\varrho^2 - \mu^2)^{1/2}(\varrho^2 - \nu^2)^{1/2}}{\varrho(\varrho^2 - b^2)^{1/2}(\varrho^2 - \nu^2)^{1/2}} \; \frac{\frac{\cos^2 i}{\varrho^2 - \nu^2} + \frac{\sin^2 i}{\varrho^2 - \mu^2}}{\frac{\cos^2 i}{(\varrho^2 - \nu^2)^2} + \frac{\sin^2 i}{(\varrho^2 - \mu^2)^2}}.$$

Bezeichnen wir den mit der Tangente MM' der geodätischen Linie parallelen Semidiameter des Ellipsoids (ϱ) mit d, so ist $\frac{1}{d^2} = \frac{\cos^2 i}{D^2} + \frac{\sin^2 i}{D_,^2}$; $D > D_,$ sind die Halbaxen des der Tangentialebene von M parallelen Diametralschnitts; ferner ist $D^2 = \varrho^2 - \nu^2$ und $D_,^2 = \varrho^2 - \mu^2$, also

$$\frac{\cos^2 i}{\varrho^2 - \nu^2} + \frac{\sin^2 i}{\varrho^2 - \mu^2} = \frac{1}{d^2}$$

Wir fällen vom Mittelpunkt dieses Diametralschnitts auf diejenige Tangente desselben, welche durch den Endpunkt des Semidiameters d geht, ein Perpendikel, welches wir mit p bezeichnen, so ist einer bekannten Eigenschaft der Ellipse zufolge

$$\frac{\cos^2 i}{(\varrho^2 - \nu^2)^2} + \frac{\sin^2 i}{(\varrho^2 - \mu^2)^2} = \frac{1}{p^2 \,.\, d^2}$$

Durch Verbindung der letzten drei Gleichungen erhalten wir folgenden einfachen Ausdruck für $\triangle$:

$$21. \quad \triangle = p^2 \frac{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}$$

Das vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene von M gefällte Perpendikel nennen wir, wie früher, P,

$$P = \frac{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}$$

$$22. \quad \triangle = \frac{p^2}{P}$$

In dieser Gleichung ist der Lehrsatz enthalten:

Auf einer centrischen Fläche zweiten Grades ist ein Linienelement gegeben; man ziehe in dem Diametralschnitt der Fläche, welcher der durch dieses Element gehenden Tangentialebene parallel ist, einen Semidiameter parallel dem Element, so ist das Quadrat des Perpendikels, welches vom Mittelpunkt auf die durch den Endpunkt dieses Semidiameters gehende Tangente des Schnitts gefällt wird, gleich der Poldistanz des Elements mal dem vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene herabgelassenen Perpendikel.

Dieser Satz gilt allgemein für irgend eine Linie auf den centrischen Flächen zweiten Grades. Bei den Krümmungslinien wird die Poldistanz gleich dem Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche, und p fällt zusammen mit einer Halbaxe des der Tangentialebene parallelen Diametralschnitts, also verwandelt sich die Gleichung 22 in

$$R = \frac{D^2}{P} \qquad R' = \frac{D_,^2}{P} \qquad R : R' = D^2 : D_,^2$$

welches der Satz von Dupin ist. Bei den geodätischen Linien haben wir die Gleichungen

$$P \,.\, \delta = \text{const.} \qquad \delta' \,.\, \sin\alpha = \text{const.}$$

δ und δ' sind diejenigen zwei Semidiameter der Fläche, welche parallel sind einer Tangente und der konjugirten Tangente der geodätischen Linie. $\delta' . \sin\alpha$ ist somit das vom Endpunkt des Semidiameters δ', der mit der konjugirten Tangente parallel ist, auf den Semidiameter δ herabgelassene Perpendikel; oder auch es ist das vom Mittelpunkt auf diejenige Tangente des durch δ und δ' bestimmten Diametralschnitts der Fläche gefällte Perpendikel, welche durch den Endpunkt von δ' geht. Wir ziehen nun in einem Punkt einer geodätischen Linie das konjugirte Element; die Poldistanz desselben bezeichnen wir mit $\triangle'$, und den ensprechenden Werth von p für dieses Element mit p', so ist nach 22.

$$\triangle' = \frac{p_,^2}{P}$$

Nun ist offenbar $p_, = \delta' . \sin\alpha$; und $\delta' . \sin\alpha$ längs der geodätischen Linie konstant; also

$$23. \quad \triangle' . P = \text{const.}$$

Längs einer geodätischen Linie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades ist das Produkt der Poldistanz des konjugirten

Linienelements und des vom Mittelpunkt auf die durch dieses Element gehende Tangentialebene der Fläche gefällten Perpendikels konstant.

Die Konstante in 23. hat denselben Werth für alle geodätische Linien, welche eine Krümmungslinie berühren oder durch einen Nabelpunkt gehen. Da bei einer Poloide $P = const.$ ist, so haben wir noch dieses Corollar:

Bei allen geodätischen Linien, welche eine Krümmungslinie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades berühren, oder durch einen Nabelpunkt gehen, sind in denjenigen Punkten, wo sie von einer Poloide getroffen werden, die Poldistanzen der konjugirten Elemente einander gleich.

In einem geodätischen Dreieck ABC bezeichnen wir die vom Mittelpunkt auf die Tangentialebenen der Ecken A, B, C gefällten Perpendikel mit P_a, P_b, P_c und die Poldistanzen der konjugirten Elemente in der Ecke A mit $\triangle'_a$; $\triangle''_a$ in der Ecke B mit $\triangle'_b$; $\triangle''_b$ in der Ecke C mit $\triangle'_c$; $\triangle''_c$, so ist nach 23.

$$\triangle''_a . P_a = \triangle'_b . P_b ; \; \triangle''_b . P_b = \triangle'_c . P_c ; \; \triangle''_c . P_c = \triangle'_a . P_a$$

$$24. \quad \triangle'_a . \triangle'_b . \triangle'_c = \triangle''_a . \triangle''_b . \triangle''_c$$

Es ist klar, daß wir die gleiche Schlußweise auf ein beliebiges geodätisches Vieleck hätten anwenden können, woraus sich der Satz ergibt:

Auf einer centrischen Fläche zweiten Grades ist ein geodätisches nEck gegeben. In jeder Ecke stoßen zwei Elemente der geodätischen Seiten zusammen. Die Poldistanzen ihrer konjugirten Elemente sind also im Ganzen von der Zahl 2n und theilen sich in zwei Gruppen: das Produkt der n Poldistanzen der einen Gruppe ist gleich dem Produkt der n Poldistanzen der andern Gruppe.

Durch jeden Punkt einer Fläche lassen sich unendlich viele Paare konjugirter Elemente ziehen; es seien z. B. MM′ und MM″ zwei konjugirte Elemente. Nach dem früheren läßt sich hierüber eine doppelte Definition geben. Die erste ist abgeleitet aus der Theorie der trajectoires und caractéristiques von Monge, und nach derselben schneiden sich die Tangentialebenen der Fläche für die Punkte M und M′ in der Linie MM″; oder umgekehrt, die Tangentialebenen der Punkte M und M″ schneiden sich in der Linie MM′. Die zweite Definition beruht auf der Lehre von den indicatrices des Dupin, von welchem auch die Benennung „konjugirte Tangenten" stammt. Zieht man nämlich in der Tangentialebene des Punkts M die Tangenten der Krümmungslinien von M und betrachtet dieselben als Axen eines Kegelschnitts, dessen Mittelpunkt M und deren Größe $\sqrt{R}$ und $\sqrt{R'}$ ist, so ist dieser Kegelschnitt die indicatrice des Punkts M; je zwei konjugirte Tangenten (oder die Richtungen von zwei konjugirten Elementen) dieses Punkts coincidiren mit zwei konjugirten Durchmessern der indicatrice.

Die neunte Gleichung dieses Paragraphen für geodätische Linien heißt

$$r . P^3 = const.$$

r ist der Krümmungshalbmesser der Linie. Durch Verbindung dieser Relation mit 23. erhalten wir

$$25. \quad \frac{\triangle'^3}{r} = const.$$

Hierin ist folgendes Theorem ausgesprochen:

Längs einer geodätischen Linie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades ist das Verhältniß der dritten Potenz der Poldistanz des konjugirten Elements der Linie zum Krümmungshalbmesser der letzteren konstant. Die Konstante hat für alle solche geodätische Linien, welche eine Krümmungslinie berühren, denselben Werth; im Berührungspunkt verwandelt sich $\triangle'$ in den einen Hauptkrümmungshalbmesser R' der Fläche, r in den andern Hauptkrümmungshalbmesser R, mithin ist bei dieser Krümmungslinie

$$\frac{R,^3}{R} = \text{const.}$$

Diese Gleichung der Krümmungslinien, welche sich als Corollar unseres Satzes ergibt, hätte man auch auf viel einfacherem Wege aus den bekannten Werthen von R und R, in elliptischen Coordinaten direkt ableiten können.

Der Gleichung 7 dieses Paragraphen zufolge ist $\frac{\delta^3}{r} = \text{const.}$, mithin nach 25.

$$26. \quad \frac{\triangle'}{\delta} = \text{const.}$$

Bei einer geodätischen Linie ist das Verhältniß desjenigen Semidiameters der Fläche, welcher einem Element der Linie parallel ist, zur Poldistanz des konjugirten Elements konstant.

Die Linien, welche die Tangenten einer geodätischen Linie von einer centrischen Fläche zweiten Grades auf einer homofokalen Fläche berühren, haben wir konjugirte geodätische Linien genannt. Die allgemeine Gleichung aller Linien auf diesen Flächen ist

$$P \,.\, \delta \,.\, \delta' \,.\, \sin\alpha = \text{const.}$$

Bei den konjugirten geodätischen Linien ist

$$P \,.\, \delta' = \text{const.} \qquad \delta \,.\, \sin\alpha = \text{const.}$$

Da nun $\delta \,.\, \sin\alpha = p$ und nach 22. $\triangle = \frac{p^2}{P}$, so haben wir die Gleichung

$$27. \quad \triangle \,.\, P = \text{const.}$$

welche diesen Lehrsatz enthält:

Bei einer konjugirten geodätischen Linie ist das Produkt der Poldistanz eines Elements der Linie und des vom Mittelpunkt auf die durch dieses Element gehende Tangentialebene der Fläche gefällten Perpendikels konstant.

Bei allen konjugirten geodätischen Linien auf einer centrischen Fläche zweiten Grades, welche auf einer Krümmungslinie senkrecht stehen, sind die Poldistanzen der an eine Poloide stoßenden Elemente einander gleich.

In einem von konjugirten geodätischen Linien gebildeten Vieleck von n Seiten theilen sich die Poldistanzen der n Paare von zwei in jeder Ecke zusammenstoßenden Elementen in zwei Gruppen; das Produkt der n Poldistanzen der einen Gruppe ist gleich dem der nandern. Der Beweis dieser Sätze ist so analog den früheren Beweisen, daß er weggelassen worden ist.

Bei den konjugirten geodätischen Linien ist $P \,.\, \delta' = \text{const.}$, mithin haben wir durch Benützung von 27. folgende weitere Formel

28. $\frac{\triangle}{\delta'} = \text{const.}$

Längs einer konjugirten geodätischen Linie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades ist das Verhältniß der Poldistanz eines Elements der Linie zum Semidiameter der Fläche, welcher dem konjugirten Element parallel ist, konstant.

Eine konjugirte geodätische Linie hat die Eigenschaft, daß bei ihr $P^3 . r' = \text{const.}$ ist; r' ist der Krümmungshalbmesser des durch die konjugirte Tangente der Linie gehenden Normalschnitts der Fläche; da nun auch $\triangle . P = \text{const.}$ ist, so haben wir durch Elimination von P

29. $\frac{\triangle^3}{r'} = \text{const.}$

Bei einer konjugirten geodätischen Linie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades ist das Verhältniß der dritten Potenz der Poldistanz eines Elements zum Krümmungshalbmesser des durch die konjugirte Tangente der Linie gehenden Normalschnitts der Fläche konstant.

Die Gleichung 22 $\triangle = \frac{p^2}{P}$ gilt allgemein für alle Linien auf den centrischen Flächen zweiten Grades; bei jeder besondern Gattung von Linien nimmt sie eine andere Form an, bei den Poloiden z. B. ist $P = \text{const.}$, also

30. $\frac{\triangle}{p^2} = \text{const.}$

Bei einer Poloide auf einer centrischen Fläche zweiten Grades ist das Verhältniß der Poldistanz eines Elements der Linie zu p^2 konstant. p hat die oben angegebene Bedeutung.

§. 25. Die geodätischen Linien auf den homofokalen centrischen Flächen. Fortsetzung.

Um weitere Eigenschaften dieser Linien zu finden, wollen wir wieder auf die ursprünglichen Gleichungen zurückgehen. Aus

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} = 1$$

finden wir

$$\varrho^6 - (b^2 + c^2 + x^2 + y^2 + z^2)\varrho^4 + \left\{ b^2c^2 + b^2(x^2 + z^2) + c^2(x^2 + y^2) \right\}\varrho^2 - b^2c^2x^2 = 0$$

Betrachten wir hier ϱ^2 als einzige Variabele, und nennen die drei Wurzeln dieser Gleichung, welche in Beziehung auf ϱ^2 vom dritten Grade ist, ϱ^2, μ^2, ν^2, so haben wir nach den bekannten Sätzen, welche der Theorie der Gleichungen zu Grunde liegen, diese Relationen:

1. $\varrho^2 + \mu^2 + \nu^2 = b^2 + c^2 + x^2 + y^2 + z^2$
2. $\varrho^2\mu^2 + \varrho^2\nu^2 + \mu^2\nu^2 = b^2c^2 + b^2(x^2 + z^2) + c^2(x^2 + y^2)$
3. $\varrho^2\mu^2\nu^2 = b^2c^2x^2$

In dem Punkt A im Raum, dessen rechtwinklige Coordinaten x, y, z sind, schneiden sich die drei homofokalen Flächen (ϱ), (μ), (ν), deren Gleichungen

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} = 1; \quad \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1;$$

$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1$$

sind. Die elliptischen Coordinaten von A sind also ϱ, μ, ν. Wir ziehen durch A die drei Normalen dieser Flächen, und tragen auf denselben von A aus Stücke ab gleich den Halbaxen ϱ, μ, ν der Flächen, auf welchen sie senkrecht stehen. Dadurch erhalten wir drei auf einander senkrechte Linien, die wir als die Halbaxen eines Ellipsoids (ε) betrachten können, dessen Mittelpunkt A ist.

Wir ziehen durch A eine Linie $= b$, parallel der y Axe und eine andere Linie $= c$ parallel der z Axe, und betrachten die drei Geraden OA, b und c als drei konjugirte Semidiameter eines Ellipsoids, dessen Halbaxen wir einstweilen ϱ', μ', ν' nennen wollen; nach einem bekannten Lehrsatze ist bei einer centrischen Fläche zweiten Grades die Summe der Quadrate von drei konjugirten Semidiametern gleich der Quadratsumme der Halbaxen; also ist

$$\varrho'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 = b^2 + c^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

Ferner ist bei jeder solchen Fläche die Quadratsumme der drei Parallelogramme, welche sich aus je zwei von drei konjugirten Semidiametern konstruiren lassen, gleich der Quadratsumme der drei Rechtecke über je zwei von den drei Halbaxen; mithin

$$\varrho'^2\mu'^2 + \varrho'^2\nu'^2 + \mu'^2\nu'^2 = b^2c^2 + b^2(x^2 + z^2) + c^2(x^2 + y^2)$$

Endlich ist das Rechteck aus drei konjugirten Semidiametern gleich dem Rechteck aus den drei Halbaxen, also $\varrho'\mu'\nu' = bcx$ oder

$$\varrho'^2\mu'^2\nu'^2 = b^2c^2x^2$$

Vergleicht man diese drei Formeln mit den Relationen 1, 2, 3, so ergibt sich sogleich, daß

$$\varrho' = \varrho;\ \mu' = \mu;\ \nu' = \nu \text{ ist.}$$

Das zweite Ellipsoid ist demnach identisch mit dem ersten; wir haben also nachstehenden Lehrsatz gefunden:

Wenn man durch einen beliebigen Punkt A im Raum drei homofokale Flächen legt, (ϱ), (μ), (ν), und auf den Normalen von A aus Stücke abschneidet, gleich den Halbaxen von diesen Flächen, so sind diese drei Stücke die Halbaxen eines Ellipsoids, welches die yz Ebene im Ursprung O berührt, und dessen parallel mit dieser Ebene gelegter Diametralschnitt die konstanten Halbaxen b und c und also auch einen konstanten Inhalt hat.

Durch die Konstanten b und c ist ein System von homofokalen Flächen bestimmt. Wo man auch den Punkt A im Raum annehmen mag, so hat diese Ellipse immer die Halbaxen b und c und ihre Ebene ist stets parallel der yz Ebene.

Dieser wichtige Satz von Chasles ist die Grundlage für die Auffindung einer Menge von Eigenschaften der homofokalen Flächen. Wir wollen ihn zunächst benützen, um die Gleichung der gemeinschaftlichen Tangenten von zwei solchen Flächen darzustellen. Man lege durch den Punkt A eine beliebige Ebene L, welche mit den Normalen der drei durch A gehenden homofokalen Flächen (ϱ), (μ), (ν) die Winkel i, i', i'' bildet. Die Perpendikel, welche von den Endpunkten der Halbaxen des Ellipsoids (ε) auf die Ebene L herabgelassen werden, sind gleich $\varrho \sin i$, $\mu \sin i'$, $\nu \sin i''$; und da die Quadratsumme der von den Endpunkten dreier konjugirter Semidiameter einer centrischen Fläche zweiten Grades auf eine Diametralebene gefällten Perpendikel

konstant und gleich der Quadratsumme der von den Endpunkten der Halbaxen herabgelassenen Perpendikel ist, so haben wir

4. $\varrho^2 \sin i^2 + \mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = \alpha^2$

Hier bedeutet α^2 die Quadratsumme der von den Endpunkten der konjugirten Semidiameter O A, b und c auf L gefällten Perpendikel; bewegt sich nun der Punkt A auf der Ebene L und wird für jede Lage von A die bisherige Konstruktion beibehalten, so ist α^2 eine Konstante, weil die Semidiameter b und c stets mit sich parallel bleiben, also mit L fortwährend die gleichen Winkel bilden, und das von O auf L gefällte Perpendikel ebenfalls unveränderlich bleibt, so lange die Ebene L ihre Lage nicht ändert. Wir wählen nun den Punkt A so auf der Ebene L, daß eine der drei durch ihn gelegten homofokalen Flächen (ϱ), (μ), (ν) diese Ebene tangirt. Dieß ist immer möglich, so lange L nicht durch den Mittelpunkt geht, auch gibt es nur eine solche Lage des Punkts A, weil wir früher (§. 22) den Satz gefunden haben, daß sich an zwei homofokale Flächen nie eine gemeinschaftliche Tangentialebene legen läßt. Es sei bei dieser Lage von A, α die große Halbaxe der tangirenden Fläche und also auch des Ellipsoids (ε); da die letztere senkrecht steht auf L, so ist das von ihrem Endpunkt auf diese Ebene gefällte Perpendikel gleich α, während die beiden andern Halbaxen von (ε) in der Ebene L liegen, weßwegen die von ihren Endpunkten auf L gefällten Perpendikel gleich Null sind. Durch diese Auseinandersetzungen, welche Chasles zuerst angegeben hat, sind wir auf den Satz gekommen:

Wenn man durch einen Punkt A im Raum, der sich auf einer festen Ebene L bewegt, drei homofokale Flächen legt, deren große Halbaxen ϱ, μ, ν sind, und deren Normalen mit der Ebene L die Winkel i, i′, i″ bilden, so ist $\varrho^2 \sin^2 i + \mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = \alpha^2$; wo α die große Halbaxe derjenigen homofokalen Fläche ist, welche L berührt.

Wir betrachten die Fläche (α), deren große Halbaxe $= \alpha$ ist, als gegeben, wie auch den Punkt A oder (ϱ, μ, ν). Dann sind in der Gleichung 4 die Größen i, i′, i″ die Variabelen, und gelten für die Winkel, welche irgend eine durch A gelegte und die Fläche (α) tangirende Ebene L mit den drei Normalen der Flächen (ϱ), (μ), (ν) in A macht. Alle diese Ebenen L hüllen aber einen Kegel ein, den wir K nennen wollen, und dessen Gleichung sich sehr leicht angeben läßt, wenn diese drei Normalen als Coordinatenaxen angenommen werden, und zwar sollen die Normalen von (ϱ), (μ), (ν) die Axen der ξ, η, ζ sein. Für irgend einen auf der Linie, die in A senkrecht auf L gezogen wird, liegenden Punkt (ξ, η, ζ) ist

$$\sin i^2 = \frac{\xi^2}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}; \quad \sin^2 i' = \frac{\eta^2}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}; \quad \sin^2 i'' = \frac{\zeta^2}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

Durch Vergleichung mit 4. erhalten wir

$$\varrho^2 \xi^2 + \mu^2 \eta^2 + \nu^2 \zeta^2 = \alpha^2 (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$$

oder

5. $(\varrho^2 - \alpha^2)\,\xi^2 + (\mu^2 - \alpha^2)\,\eta^2 + (\nu^2 - \alpha^2)\,\zeta^2 = 0$

Dieß ist die Gleichung des Ergänzungskegels von demjenigen, welchen die Berührungsebenen L einhüllen; mithin ist die Gleichung des Kegels K

6. $\dfrac{\xi^2}{\varrho^2 - \alpha^2} + \dfrac{\eta^2}{\mu^2 - \alpha^2} + \dfrac{\zeta^2}{\nu^2 - \alpha^2} = 0$

Aus dieser Gleichung ließen sich eine Menge von Consequenzen ziehen; es folgt z. B. unmittelbar daraus der zuerst von Chasles (Aperçu historique) später von Jakobi (Crelle's Journal) gefundene Satz, daß alle concentrischen Berührungskegel eines Systems von homofokalen Flächen dieselben Fokallinien haben, allein wir wollen nicht weiter darauf beharren. Ein zweiter Kegel K', welcher die homofokale Fläche (β) berührt, hat hinsichtlich der genannten durch A gehenden Coordinatenaxen diese Gleichung

$$7.\quad \frac{\xi^2}{\varrho^2 - \beta^2} + \frac{\eta^2}{\mu^2 - \beta^2} + \frac{\zeta^2}{\nu^2 - \beta^2} = 0$$

Das System der Gleichungen 6 und 7 gilt also für den Durchschnitt beider homofokalen Kegel, oder für die gemeinsame Tangente der homofokalen Flächen (α) und (β).

Zwei homofokale Kegel schneiden sich entweder gar nicht oder in vier Linien, welche symmetrisch liegen in Beziehung auf die Axen der Kegel, d. h. je zwei dieser Durchschnittslinien sind in gleicher Ebene mit einer Axe und bilden gleiche Winkel mit ihr; betrachtet man eine derselben als den einfallenden Strahl, so sind die drei andern die auf den drei Hauptebenen zurückgeworfenen Strahlen. Wir haben somit den Satz:

Gegeben sind zwei homofokale Flächen und ein Punkt. Von diesem Punkt aus lassen sich entweder keine oder vier gemeinschaftliche Tangenten an die Flächen ziehen. Je zwei derselben bilden mit einer Normale der drei durch den Punkt gehenden homofokalen Flächen gleiche Winkel. Betrachtet man eine der Tangenten als einfallenden Strahl, so sind die drei andern die auf den Tangentialebenen dieser drei Flächen zurückgeworfenen Strahlen.

Wir wollen nun annehmen, die Ebene L, auf welcher sich der Punkt A bewegt, gehe durch die Normale der Fläche (ϱ), dann ist $\sin i = 0$; aus der Gleichung 4 wird also

$$\mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = \alpha^2$$

In dem unendlich nahen Punkt A' der Durchschnittslinie findet die Relation statt:

$$\varrho^2 \sin^2 i_, + \mu_,^2 \sin^2 i_,' + \nu_,^2 \sin^2 i_,'' = \alpha^2$$

Nun differirt die Größe $\sin i_,$ nur um ein unendlich Kleines der ersten Ordnung von $\sin i'$ oder o, oder $\sin^2 i_,$ differirt nur um ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung von o, also kann man setzen

$$\mu_,^2 \sin^2 i_,' + \nu_,^2 \sin^2 i_,'' = \alpha^2$$

andererseits sind die Winkel $i_,'$ und $i_,''$ um unendlich wenig verschieden von denjenigen, welche die Krümmungslinien von (ϱ) im Punkt A' mit dem folgenden Element A'A'' bilden, welches ebenfalls in der Normalebene L liegt. AA'A'' sind aber drei auf einander folgende Punkte einer geodätischen Linie auf (ϱ), mithin entspricht einer solchen Linie die Gleichung

$$\mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = \alpha^2 = \mu^2 \sin^2 i_,' + \nu^2 \sin^2 i_,''$$

oder

$$\mu^2 \sin^2 i + \nu^2 \cos^2 i = \alpha^2$$

Dieser Chasles'sche Beweis der Liouville'schen Gleichung führt aber noch zu weiteren Consequenzen. Die Ebene AA'A'' ist die Oskulationsebene der geodätischen Linie, und identisch mit der Ebene L, welche die homofokale Fläche (α) berührt; hieraus folgt:

Alle Oskulationsebenen einer geodätischen Linie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades berühren eine homofokale Fläche. Die Durchschnitte von je zwei auf einander folgenden Oskulationsebenen oder alle Tangenten der geodätischen Linien berühren die erste homofokale Fläche. Diese Durchschnitte sind die konjugirten Tangenten der Linie der Berührungspunkte auf der zweiten Fläche.

Die geodätische Linie berührt eine Krümmungslinie; hier fallen also die Tangenten beider zusammen. Da aber die Tangente einer Krümmungslinie keine andere als die durch diese Krümmungslinie selbst bestimmte homofokale Fläche berühren kann, so folgt daraus:

Die Tangenten aller geodätischen Linien, welche eine Krümmungslinie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades berühren, berühren sämmtlich eine, durch diese Krümmungslinie gehende homofokale Fläche.

Wir haben drei Flächen, (α), (ϱ) und (p); die beiden ersten sind homofokal und verschiedener Gattung, d. h. sie schneiden einander; die letzte ist die Polarfläche von (α) in Beziehung auf (ϱ). Auf (α) ist eine Linie gezeichnet, welche die Eigenschaft hat, daß alle ihre konjugirten Tangenten die Fläche (ϱ) berühren, und zwar in einer geodätischen Linie. Drei auf einander folgende Berührungspunkte, $AA'A''$, liegen in einer Ebene, deren Pol demgemäß auf (p) liegt. Die den Elementen AA' und $A'A''$ entsprechenden konjugirten Tangenten von (ϱ), d. h. die Durchschnittslinien der drei Ebenen, welche (ϱ) in A, A' und A'' berühren, schneiden sich ebenfalls in einem Punkt auf (p), weil dieser Punkt die Spitze des Kegels ist, welcher (ϱ) in der Linie $AA'A''$ berührt; also schneiden sich je zwei auf einander folgende Tangenten der geodätischen Linie von (ϱ) auf der Polarfläche (p), oder was dasselbe ist, die der Fläche (ϱ) längs der geodätischen Linie umschriebene entwickelbare Fläche hat ihre Rückkehrkante auf (p):

Die Tangenten einer geodätischen Linie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades berühren eine zweite homofokale Fläche und die konjugirten Tangenten derselben schneiden sich auf einer concentrischen nicht homofokalen Fläche zweiten Grades; diese letztere Fläche ist die nämliche für alle geodätische Linien, welche auf der gegebenen Fläche eine Krümmungslinie berühren.

Dieß führt uns auf eine weitere Eigenschaft derjenigen geodätischen Linien, die durch einen Nabelpunkt gehen. Die homofokale Fläche, welche die Tangenten dieser Linien berühren, verwandelt sich in diesem speziellen Fall offenbar in die Fokale, welche durch den gleichen Nabelpunkt geht.

Wir können also folgenden Satz aufstellen:

Die Tangenten aller durch einen Nabelpunkt gehenden geodätischen Linien schneiden sich auf einem Kegelschnitt, der Fokale.

Zieht man sämmtliche Oskulationsebenen einer geodätischen Linie auf einer Fläche zweiten Grades, so liegen die Spitzen der Kegel, welche die Fläche in den durch diese Ebenen hervorgebrachten Schnittkurven tangiren, auf einer Fläche zweiten Grades. In einem Satz des §. 22 haben wir noch näher angegeben, daß die Gattung dieser zweiten Fläche unabhängig ist von derjenigen der ersten Fläche; eine geodätische Linie auf einem Ellipsoid berührt z. B. die Krümmungslinie $\mu = \text{const.}$, welche der Durchschnitt des Ellipsoids

mit einem einmantligen Hyperboloid ist, dann liegen die Spitzen der Kegel, welche das Ellipsoid in den durch die Oskulationsebenen dieser geodätischen Linie hervorgebrachten Schnittkurven berühren, wieder auf einem einmantligen concentrischen Hyperboloid von gleicher Axenrichtung. Dieses letztere Hyperboloid ist der geometrische Ort der Spitzen aller Kegel, welche das Ellipsoid in den durch die Oskulationsebenen von irgend einer geodätischen Linie hervorgebrachten Schnittkurven berühren, welche die genannte Krümmungslinie tangiren. Ganz analog findet man ein zweimantliges Hyperboloid für die Spitzen derjenigen Berührungskegel, die sich auf die geodätischen Linien beziehen, welche die Krümmungslinien $\nu = \text{const.}$ tangiren. Somit können wir den Chasles'schen Satz näher fassen:

Die Spitzen sämmtlicher Kegel, die eine centrische Fläche zweiten Grades in solchen Schnittkurven berühren, welche den Oskulationsebenen der, eine Krümmungslinie tangirenden, geodätischen Linien entsprechen, liegen auf einer concentrischen Fläche zweiten Grades mit derselben Axenrichtung und von derselben Gattung, wie diejenige homofokale Fläche, welche die gegebene Fläche in der genannten Krümmungslinie schneidet.

Unmittelbar hier anschließend kann man weiter sagen:

Die Pole aller Normalebenen, welche eine Krümmungslinie berühren, liegen auf einer Fläche zweiten Grades.

Dieser Satz folgt übrigens auch daraus, daß diese Normalebenen eine Fläche zweiten Grades — die durch die Krümmungslinie gehende homofokale Fläche — tangiren.

Es schließen sich hier noch einige allgemeinere Betrachtungen an: Wenn auf einer Fläche eine beliebige Linie gegeben ist, so schneiden sich je zwei auf einander folgende konjugirte Tangenten derselben; sind z. B. M, M', M'', M''' vier auf einander folgende Punkte der Linie, so schneiden sich die drei Ebenen, welche die Fläche in MM', $M'M''$ und $M''M'''$ berühren, in den beiden Geraden $M'P$ und $M''P$, welche die konjugirten Tangenten der Elemente MM' und $M'M''$ sind. Den Punkt P können wir Pol und die Gerade $M'P$ Poldistanz der Oskulationsebene $MM'M''$ nennen. Gehen durch einen Punkt auf einer Fläche beliebig viele Linien, so entspricht der Oskulationsebene von jeder Linie in diesem Punkt ein Pol; sämmtliche Pole bilden eine Kurve, welche in der Tangentialebene der Fläche liegt. Bei den Flächen zweiten Grades haben wir nun folgendes allgemeine Theorem:

Die Pole aller derjenigen Linien auf einer Fläche zweiten Grades, welche durch einen Punkt gehen, und deren Oskulationsebenen in diesem Punkt eine gemeinschaftliche Durchschnittslinie haben, liegen auf einer Geraden, welche die konjugirte Polare dieser Durchschnittslinie ist.

Der Beweis dieses Satzes beruht darauf, daß die genannten Pole, nach dem Satze von Dupin, zugleich die Spitzen der Kegel sind, welche die Fläche in den durch die Oskulationsebenen hervorgebrachten Schnitten berühren, und daß die Spitzen aller Kegel, deren Berührungskurven mit einer Fläche zweiten Grades in Ebenen liegen, die eine gemeinsame Durchschnittslinie haben, eine Gerade bilden.

Die Oskulationsebenen aller geodätischen Linien, welche durch einen Punkt auf einer Fläche gehen, haben die Normale der Fläche zur gemeinschaftlichen Durchschnittslinie; wir schließen somit weiter:

Die Pole der Oskulationsebenen aller geodätischen Linien auf einer Fläche zweiten Grades, welche durch einen Punkt gehen, liegen in einer Geraden.

Es sei M dieser Punkt; er liege auf dem Ellipsoid (ϱ), wo sich die Hyperboloide (μ) und (ν) schneiden. Wir ziehen in der Tangentialebene die Geraden Mm und Mn, welche die Krümmungslinien $\mu = \text{const.}$ und $\nu = \text{const.}$ auf (ϱ) senkrecht schneiden. Mm ist der Hauptkrümmungshalbmesser von (μ) und Mn derjenige von (ν), und zwar gehen die Ebenen ihrer Krümmungskreise durch die Normale von (ϱ), so ist

$$\text{Mm} = \frac{(\varrho^2 - \mu^2)^{3/2}(\mu^2 - \nu^2)^{1/2}}{\mu\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}} \qquad \text{Mn} = \frac{(\varrho^2 - \nu^2)^{3/2}(\mu^2 - \nu^2)^{1/2}}{\nu\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}$$

Nun sind dem Früheren zufolge (§. 23) m und n die Spitzen der Kegel, welche (ϱ) in solchen Kurven berühren, deren Ebenen durch die Normale von (ϱ) gehen, und die Krümmungslinien $\mu = \text{const.}$ und $\nu = \text{const.}$ auf (ϱ) tangiren. Mithin sind auch unserer Erklärung gemäß m und n die Pole der Oskulationsebenen der beiden durch M gehenden geodätischen Linien auf (ϱ), deren Tangenten Mm und Mn sind. Die Pole der Oskulationsebenen aller durch M gehenden geodätischen Linien liegen somit auf der Geraden mn; es sei Mg die Tangente einer solchen geodätischen Linie, welche mit der Linie Mm den Winkel i bildet, so besteht die Gleichung

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \alpha^2$$

Man ziehe die konjugirte Tangente von Mg, welche mn in h trifft, so ist h der Pol der geodätischen Linie Mg. Winkel hMm = i'. Man hat nun zur Bestimmung von Mh

$$\frac{\cos i'}{\text{Mm}} + \frac{\sin i'}{\text{Mn}} = \frac{1}{\text{Mh}}$$

Wir ziehen in dem Diametralschnitt von (ϱ), welcher parallel der Tangentialebene von M ist, die Halbaxen, so sind diese parallel Mm und Mn und gleich $\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}$ und $\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}$; zwei Semidiameter parallel Mg und Mh bilden mit der ersteren Axe die Winkel i und i'. Diese Semidiameter sind nach dem Satze von Dupin konjugirte Semidiameter der Ellipse; also ist

$$\cot g\, i \,.\, \cot g\, i' = \frac{\varrho^2 - \mu^2}{\varrho^2 - \nu^2}$$

Wir haben nun drei Gleichungen, aus welchen wir die Winkel i und i' eliminiren können; aus $\mu^2\cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \alpha^2$ ergibt sich $\cot g\, i = \dfrac{\sqrt{\alpha^2 - \nu^2}}{\sqrt{\mu^2 - \alpha^2}}$;

also $\cot g\, i' = \dfrac{(\varrho^2 - \mu^2)\sqrt{\mu^2 - \alpha^2}}{(\varrho^2 - \nu^2)\sqrt{\alpha^2 - \nu^2}}$; hieraus

$$\cos i' = \frac{(\varrho^2 - \mu^2)\sqrt{\mu^2 - \alpha^2}}{\sqrt{(\varrho^2 - \mu^2)^2(\mu^2 - \alpha^2) + (\varrho^2 - \nu^2)^2(\alpha^2 - \nu^2)}}$$

$$\sin i' = \frac{(\varrho^2 - \nu^2)\sqrt{\alpha^2 - \nu^2}}{\sqrt{(\varrho^2 - \mu^2)^2(\mu^2 - \alpha^2) + (\varrho^2 - \nu^2)^2(\alpha^2 - \nu^2)}}$$

7. bis. $$\frac{1}{\text{Mh}} = \frac{\mu\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{\mu^2 - \alpha^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\mu^2 - \nu^2}\sqrt{(\varrho^2 - \mu^2)^2(\mu^2 - \alpha^2) + (\varrho^2 - \nu^2)^2(\alpha^2 - \nu^2)}}$$
$$+ \frac{\nu\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}\sqrt{\alpha^2 - \nu^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}\sqrt{\mu^2 - \nu^2}\sqrt{(\varrho^2 - \mu^2)^2(\mu^2 - \alpha^2) + (\varrho^2 - \nu^2)^2(\alpha^2 - \nu^2)}}$$

Diese Gleichung gibt den Werth der Poldistanz Mh für alle durch M gehenden geodätischen Linien an; die Größe α ist die einzige Variabele, welche für jede geodätische Linie wieder einen besonderen Werth annimmt.

Die Tangenten aller geodätischen Linien einer centrischen Fläche zweiten Grades (ϱ) berühren eine zweite homofokale Fläche (α); es ist nun noch Einiges zu sagen über die Natur der Kurve auf (α), welche die auf einander folgenden Berührungspunkte der Tangenten enthält.

In §. 24 haben wir die Gleichung 13 aufgestellt, $\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = C'$ $\quad C' = \varrho^2 - \frac{\varrho^2 (\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}{P^2 . \delta^2}$ oder

$$8. \quad \mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \varrho^2 - \frac{\varrho^2 (\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}{P^2 . \delta^2}$$

Diese Relation gilt für eine beliebige Tangente der Fläche (ϱ), welche mit den Krümmungslinien im Berührungspunkt die Winkel i und $90^0 - i$ bildet. P ist das vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene gefällte Perpendikel, und δ ist der mit der Tangente parallele Semidiameter der Fläche. Die Gleichung 14 des §. 24 gibt $\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \alpha^2$, also durch Verbindung mit 8.

$$9. \quad P^2 . \delta^2 = \frac{\varrho^2 (\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}{\varrho^2 - \alpha^2}$$

So gut nun die vorstehenden Schlüsse sich auf die Fläche (ϱ) anwenden lassen, ebenso passen sie auch für die Fläche (α); setzen wir also das vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene von (α) gefällte Perpendikel $= P_,$, und den mit der gemeinschaftlichen Tangente parallelen Semidiameter der Fläche gleich $\delta_,$, so finden wir ganz auf demselben Wege, der von der Gleichung 8 auf 9 geführt hat,

$$P_,^2 . \delta_,^2 = \frac{\alpha^2 (\alpha^2 - b^2)(\alpha^2 - c^2)}{\alpha^2 - \varrho^2}$$

Wenn man an zwei homofokale Flächen irgend eine gemeinschaftliche Tangente zieht, so ist das Produkt des vom Mittelpunkt auf die durch die Tangente gelegte Tangentialebene gefällten Perpendikels und des der Tangente parallelen Semidiameters bei beiden Flächen eine konstante Größe.

Bei (ϱ) hat also das Produkt $P . \delta$ und bei (α) $P_, . \delta_,$ einen konstanten Werth. Für die Fläche (α) ist im Berührungspunkt

$$\mu_,^2 \cos^2 i_, + \nu_,^2 \sin^2 i_, = \alpha^2 - \frac{\alpha^2 (\alpha^2 - b^2)(\alpha^2 - c^2)}{P_,^2 . \delta_,^2}$$

Der Ausdruck links hat also gleichfalls bei beiden Flächen für jede gemeinschaftliche Tangente je einen konstanten Werth.

Wir können obigen Satz auch so darstellen:

Gegeben ist eine centrische Fläche zweiten Grades und eine Konstante. Wenn man in irgend einem Punkt der Fläche eine Tangente zieht, und einen derselben parallelen Semidiameter, so daß das Produkt $P . \delta$ gleich der Konstante ist, so umhüllen alle solche Tangenten eine zweite homofokale Fläche.

Aus diesem Satz, den wir gleich nachher auf die Linien anwenden wollen, welche die auf einander folgenden Berührungspunkte der Tangenten einer geodätischen Linie auf einer zweiten homofokalen Fläche beschreiben, können wir zunächst einige Consequenzen ziehen.

Die Poloide hat bekanntlich die Eigenschaft, daß alle Perpendikel, welche vom Mittelpunkt auf die durch ihre Punkte gelegten Tangentialebenen des Ellipsoids herabgelassen werden, einander gleich sind. Solche Poloiden lassen sich auf allen centrischen Flächen zweiten Grades ziehen. Der letzte Satz führt sogleich auf folgende weitere Eigenschaft dieser Linie:

Wenn man durch alle Punkte einer Poloide auf einer centrischen Fläche zweiten Grades an diese und an eine homofokale Fläche gemeinschaftliche Tangenten legt, so sind die den Tangenten parallelen Semidiameter der ersten Fläche einander gleich, ihre Endpunkte liegen auf einer sphärischen Kurve; diese Semidiameter bilden einen Kegel zweiten Grades und sind den konjugirten Tangenten einer Krümmungslinie der ersten Fläche parallel.

Hinsichtlich der Berührungskurve, welche die gemeinschaftlichen, durch die einzelnen Punkte der Poloide gehenden Tangenten auf der zweiten homofokalen Fläche beschreiben, ist zu bemerken, daß diejenigen Normalebenen der letzteren, welche durch diese Geraden, d. h. durch die von allen Punkten der Berührungslinie an die erste homofokale Fläche gezogenen gemeinschaftlichen Tangenten, sich legen lassen, eine der Fläche concentrische Kugel tangiren. Denn die durch die gemeinsame Tangente von zwei homofokalen Flächen gehende Berührungsebene der einen Fläche ist eine Normalebene der andern.

Wir haben oben gefunden, daß die gemeinsamen Tangenten, welche sich an zwei homofokale Flächen durch einen nicht auf denselben liegenden Punkt ziehen lassen, die Durchschnitte von zwei homofokalen Kegeln sind; also gibt es entweder vier oder keine solche Tangenten. In dem speziellen Fall, wo der Punkt auf einer dieser Flächen liegt, verwandelt sich einer der beiden Kegel in eine Ebene und es fallen die vier Tangenten in zwei zusammen; mithin lassen sich von jedem Punkt einer Fläche zwei gemeinsame Tangenten an die andere ziehen. Dieß geht schon daraus hervor, daß der Gleichung $P . \delta = \text{const.}$ durch zwei verschieden gerichtete, unter sich gleiche Semidiameter genügt werden kann. Wenn also eine beliebige Kurve auf einer centrischen Fläche zweiten Grades gegeben ist, so bilden die von ihr an eine homofokale Fläche gezogenen gemeinsamen Tangenten zwei verschiedene Systeme und zwei verschiedene Flächen. Diese beiden Systeme fallen bei der Krümmungslinien in eines zusammen.

Wenn vier beliebige Punkte auf einer centrischen Fläche zweiten Grades gegeben sind, welche die Eigenschaft haben, daß die vom Mittelpunkt auf ihre Tangentialebenen gefällten Perpendikel eine Proportion bilden, so sind auch je vier Semidiameter, welche den durch diese Punkte an eine zweite homofokale Fläche zu ziehenden gemeinschaftlichen Tangenten parallel sind, proportionirt.

Auf den vier Poloiden, welche durch die Ecken eines Krümmungslinienvierecks gehen, lassen sich unendlich viele Punkte von der genannten Eigenschaft finden.

Auf der Fläche liegt eine Anzahl von Punkten, bei welchen die vom Mittelpunkt auf ihre Tangentialebenen gefällten Perpendikel eine gewisse Reihe bilden, z. B. eine geometrische Progression, oder eine arithmetische, da

$P = \frac{C}{\delta}$; $P' = \frac{C}{\delta'}$; $P'' = \frac{C}{\delta''}$ u. s. f., so findet man sogleich, daß im ersten Fall die Semidiameter der Fläche, welche den durch diese Punkte an eine zweite homofokale Fläche zu ziehenden gemeinschaftlichen Tangenten parallel sind, eine geometrische Progression, im andern Fall eine harmonische Reihe bilden.

Wenn auf einer centrischen Fläche zweiten Grades irgend eine Kurve A gegeben ist, so lassen sich von allen Punkten derselben an eine zweite homofokale Fläche gemeinschaftliche Tangenten ziehen; die Berührungspunkte beschreiben auf der zweiten Fläche eine Kurve B, welche mit A in einer gewissen Verwandtschaft steht. Diese Verwandtschaft ist in den Gleichungen $P.\delta = \text{const.}$ $P'.\delta' = \text{const.}$ ausgedrückt. Ist z. B. A eine geodätische Linie auf der ersten Fläche, und sind A und A' zwei auf einander folgende Punkte von A, so berühren die Oskulationsebenen dieser Linien in A und A' eine zweite homofokale Fläche in den Punkten B und B'; mithin ist der Durchschnitt der Oskulationsebenen eine konjugirte Tangente des Elements BB' und zugleich eine Tangente der geodätischen Linie AA'. Bei letzterer hat die Gleichung $P.\delta = \text{const.}$ die Bedeutung, daß δ der mit der Tangente der Linie parallele Semidiameter ist, und bei der Linie BB' ist in $P'.\delta' = \text{const.}$ δ' der mit der konjugirten Tangente der Linie parallele Semidiameter. Wir haben also den Satz von Chasles:

Die Tangenten einer geodätischen Linie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades sind zugleich die konjugirten Tangenten der Kurve, welche ihre auf einander folgenden Berührungspunkte auf einer zweiten homofokalen Fläche bilden. Für letztere Kurve hat die Gleichung $P'.\delta' = \text{const.}$ die Bedeutung, daß δ' der mit der konjugirten Tangente parallele Semidiameter der Fläche ist.

Wir nehmen nun zwei homofokale Flächen an, (α) und (β). Auf der ersten ist der Punkt A, auf der zweiten der Punkt B. AB ist eine gemeinschaftliche Tangente beider Flächen, und zwar berührt diese Tangente eine der beiden von A aus auf (α) an die Durchschnittslinie von (α) und (β) zu ziehenden geodätischen Linien. Dann ist BA die konjugirte Tangente einer von B aus auf (β) zu ziehenden Linie, $P'.\delta' = \text{const.}$, die wir so eben betrachtet haben. Da sich nun durch den Mittelpunkt zwei gleiche Semidiameter δ' in dem mit der Tangentialebene von B parallelen Diametralschnitt der Fläche (β) ziehen lassen, so kreuzt in B noch eine zweite Linie $P'.\delta' = \text{const.}$, welche die Eigenschaft hat, daß alle ihre konjugirten Tangenten eine geodätische Linie auf (α) berühren. Da zwei gleiche Semidiameter δ' mit den Axen ihres Diametralschnitts gleiche Winkel bilden, so bilden auch zwei mit ihnen parallele Tangenten der Fläche mit den Krümmungslinien gleiche Winkel, welche durch ihren Durchschnittspunkt gehen; also kann man den Satz aufstellen:

Gegeben sind zwei homofokale Flächen verschiedener Art, die gemeinschaftliche Tangenten zulassen. In jedem Punkt einer solchen Fläche kreuzen sich zwei Linien $P'.\delta' = \text{const.}$, oder solche, deren konjugirte Tangenten je eine geodätische Linie auf der andern Fläche berühren. Der Winkel dieser Linien in ihrem Durchschnittspunkt wird von den Krümmungslinien desselben Punkts auf der ersten Fläche halbirt.

Die Linien $P' . \delta' = \text{const.}$, welchen die Eigenschaft zukommt, daß ihre konjugirten Tangenten eine geodätische Linie auf einer zweiten homofokalen Fläche berühren, werden nach §. 15 „konjugirte geodätische Linien“ genannt. Zwei homofokale Flächen, z. B. ein Ellipsoid (α) und ein einmantliges Hyperboloid (β) schneiden sich in zwei, in Beziehung auf die Hauptebenen symmetrisch gelegenen Krümmungslinien C und C'. Die Zone der Fläche (α), welche von C und C' begrenzt ist, enthält zwei Systeme von geodätischen Linien, welche C und C' berühren; denn von jedem Punkt auf (α) lassen sich sowohl an C als auch an C' zwei tangirende geodätische Linien ziehen. Die Krümmungslinien C und C' theilen andererseits das einmantlige Hyperboloid (β) in drei Zonen; die mittlere ist von dem Ellipsoid eingeschlossen; die beiden äußeren enthalten die konjugirten geodätischen Linien, welche der ellipsoidischen Zone zwischen C und C' entsprechen. Von jedem Punkte auf C gehen zwei solche konjugirte geodätische Linien unter rechten Winkeln aus, und verlaufen auf dem einmantligen Hyperboloid ins Unendliche, kommen dann auf dem von C' begrenzten Mantel wieder zum Vorschein, nähern sich dieser Kurve und schneiden sie ebenfalls rechtwinklig. Die konjugirten geodätischen Linien anf (β) bilden Vierecke, von welchen je zwei Gegenseiten zu einem System gehören. Die Winkel eines solchen Vierecks werden halbirt durch die Krümmungslinien der Fläche. Also sind auch je zwei Semidiameter gleich, welche den Tangenten von zwei in einer Ecke zusammenstoßenden Seiten parallel sind.

Wir wollen nun auf einer centrischen Fläche zweiten Grades eine beliebige Anzahl von Punkten annehmen, z. B. fünf Punkte, A, B, C, D, E. Je zwei dieser Punkte lassen sich durch eine konjugirte geodätische Linie verbinden. Dadurch erhält man das Fünfeck ABCDE. Die konjugirten Tangenten der einzelnen Seiten berühren aber jetzt nicht mehr eine homofokale Fläche, sondern verschiedene; jede der konjugirten geodätischen Linien AB, BC ... schneidet also gehörig verlängert, wieder eine andere Krümmungslinie auf der gegebenen Fläche senkrecht. Auch werden die Winkel des Fünfecks nicht mehr von den Krümmungslinien halbirt. Für die Punkte A und B haben wir z. B. die Gleichung $P_a . \delta_a = P_b . \delta'_b$; P_a und P_b sind die vom Mittelpunkt auf die Tangentialebenen von A und B gefällten Perpendikel, δ_a und δ'_b sind zwei Semidiameter der Fläche, welche zwei durch B und C gezogenen Tangenten der Fläche parallel laufen, die den Tangenten der Linie BC in den Punkten B und C konjugirt sind. Indem wir diese Bezeichnungsweise auf die übrigen Ecken und Seiten des Fünfecks ausdehnen, erhalten wir die weiteren Gleichungen $P_b . \delta_b = P_c . \delta'_c$; $P_c . \delta_c = P_d . \delta'_d$; $P_d . \delta_d = P_e . \delta'_e$; $P_e . \delta_e = P_a . \delta'_a$

10. $\delta_a . \delta_b . \delta_c . \delta_d . \delta_e = \delta'_a . \delta'_b . \delta'_c . \delta'_d . \delta'_e$

In der Gleichung $r = \frac{\delta^2}{P}$ bedeutet r den Krümmungshalbmesser des durch eine beliebige Tangente in einem Punkte gelegten Normalschnitts der Fläche, δ den dieser Tangente parallelen Semidiameter. Längs der konjugirten geodätischen Linie AB in dem Fünfeck ABCDE ist das Produkt $P . \delta$ konstant, also auch $P^3 . r$, wo r der Krümmungshalbmesser des durch eine konjugirte Tangente der Linie gelegten Normalschnitts der Fläche ist. Eine ganz ähnliche Schlußweise, wie diejenige, welche auf die Gleichung 10 geführt hat, ergibt dieses Resultat:

11. $r_a . r_b . r_c . r_d . r_e = r'_a . r'_b . r'_c . r'_d . r'_e$

Die Formeln 10 und 11 gelten für Vielecke von beliebig vielen Seiten; sie enthalten folgenden Satz:

O

In einem von konjugirten geodätischen Linien auf einer centrischen Fläche zweiten Grades gebildeten Vieleck von n Seiten theilen sich sowohl die zwei n Semidiameter der Fläche, welche den konjugirten Tangenten von je zwei in einer Ecke zusammenstoßenden Seiten parallel sind, als auch die zwei n Krümmungshalbmesser der durch diese konjugirten Tangenten gelegten Normalschnitte in zwei Gruppen; das Produkt der n Semidiameter oder der n Krümmungshalbmesser der einen Gruppe ist gleich dem Produkt der n andern.

Wir haben oben den Ausdruck gefunden

$$\mu_,^2 \cos^2 i_, + \nu_,^2 \sin^2 i_, = \alpha^2 - \frac{\alpha^2 (\alpha^2 - b^2)(\alpha^2 - c^2)}{P_,^2 \cdot \delta_,^2}$$

Dieser gilt für eine auf der Fläche (α) gezogene konjugirte geodätische Linie, $\mu_,$ und $\nu_,$ sind die großen Halbaxen der zwei durch einen Punkt dieser Linie gehenden homofokalen Flächen $(\mu_,)$ und $(\nu_,)$; $i_,$ ist der Winkel, welchen die konjugirte Tangente der Linie in diesem Punkt mit der Krümmungslinie bildet, die der Durchschnitt zwischen (α) und $(\mu_,)$ ist; $\delta_,$ ist der mit dieser konjugirten Tangente parallele Semidiameter der Fläche, und $P_,$ das vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene des Punkts gefällte Perpendikel. Da für eine konjugirte geodätische Linie $P_, . \delta_,$ konstant ist, so entspricht eine solche Linie auch dieser Gleichung

12. $\mu_,^2 \cos^2 i_, + \nu_,^2 \sin^2 i_, = \text{const.}$

Man ziehe durch einen Punkt auf (α) zwei konjugirte geodätische Linien, die mit einander einen rechten Winkel bilden, so bestehen die Relationen:

$$\mu_,^2 \cos^2 i_, + \nu_,^2 \sin^2 i_, = \text{const.} \qquad \mu_,^2 \sin^2 i_, + \nu_,^2 \cos^2 i_, = \text{const.}$$
$$\mu_,^2 + \nu_,^2 = \text{const.}$$

Nun ist der vom Mittelpunkt nach dem Punkt auf (α) gezogene Halbmesser gleich $\sqrt{\alpha^2 + \mu_,^2 + \nu_,^2 - b^2 - c^2}$, also konstant:

Diejenigen Punkte auf einer centrischen Fläche zweiten Grades, von welchen aus zwei sich rechtwinklig schneidende konjugirte geodätische Linien gezogen werden können, wovon jede, gehörig verlängert, auf einer bestimmten Krümmungslinie senkrecht steht, liegen auf einer sphärischen Kurve.

Denn in der Gleichung $\mu_,^2 \cos^2 i_, + \nu_,^2 \sin^2 i_, = \text{const.}$ bedeutet die Konstante das Quadrat der großen Halbaxe von derjenigen homofokalen Fläche, auf deren Durchschnittslinie mit (α) die konjugirte geodätische Linie senkrecht ist, weil für $i_, = o$, die Konstante $= \mu_,^2$ wird.

Die Gleichung 18 des §. 24 enthält einen Satz, der sich ohne Mühe und durch ganz ähnliche Schlüsse auf die konjugirten geodätischen Linien ausdehnen läßt, und so lautet:

Wenn man einer Krümmungslinie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades ein Vieleck von n konjugirten geodätischen Linien einbeschreibt, so lassen sich die Winkel, welche die konjugirte Tangente jeder Seite des Vielecks mit der Krümmungslinie bildet, in zwei Gruppen bringen; das Produkt der Sinus der n Winkel in der ersten Gruppe ist gleich dem Produkt der Sinus der n Winkel in der andern.

Auf der Fläche (α) ist ein Viereck ABCD gegeben; AB und CD sind geodätische Linien, welche, gehörig verlängert, eine Krümmungslinie von (α)

berühren, BC und DA sind konjugirte geodätische Linien, welche auf der nämlichen Krümmungslinie senkrecht stehen. Durch diese Krümmungslinie geht die homofokale Fläche (β). Die Tangenten von AB und CD beschreiben auf (β) zwei konjugirte geodätische Linien A'B' und C'D'; die konjugirten Tangenten von BC und DA beschreiben auf (β) zwei geodätische Linien B'C' und D'A'. Eine gemeinschaftliche Tangente von (α) und (β) kann also in einem ununterbrochenen Zuge über beide Flächen hingleiten, indem die zwei Berührungspunkte stets auf den Vierecken ABCD und A'B'C'D' liegen. Wenn sie auf dem einen Viereck eine Tangente ist, so ist sie auf dem andern Viereck eine konjugirte Tangente.

Wir wollen nun das in §. 15 über die Flächen (α) und (β) Gesagte auf die homofokalen Flächen anwenden. Wir setzen also statt (α) ein Ellipsoid (ϱ), und statt (β) ein homofokales einmantliges Hyperboloid (μ). Alle Tangenten einer geodätischen Linie auf (ϱ) berühren die Fläche (μ), wofern nämlich die geodätische Linie die Durchschnittskurve von (ϱ) und (μ) tangirt. Eine Ebene, durch die gemeinschaftliche Tangente gelegt, welche eine der beiden Flächen (ϱ) oder (μ) berührt, steht normal auf der andern; mithin sind (ϱ) und (μ) die Flächen der Krümmungsmittelpunkte einer dritten Fläche (λ); wir können zunächst diesen Satz aufstellen:

Zwei homofokale Flächen verschiedener Art, die sich also nicht gegenseitig einschließen, haben die Eigenschaft, daß ihre scheinbaren Umrisse von irgend einem Punkt des Raums aus gesehen, auf einander senkrecht stehen; sie sind also die Flächen der Krümmungsmittelpunkte einer dritten Fläche (λ) (s. o.).

Die Tangenten einer geodätischen Linie von (ϱ) bilden eine Krümmungslinie des ersten Systems von (λ) und die Tangenten einer geodätischen Linie von (μ) eine Krümmungslinie des zweiten Systems von (λ). Man kann sich hieraus schon einige Vorstellungen ableiten in Beziehung auf die Form der Krümmungslinien von (λ). Da sich von jedem Punkt auf einem Ellipsoid, der sich außerhalb des von einer Krümmungslinie eingeschlossenen Raums befindet, zwei geodätische Linien an diese Krümmungslinie ziehen lassen, so geht daraus hervor, daß es zu jedem Punkt auf der Fläche (λ) noch einen zweiten gibt, so daß die Normalen beider Punkte sich auf der Fläche (ϱ) schneiden, und mit der durch den Durchschnittspunkt gehenden Krümmungslinie von (ϱ) gleiche Winkel bilden. Wenn man mit den Normalen zweier auf solche Art zusammengehörigen Punkte von (λ) parallele Semidiameter von (ϱ) zieht, so sind diese einander gleich. Wir haben oben gesehen, daß sich durch jeden Punkt im allgemeinen vier gemeinschaftliche Tangenten an zwei homofokale Flächen verschiedener Art ziehen lassen, und daß diese Tangenten die Durchschnitte von zwei homofokalen Kegeln sind, also eine symmetrische Lage in Beziehung auf die Axen der Kegel haben. Hieraus folgt der Satz:

Von jedem Punkt des Raums lassen sich an die Fläche (λ), deren Normalen zwei homofokale Fächen berühren, im allgemeinen vier, jedenfalls nicht mehr, Normalen ziehen, welche eine symmetrische Lage in Beziehung auf drei durch diesen Punkt gehende rechtwinklige Axen haben. Diese Normalen sind die Durchschnitte von zwei concentrischen homofokalen Kegeln, welche die Flächen der Krümmungsmittelpunkte von (λ) tangiren.

Man nehme auf (λ) selbst einen Punkt an; da sich durch denselben vier

gemeinschaftliche Tangenten an die homofokalen Flächen (ϱ) und (μ) ziehen lassen, welche zugleich Normalen von (λ) sind, so folgt daraus unmittelbar, daß sich in jedem Punkt des Raums vier Flächen (λ) kreuzen, von deren Tangentialebenen sich zwei und zwei in Geraden schneiden, die auf einander senkrecht stehen. Es lassen sich durch den Punkt drei zu einander senkrechte Ebenen legen, von welchen jede den Winkel zwischen zwei Tangentialebenen halbirt. Diese Ebenen berühren die durch denselben Punkt gehenden drei homofokalen Flächen von (ϱ) und (μ).

Die Differenzialgleichung der Fläche (λ), deren Krümmungsmittelpunkte auf zwei homofokalen Flächen liegen, läßt sich auf folgende Art erhalten.

Wir haben schon in §. 21, 14. 15. und 16. diese Formeln gefunden

$$ds' = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}{\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}\,d\varrho; \quad ds'' = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}}\,d\mu$$

$$ds''' = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}{\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}\,d\nu$$

Die drei homofokalen Flächen (ϱ), (μ), (ν) deren Gleichungen sind

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1$$

schneiden sich im Punkt (ϱ, μ, ν). Will man durch elliptische Coordinaten zu einem zweiten Punkt des Raums ($\varrho + d\varrho, \mu, \nu$) übergehen, so erhält man aus

$$\begin{aligned} bcx &= \varrho\mu\nu \\ b\sqrt{c^2 - b^2}\,.\,y &= \sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2} \\ c\sqrt{c^2 - b^2}\,.\,z &= \sqrt{\varrho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2} \end{aligned}$$

durch Differenziation

$$\begin{aligned} bc\,dx &= \mu\nu\,d\varrho \\ b\sqrt{c^2 - h^2}\,.\,dy &= \frac{\varrho\,d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - b^2}}\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2} \\ c\sqrt{c^2 - b^2}\,.\,dz &= \frac{\varrho\,d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - c^2}}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2} \end{aligned}$$

Hieraus

$$ds'^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left(\frac{\mu^2\nu^2}{b^2c^2} + \frac{\varrho^2(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)}{b^2(\varrho^2-b^2)(c^2-b^2)} + \frac{\varrho^2(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)}{c^2(\varrho^2-c^2)(c^2-b^2)}\right)d\varrho^2$$

oder

$$ds' = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}{\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}\,d\varrho$$

Ebenso findet man durch Differenziation nach μ und nach ν die Werthe von ds'' und ds'''; indem man vom Punkt (ϱ, μ, ν) zuerst zum Punkte ($\varrho, \mu + d\mu, \nu$) und dann zum Punkte ($\varrho, \mu, \nu + d\nu$) übergeht. Die Linien ds', ds'', ds''' bilden drei anstoßende Kanten eines unendlich kleinen rechtwinkligen Parallelepipeds, dessen Diagonale wir mit ds bezeichnen. Diese Diagonale verbindet die zwei Gegenecken des Parallelepipeds (ϱ, μ, ν) und ($\varrho + d\varrho, \mu + d\mu, \nu + d\nu$). Man könnte den Werth von ds aus der Gleichung $ds = \sqrt{ds'^2 + ds''^2 + ds'''^2}$ entwickeln, allein man erhielte auf diese Art kein für die Rechnung günstiges

Resultat. Wir wählen daher einen andern Weg, indem wir annehmen wollen, daß die Diagonale ds, gehörig verlängert, die beiden homofokalen Flächen (α) und (β) berühre. Die Gleichungen 6 und 7 dieses §. gelten also für ds. Diese Gleichungen sind, indem wir die Winkel, welche ds mit ds′, ds″, ds‴ bildet, der Reihe nach i′, i″, i‴ nennen

$$13.\quad \frac{\cos^2 i'}{\varrho^2 - \alpha^2} + \frac{\cos^2 i''}{\mu^2 - \alpha^2} + \frac{\cos^2 i'''}{\nu^2 - \alpha^2} = 0$$

$$\frac{\cos^2 i'}{\varrho^2 - \beta^2} + \frac{\cos^2 i''}{\mu^2 - \beta^2} + \frac{\cos^2 i'''}{\nu^2 - \beta^2} = 0$$

Durch Verbindung mit $\cos^2 i' + \cos^2 i'' + \cos^2 i''' = 1$ erhält man

$$14.\quad \cos^2 i' = \frac{(\varrho^2 - \alpha^2)(\varrho^2 - \beta^2)}{(\varrho^2 - \mu^2)(\varrho^2 - \nu^2)} \qquad \cos^2 i'' = \frac{(\alpha^2 - \mu^2)(\mu^2 - \beta^2)}{(\varrho^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)}$$

$$\cos^2 i''' = \frac{(\alpha^2 - \nu^2)(\beta^2 - \nu^2)}{(\varrho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)}$$

Nun ist offenbar, wie sich aus einer sehr einfachen geometrischen Betrachtung ergibt, die Projektion von den drei Kanten ds′, ds″, ds‴ des obengenannten Parallelepipeds auf die Diagonale ds gleich ds, oder

$$ds = ds' \,.\, \cos i' + ds'' \,.\, \cos i'' + ds''' \,.\, \cos i'''$$

Durch Benützung unserer Werthe für ds′, ds″, ds‴, cos i′, cos i″, cos i‴ erhalten wir

$$15.\quad ds = d\varrho \sqrt{\frac{(\varrho^2 - \alpha^2)(\varrho^2 - \beta^2)}{(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}} + d\mu \sqrt{\frac{(\alpha^2 - \mu^2)(\mu^2 - \beta^2)}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}}$$
$$+ d\nu \sqrt{\frac{(\alpha^2 - \nu^2)(\beta^2 - \nu^2)}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}}$$

Es seien die Flächen (α) und (β) gegeben, also in 15. nicht blos b und c, sondern auch α und β konstant, dagegen ϱ, μ, ν die einzigen Variabeln; so bezeichnet offenbar ds die Zunahme der gemeinschaftlichen Tangente von (α) und (β), indem man von einem Punkte (ϱ, μ, ν) des Raums, welcher auf dieser Tangente liegt, zu einem unendlich nahen Punkt ($\varrho + d\varrho,\ \mu + d\mu,\ \nu + d\nu$) übergeht. Wir nehmen nun an, diese beiden Punkte liegen auf der Fläche (λ), dann sind die durch dieselben gezogenen gemeinschaftlichen Tangenten von (α) und (β) Normalen von (λ) und schneiden sich auf einer der beiden Flächen, (α) oder (β), mithin ist ds = o und

$$16.\quad d\varrho \sqrt{\frac{(\varrho^2 - \alpha^2)(\varrho^2 - \beta^2)}{(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}} + d\mu \sqrt{\frac{(\alpha^2 - \mu^2)(\mu^2 - \beta^2)}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}}$$
$$+ d\nu \sqrt{\frac{(\alpha^2 - \nu^2)(\beta^2 - \nu^2)}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}} = 0$$

die Differenzialgleichung der Fläche (λ), und wenn wir das Integral derselben mit L (ϱ, μ, ν) bezeichnen

$$17.\quad L(\varrho, \mu, \nu) = \text{const.}$$

die Gleichung derjenigen Fläche (λ), deren Krümmungsmittelpunkte auf zwei homofokalen Flächen liegen. Liouville hat dieselbe zuerst angegeben, aber auf andere Art bewiesen.

Man hat aber auch $ds = \frac{ds'}{\cos i'} = \frac{ds''}{\cos i''} = \frac{ds'''}{\cos i'''}$ oder durch Substitution obiger Werthe

$$18.\quad ds = \frac{(\varrho^2 - \mu^2)(\varrho^2 - \nu^2)}{\Delta(\varrho^2)} d\varrho;\ ds = -\frac{(\varrho^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{\Delta(\mu^2)} d\mu;$$
$$ds = \frac{(\varrho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{\Delta(\nu^2)} d\nu$$

indem wir der Einfachheit wegen setzen

$$19.\quad \Delta(\varrho^2) = \sqrt{(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)(\varrho^2 - \alpha^2)(\varrho^2 - \beta^2)}$$
$$\Delta(\mu^2) = \sqrt{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)(\mu^2 - \alpha^2)(\beta^2 - \mu^2)}$$
$$\Delta(\nu^2) = \sqrt{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)(\alpha^2 - \nu^2)(\beta^2 - \nu^2)}$$

Aus 18. finden wir

$$\frac{d\varrho}{\Delta(\varrho^2)} + \frac{d\mu}{\Delta(\mu^2)} + \frac{d\nu}{\Delta(\nu^2)}$$
$$= ds\left(\frac{1}{(\varrho^2-\mu^2)(\varrho^2-\nu^2)} - \frac{1}{(\varrho^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)} + \frac{1}{(\varrho^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}\right) = o$$
$$\frac{\varrho^2 d\varrho}{\Delta(\varrho^2)} + \frac{\mu^2 d\mu}{\Delta(\mu^2)} + \frac{\nu^2 d\nu}{\Delta(\nu^2)}$$
$$= ds\left(\frac{\varrho^2}{(\varrho^2-\mu^2)(\varrho^2-\nu^2)} - \frac{\mu^2}{(\varrho^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)} + \frac{\nu^2}{(\varrho^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}\right) = o$$
$$\frac{\varrho^4 d\varrho}{\Delta(\varrho^2)} + \frac{\mu^4 d\mu}{\Delta(\mu^2)} + \frac{\nu^4 d\nu}{\Delta(\nu^2)}$$
$$= ds\left(\frac{\varrho^4}{(\varrho^2-\mu^2)(\varrho^2-\nu^2)} - \frac{\mu^4}{(\varrho^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)} + \frac{\nu^4}{(\varrho^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}\right) = ds$$

oder

$$20.\quad \frac{d\varrho}{\Delta(\varrho^2)} + \frac{d\mu}{\Delta(\mu^2)} + \frac{d\nu}{\Delta(\nu^2)} = o$$
$$21.\quad \frac{\varrho^2 d\varrho}{\Delta(\varrho^2)} + \frac{\mu^2 d\mu}{\Delta(\mu^2)} + \frac{\nu^2 d\nu}{\Delta(\nu^2)} = o$$
$$22.\quad \frac{\varrho^4 d\varrho}{\Delta(\varrho^2)} + \frac{\mu^4 d\mu}{\Delta(\mu^2)} + \frac{\nu^4 d\nu}{\Delta(\nu^2)} = ds$$

20. und 21. sind die einfachsten unter denjenigen Differenzialgleichungen, welchen Jakobi den Namen „Abelianische Differenzialgleichungen" gegeben hat. Wir haben sie hier ganz auf elementarem Wege, durch Hülfe der Eigenschaften von konjugirten Tangenten homofokaler Flächen gefunden. Liouville leitete dieselben aus den Gleichungen über die Bewegung eines materiellen Punktes ab. Sie folgen unmittelbar aus den Formeln 13 und sind nur eine andere Form derselben; mithin können die Gleichungen 20 und 21 als diejenigen der gemeinschaftlichen Tangenten von zwei homofokalen Flächen betrachtet werden. Man erhält aus ihnen

$$(\varrho^2 - \mu^2)\frac{d\varrho}{\Delta(\varrho^2)} = (\mu^2 - \nu^2)\frac{d\nu}{\Delta(\nu^2)}$$
$$(\varrho^2 - \mu^2)\frac{d\mu}{\Delta(\mu^2)} = -(\varrho^2 - \nu^2)\frac{d\nu}{\Delta(\nu^2)}$$

Es ist aus dem Vorhergehenden einleuchtend, daß die Formeln 20, 21,

22 auf 15. führen müssen, weil nach den Eigenschaften des Parallelepipeds, welches wir betrachtet haben, die Ausdrücke

$$ds = \frac{ds'}{\cos i'}, \ ds = \frac{ds''}{\cos i''}, \ ds = \frac{ds'''}{\cos i'''}$$

eng zusammenhängen mit der Gleichung

$$ds = ds' \cos i' + ds'' \cos i'' + ds''' \cos i'''$$

Dieser Uebergang läßt sich algebraisch, wie folgt, herstellen; statt 22. kann man auch schreiben

$$ds = \frac{\varrho^4 - (\alpha^2 + \beta^2)\,\varrho^2 + \alpha^2\beta^2}{\triangle\,(\varrho^2)}\,d\varrho + \frac{\mu^2 - (\alpha^2 + \beta^2)\,\mu^2 + \alpha^2\beta^2}{\triangle\,(\mu^2)}\,d\mu + \frac{\nu^4 - (\alpha^2 + \beta^2)\,\nu^2 + \alpha^2\beta^2}{\triangle\,(\nu^2)}\,d\nu$$

Da nun $\varrho^4 - (\alpha^2 + \beta^2)\,\varrho^2 + \alpha^2\beta^2 = (\varrho^2 - \alpha^2)\,(\varrho^2 - \beta^2)$ und $\triangle\varrho^2 = \sqrt{(\varrho^2 - b^2)\,(\varrho^2 - c^2)\,(\varrho^2 - \alpha^2)\,(\varrho - \beta^2)}$, so ist

$$\frac{\varrho^4 - (\alpha^2 + \beta^2)\,\varrho^2 + \alpha^2\beta^2}{\triangle\,(\varrho^2)} = \sqrt{\frac{(\varrho^2 - \alpha^2)\,(\varrho^2 - \beta^2)}{(\varrho^2 - b^2)\,(\varrho^2 - c^2)}}$$

ebenso lassen sich die beiden andern Brüche transformiren, wodurch man die Formel 15 erhält.

In der Gleichung der Fläche (λ) $L\,(\varrho, \mu, \nu) = \text{const.}$ können wir der Konstante nach und nach verschiedene Werthe beilegen, C, C' ... und erhalten dadurch eine Reihe von parallelen Flächen (λ), deren Normalen dieselben homofokalen Flächen berühren. $C - C'$ ist die Entfernung von zwei solchen Flächen.

$\frac{dL}{d\alpha} = A$, wo A eine Konstante ist, ist die Gleichung der entwickelbaren Fläche, welche diejenigen Normalen von (λ) bilden, die (α) in einer konjugirten geodätischen Linie und (β) in einer geodätischen Linie berühren. Die beiden Gleichungen $\frac{dL}{d\alpha} = A$ und $\frac{dL}{d\beta} = B$ gehören also einer Normale von (λ) an, und endlich ist $f\,(A, B) = o$ eine Regelfläche, die von Normalen der Fläche (λ) gebildet wird, deren Fußpunkte auf (λ) eine beliebige Linie, aber keine Krümmungslinie, bilden.

Auf einer Kurve liegt ein Punkt (ϱ, μ, ν). Die Tangente der Kurve berührt zwei homofokale Flächen (α) und (β); die Natur dieser Kurve ist bestimmt, wenn für jeden einzelnen Punkt (ϱ, μ, ν) die Beziehung zwischen den Größen ϱ, μ, ν und α, β gegeben ist, oder mit andern Worten, wenn in den Gleichungen

$$\alpha = \varphi\,(\varrho, \mu, \nu) \text{ und } \beta = \psi\,(\varrho, \mu, \nu)$$

die Funktionen φ und ψ spezialisirt sind. Setzen wir also diese Werthe von α und β in 15. ein, so haben wir einen Ausdruck für das Bogendifferenzial jeder beliebigen Kurve im Raum in elliptischen Coordinaten. Will man den entsprechenden Ausdruck für eine Kurve, welche auf einer der homofokalen Flächen liegt, z. B. auf (ϱ), so hat man in 15. zu setzen $d\varrho = o$; $\alpha = \varrho$; $\beta = \psi\,(\varrho, \mu, \nu)$ und erhält

$$23. \quad ds = d\mu \sqrt{\frac{(\varrho^2 - \mu^2)(\mu^2 - \psi^2)}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}} + d\nu \sqrt{\frac{(\varrho^2 - \nu^2)\,(\psi^2 - \nu^2)}{(b^2 - \nu^2)\,(c^2 - \nu^2)}}$$

Vorstehende Gleichung gilt für alle Kurven auf dem Ellipsoid; gehen wir noch weiter und setzen $\psi(\varrho, \mu, \nu) = \beta = \text{const.}$, so erhalten wir

$$24.\quad ds = d\mu \sqrt{\frac{(\varrho^2-\mu^2)(\mu^2-\beta^2)}{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}} + d\nu \sqrt{\frac{(\varrho^2-\nu^2)(\beta^2-\nu^2)}{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}}$$

Diese Relation entspricht den geodätischen Linien auf dem Ellipsoid (ϱ), deren Tangenten die homofokale Fläche (β) berühren. Setzen wir hier $\beta = b$, so ergibt sich

$$25.\quad ds = d\mu \sqrt{\frac{\varrho^2 - \mu^2}{c^2 - \mu^2}} + d\nu \sqrt{\frac{(\varrho^2-\nu^2)}{(c^2-\nu^2)}}$$

Dieß ist die Formel für die geodätischen Linien auf (ϱ), welche durch einen Nabelpunkt gehen.

Wollen wir endlich die Gleichung für den Bogen der Krümmungslinie $\varrho = \text{const.}$ $\mu = \text{const.}$ haben, welche der Durchschnitt des Ellipsoids (ϱ) und des einmantligen Hyperboloids (μ) ist, so setzen wir in 15. $d\varrho = d\mu = 0$, und da die Tangenten dieser Krümmungslinie die homofokalen Flächen (ϱ) und (μ) zugleich berühren, so ist $\alpha = \varrho$ und $\beta = \mu$; mithin ist

$$26.\quad ds = d\nu \sqrt{\frac{(\varrho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}}$$

die Gleichung für das Differenzial des Bogens der Krümmungslinie $\mu = \text{const.}$ auf dem Ellipsoid (ϱ). Man sieht, daß die Rektifikation dieser Bögen auf elliptische beziehungsweise hyperelliptische (Abel'sche) Integrale zurückgeführt werden kann.

§. 26. Allgemeine Gleichung der Linien auf den centrischen Flächen zweiten Grades.

Jede Linie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades entspricht der Gleichung

1. $P . \delta . \delta' . \sin\alpha = \text{const.}$

P ist das vom Mittelpunkt der Fläche auf die Tangentialebene in einem Punkt der Linie gefällte Perpendikel, δ und δ' sind zwei Semidiameter der Fläche, wovon der erste mit der Tangente der Linie, und der zweite mit der konjugirten Tangente derselben parallel ist, und α ist der Winkel zwischen beiden Tangenten.

Der Beweis dieses Satzes beruht ganz einfach auf der bekannten Eigenschaft der centrischen Flächen zweiten Grades, daß der Inhalt aus je drei konjugirten Semidiametern konstant ist, denn dieser Inhalt ist, wie man sich durch einige sehr leichte geometrische Betrachtungen überzeugen kann, gleich $P . \delta . \delta' . \sin\alpha$. Bei solchen Linien, wo der Winkel α konstant ist, verwandelt sich die Gleichung 1 in folgende:

2. $P . \delta . \delta' = \text{const.}$

Bei den Krümmungslinien ist $\alpha = 90^0$ also $\sin\alpha = 1$. Man ziehe an zwei auf einander folgende Punkte der Krümmungslinie Tangentialebenen und lege durch den Mittelpunkt der Fläche zwei denselben parallele Diametralschnitte. Weil die konjugirten Tangenten einer Krümmungslinie senkrecht auf einander stehen, so sind δ und δ' Halbaxen, und zwar sind δ, δ' die Halb-

axen des ersten, δ'' und δ' die Halbaxen des zweiten Diametralschnitts. Beide haben die Gerade δ' gemeinschaftlich, welche dem Durchschnitt der Tangentialebenen parallel ist. Da nun sowohl δ als auch δ'' auf δ' senkrecht stehen, so ist das vom Endpunkt des Semidiameters δ' auf die Ebene, in welcher δ und δ'' liegen, gefällte Perpendikel konstant. Dieses Perpendikel ist aber gleich δ'. Die Gleichung 1 verwandelt sich also bei den Krümmungslinien in folgende zwei:

$$3. \quad P \,.\, \delta = \text{const.} \quad \delta' = \text{const.}$$

Bei den geodätischen Linien ist der Ausdruck $\delta' \,.\, \sin \alpha = \text{const.}$, wie sich aus folgender Betrachtung ergibt.

Es seien A, B, C drei auf einander folgende Punkte der Linie, und die durch die Elemente AB und BC gelegten Tangentialebenen schneiden sich in der Geraden BB'. Wenn man die Ebene ABB' um BB' als Axe dreht, bis sie mit CBB' eine Ebene bildet, so muß vermöge der Natur geodätischer Linien AB in die Verlängerung von BC fallen. Es seien nun wieder δ, δ', δ'' diejenigen Semidiameter der Fläche, welche den Tangenten AB, BB, BC parallel sind. Dreht man den Diametralschnitt, in welchem δ und δ' konjugirte Semidiameter sind, um δ' als Axe, bis er mit dem Diametralschnitt von δ' und δ'' zusammenfällt, so werden auch δ und δ'' koincidiren. Hieraus geht hervor, daß bei der ursprünglichen Lage vom ersten Diametralschnitt die vom Endpunkt des Semidiameters δ' auf die beiden Semidiameter δ und δ'' oder ihre Verlängerung gefällten Perpendikel gleich sind. Diese Perpendikel sind also gleich $\delta' \,.\, \sin \alpha$. Hieraus geht der Satz hervor:

Längs einer geodätischen Linie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades finden die Gleichungen statt:

$$4. \quad P \,.\, \delta = \text{const.} \quad \delta' \,.\, \sin \alpha = \text{const.}$$

In dem Punkt, wo eine geodätische Linie eine Krümmungslinie berührt, ist $\alpha = 90^0$, also sind δ und δ' zwei Halbaxen eines Diametralschnitts. Die zweite der Gleichungen 4 enthält folgenden Satz (von Liouville):

Wenn man parallel der Tangente in einem Punkt einer geodätischen Linie auf einem Ellipsoid (auf jeder centrischen Fläche zweiten Grades) und der konjugirten Tangente zwei Semidiameter der Fläche zieht, so ist die Größe des vom Endpunkt des zweiten dieser Semidiameter auf den ersten herabgelassenen Perpendikels konstant.

Eine weitere Gattung von Linien ist durch die Relationen charakterisirt:

$$5. \quad P \,.\, \delta' = \text{const.} \quad \delta \sin \alpha = \text{const.}$$

Diese Linien haben wir schon oben §. 24 unter dem Namen konjugirte geodätische Linien betrachtet; sie haben die Eigenschaft, daß ihre Tangenten noch eine zweite homofokale Fläche berühren, und daß die Berührungspunkte auf letzterer eine geodätische Linie beschreiben. Die zweite der Gleichungen 5 läßt sich also in Worte fassen:

Wenn man parallel der Tangente einer solchen Linie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades, welche die Eigenschaft hat, daß ihre Tangenten eine zweite homofokale Fläche längs einer geodätischen Linie berühren, und der konjugirten Tangente zwei Semidiameter der ersten Fläche zieht, so ist die Größe des

vom Endpunkt des ersten dieser Semidiameter auf den zweiten herabgelassenen Perpendikels konstant.

Eine weitere Linie auf den centrischen Flächen zweiten Grades ist die Poloide, für welche P = const. ist. Die beiden Gleichungen dieser Linie sind also nach 1.

6. $P = \text{const.} \quad \delta \,.\, \delta' \,.\, \sin\alpha = \text{const.}$

Die letzte Formel enthält diesen Lehrsatz:

Bei einer Poloide haben alle Diametralschnitte, welche den Tangentialebenen der einzelnen Punkte dieser Linie parallel sind, einen konstanten Inhalt.

Jede Linie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades entspricht der Gleichung

7. $P^2 \,.\, \sqrt{r \,.\, r'} \,.\, \sin\alpha = \text{const.}$

r und r′ sind die Krümmungshalbmesser der durch die Tangente der Linie und ihre konjugirte Tangente gelegten Normalschnitte der Fläche.

Dieß folgt aus unserer früheren Formel $r = \frac{\delta^2}{P}$ (§. 24, 6)

Bei einer Krümmungslinie modificirt sich diese Gleichung dahin, daß $\sin\alpha = 1$ wird, und statt r und r′ die beiden Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche gesetzt werden müssen:

8. $P^2 \,.\, \sqrt{R \,.\, R'} = \text{const.}$

Bei einer geodätischen Linie hat man statt $P^2 . \delta^2 = \text{const.}$ und $\delta'^2 . \sin^2\alpha = \text{const.}$

9. $P^3 \,.\, r = \text{const.}; \quad P \,.\, r' \,.\, \sin^2\alpha = \text{const.}; \quad \frac{r}{r'^3 . \sin^6\alpha} = \text{const.}$

Die dritte dieser Gleichungen erhält man durch Elimination von P aus den beiden ersten.

Bei einer solchen Linie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades, deren Tangenten eine zweite homofokale Fläche in einer geodätischen Linie berühren, ist

10. $P^3 \,.\, r' = \text{const.}; \quad P \,.\, r \,.\, \sin^2\alpha = \text{const.}; \quad \frac{r'}{r^3 . \sin^6\alpha} = \text{const.}$

Bei der Poloide finden diese Relationen statt:

11. $P = \text{const.} \quad r r' \,.\, \sin^2\alpha = \text{const.} \quad R \,.\, R' = \text{const.}$

Die letzte Gleichung geht daraus hervor, daß $\delta \,.\, \delta' \sin\alpha$ gleich dem Produkt der beiden Halbaxen des Diametralschnitts ist, von welchem δ und δ' konjugirte Semidiameter sind. Diese Halbaxen sind gleich $\sqrt{P \,.\, R}$ und $\sqrt{P \,.\, R'}$.

Bei einer Poloide ist das Krümmungsmaß $\frac{1}{R \,.\, R,}$ konstant (s. §. 18).

§. 27. Die homofokalen Flächen zweiten Grades.

Homofokale Kegel.

Wir nehmen ein rechtwinkliges Coordinatensystem an, dessen Ursprung der Mittelpunkt von zwei Kegeln und einer Kugel ist, die durch folgende Gleichungen gegeben sind:

$$1.\quad x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2 \quad \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = o$$

$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = o$$

Die Kugel bezeichnen wir mit (ϱ), den ersten Kegel mit (μ) und den zweiten mit (ν); irgend ein Punkt im Raum kann auf zweierlei Art bestimmt werden, entweder durch seine rechtwinkligen Coordinaten x, y, z, oder durch die Variabeln ϱ, μ, ν; letztere gehören in die Gattung der elliptischen Coordinaten. Den Uebergang von den einen zu den andern findet man durch Bestimmung der Werthe von x, y, z aus den Gleichungen 1; man erhält dadurch

$$2.\quad bcx = \varrho\mu\nu;\quad b\sqrt{c^2 - b^2}\,.\,y = \varrho\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}$$

$$c\sqrt{c^2 - b^2}\,.\,z = \varrho\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}$$

Die Gleichungen der Berührungsebenen von diesen drei Flächen sind, wenn der Berührungspunkt (x, y, z) ist, und die laufenden Coordinaten der Berührungsebenen mit x′ y′ z′ bezeichnet werden:

$$3.\quad xx' + yy' + zz' = \varrho^2 \quad \frac{xx'}{\mu^2} + \frac{yy'}{\mu^2 - b^2} - \frac{zz'}{c^2 - \mu^2} = o$$

$$\frac{xx'}{\nu^2} - \frac{yy'}{b^2 - \nu^2} - \frac{zz'}{c^2 - \nu^2} = o$$

b und c sind konstant; $c > \mu > b$; $c > b > \nu$. Wenn man den Größen μ und ν verschiedene Werthe beilegt, so erhält man eben so viele Kegel; in den Grenzfällen ist $\mu = b$ und $\nu = b$; dann verwandeln sich die Gleichungen 2 in folgende:

$$4.\quad x = \pm \frac{b}{\sqrt{c^2 - b^2}}\, z \qquad y = o$$

welche zwei durch den Ursprung gehende Gerade, die **Fokallinien**, vorstellen; beide machen sowohl mit der x als auch mit der z Axe gleiche Winkel.

Wenn die Ebenen $z = px + qy$ und $z = p'x + q'y$ auf einander senkrecht stehen sollen, so muß die Bedingung erfüllt werden $pp' + qq' + 1 = o$; aus den zwei ersten der Gleichungen 3 erhalten wir

$$pp' + qq' + 1 = -\frac{y^2}{z^2}\,\frac{c^2 - \mu^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{x^2}{z^2}\,\frac{c^2 - \mu^2}{\mu^2} + 1$$

Der rechte Theil verschwindet hier, wenn für x, y, z ihre Werthe aus 2. gesetzt werden. Ebenso findet man, daß überhaupt je zwei der drei Tangentialebenen, welche an die Flächen in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt sich ziehen lassen, die Bedingung $pp' + qq' + 1 = o$ erfüllen, und also auf einander senkrecht stehen. Die Durchschnitte der Tangentialebenen sind mithin die Normalen der Flächen; die Gleichungen für die Projektionen

der Normalen auf den xy, xz und yz Ebenen ergeben sich durch Elimination aus 3.

$$5.\quad xx'\frac{c^2}{\mu^2} + yy'\frac{c^2-b^2}{\mu^2-b^2} = \varrho^2 \quad xx'\frac{b^2}{\mu^2} + zz'\frac{c^2-b^2}{c^2-\mu^2} = \varrho^2$$

$$yy'\frac{b^2}{\mu^2-b^2} - zz'\frac{c^2}{c^2-\mu^2} = \varrho^2$$

$$6.\quad xx'\frac{c^2}{\nu^2} - yy'\frac{c^2-b^2}{b^2-\nu^2} = \varrho^2 \quad xx'\frac{b^2}{\nu^2} + zz'\frac{c^2-b^2}{c^2-\nu^2} = \varrho^2$$

$$yy'\frac{b^2}{b^2-\nu^2} + zz'\frac{c^2}{c^2-\nu^2} = \varrho^2$$

$$7.\quad xx'\frac{c^2}{\mu^2-\nu^2} - yy'\frac{(c^2-b^2)}{(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)} = o$$

$$xx'\frac{b^2}{\mu^2-\nu^2} - zz'\frac{(c^2-b^2)}{(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)} = o$$

$$yy'\frac{b^2}{(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)} - zz'\frac{c^2}{(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)} = o$$

Die Gleichungen 5, 6 und 7 beziehen sich auf die Normalen von (ν), (μ), (ϱ); die Winkel, welche die Normale von (ϱ) mit den Axen x, y, z bildet, nennen wir a, a′, a″; die Winkel der Normale von (μ): α, α', α'' und diejenigen der Normalen von (ν): a, a′, a″. Betrachten wir in 2. die Größen x, y, z und ϱ als Variabele, so erhalten wir durch Differenziation:

$$dx = \frac{\mu\nu}{bc}d\varrho;\ dy = \frac{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}}{b\sqrt{c^2-b^2}}d\varrho;\ dz = \frac{\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}}d\varrho$$

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\varrho^2$$

$$\cos a = \frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} \qquad \cos a' = \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

$$\cos a'' \frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

$$8.\quad \cos a = \frac{\mu\nu}{bc};\quad \cos a' = \frac{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}}{b\sqrt{c^2-b^2}};$$

$$\cos a'' = \frac{\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}}$$

Sind aber in 2. x, y, z und μ die Variabelen, so ist

$$dx = \frac{\varrho\nu}{bc}d\mu;\ dy = \frac{\varrho\mu\sqrt{b^2-\nu^2}\,d\mu}{b\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{\mu^2-b^2}};$$

$$dz = -\frac{\varrho\mu\sqrt{c^2-\nu^2}\,d\mu}{c\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}}$$

$$\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = \frac{\varrho\sqrt{\mu^2-\nu^2}}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}}d\mu$$

$$\cos\alpha = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}; \quad \cos\alpha' = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}};$$
$$\cos\alpha'' = \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$

9. $$\cos\alpha = \frac{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}.\nu}{bc\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}; \quad \cos\alpha' = \frac{\mu\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}$$
$$\cos\alpha'' = -\frac{\mu\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}.$$

Sind endlich in 2. x, y, z und ν die Variabelen, so ist

$$dx = \frac{\varrho\mu}{bc}d\nu; \quad dy = -\frac{\varrho\sqrt{\mu^2 - b^2}.\nu d\nu}{b\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}$$
$$dz = -\frac{\varrho\sqrt{c^2 - \mu^2}\,\nu.d\nu}{c\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}.$$
$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{\varrho\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}{\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}d\nu$$
$$\cos a = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}; \quad \cos a' = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$
$$\cos a'' = \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$

10. $$\cos a = \frac{\mu\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{bc\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}$$
$$\cos a' = -\frac{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}.\nu}{c\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}$$
$$\cos a'' = -\frac{\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}.\nu}{c\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}$$

Aus den vorstehenden Formeln können wir schon einige Consequenzen ziehen: Die homofokalen Kegel (μ) und (ν) schneiden die Kugel in sphärischen Kegelschnitten, welche man gleichfalls homofokal nennt. Es sei ABCD ein von vier homofokalen sphärischen Kegelschnitten auf einer Kugel gebildetes Viereck; die Seiten AB und CD sind die Durchschnitte der Kegel (μ) und (μ') und die zwei andern Gegenseiten AC und BD sind die Durchschnitte der Kegel (ν) und (ν') mit der Kugel. Die Betrachtung der Gleichungen 2 oder 8 ergibt nun sogleich den Satz:

Die Projektionen von vier Halbmessern einer Kugel, welche nach den Ecken eines von homofokalen sphärischen Kegelschnitten gebildeten Vierecks gezogen werden, auf irgend einer der drei Coordinatenaxen bilden eine Proportion.

Aus 5. und 6. läßt sich ableiten:

Zieht man die acht Tangenten in den Ecken eines von vier homofokalen sphärischen Kegelschnitten gebildeten Vierecks, so theilen sich dieselben in zwei Gruppen; die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche die Projektionen einer Gruppe auf irgend einer Coordinatenebene mit einer Axe machen, sind in Proportion.

Es sei O der Coordinatenursprung; man ziehe nach den vier Ecken des Vierecks die Halbmesser OA, OB, OC, OD. OA bildet mit den Axen die Winkel a, a′, a″; OB die Winkel b, b′, b″; OC und OD bilden die Winkel c, c′, c″ und d, d′, d″. Die Gleichungen 8 führen nun, mit Benützung der Formeln $\cos AOC = \cos a \, . \cos c + \cos a' \, . \cos c' + \cos a'' \, . \cos c''$ und $\cos BOD = \cos b \, . \cos d + \cos b' \, . \cos d' + \cos b'' \, . \cos d''$ auf nachstehende

$$\cos AOC = \frac{\mu \nu \mu' \nu'}{b^2 c^2} + \frac{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{\mu'^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu'^2}}{b^2(c^2 - b^2)} + \frac{\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \mu'^2}\sqrt{c^2 - \nu'^2}}{c^2(c^2 - b^2)}$$

$$\cos BOD = \frac{\mu \nu' \mu' \nu}{b^2 c^2} + \frac{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu'^2}\sqrt{\mu'^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b^2(c^2 - b^2)} + \frac{\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu'^2}\sqrt{c^2 - \mu'^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c^2(c^2 - b^2)}$$

$$\cos AOC = \cos BOD$$

Wenn man vom Mittelpunkt einer Kugel nach den vier Ecken eines von homofokalen Kegelschnitten auf derselben gebildeten Vierecks Halbmesser zieht, so schließen zwei, nach den Gegenecken gezogene Halbmesser den nämlichen Winkel ein, wie die nach zwei andern Gegenecken gezogenen. In einem solchen Viereck sind also beide Diagonalen gleich.

Ganz analog dem Vorigen läßt sich der Beweis dieses Satzes führen:

In einem von vier homofokalen Kegeln und zwei concentrischen Kugeln gebildeten Parallelepiped sind die Entfernungen von je zwei Gegenecken einander gleich.

Der Hauptkrümmungshalbmesser in einem Punkt einer Kegelfläche zweiten Grades ist durch diese Gleichung gegeben:

$$R = \frac{(z^2 + m^4 x^2 + n^4 y^2)^{3/2}}{m^2 n^2 (x^2 + y^2 + z^2)} \quad (\S.\ 19,\ 15)$$

$z^2 = m^2 x^2 + n^2 y^2$ ist die Gleichung der Kegelfläche. Um auf elliptische Coordinaten überzugehen, dürfen wir hier nur für x, y, z ihre Werthe aus den Gleichungen 2 setzen, nämlich

$$x = \frac{\varrho \mu \nu}{bc} \qquad y = \frac{\varrho \sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}} \qquad z = \frac{\varrho \sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}$$

Wir erhalten für die Kegelfläche $\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 0$

$$m^2 = \frac{c^2 - \mu^2}{\mu^2} \qquad n^2 = \frac{c^2 - \mu^2}{\mu^2 - b^2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2 \left(\frac{\mu^2 \nu^2}{b^2 c^2} + \frac{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)}{b^2 (c^2 - b^2)} + \frac{(c^2 - \mu^2) \cdot (c^2 - \nu^2)}{c^2 (c^2 - b^2)} \right) = \varrho^2$$

$$z^2 + m^4 x^2 + n^4 y^2 = \frac{\varrho^2 (c^2 - \mu^2)(c^2 - \nu^2)}{c^2 (c^2 - b^2)} + \frac{\varrho^2 (c^2 - \mu^2)^2 \nu^2}{\mu^2 b^2 c^2}$$
$$+ \frac{\varrho^2 (c^2 - \mu^2)^2 (b^2 - \nu^2)}{(\mu^2 - b^2) b^2 (c^2 - b^2)}$$
$$= \frac{\varrho^2 (c^2 - \mu^2)}{\mu^2 (\mu^2 - b^2) b^2 c^2 (c^2 - b^2)} \Big((c^2 - \nu^2) \mu^2 (\mu^2 - b^2) b^2$$
$$+ \nu^2 (c^2 - \mu^2)(\mu^2 - b^2)(c^2 - b^2) + (b^2 - \nu^2)(c^2 - \mu^2) \mu^2 c^2 \Big)$$

Der Ausdruck in der Klammer verwandelt sich nach einigen Reduktionen in $(\mu^2 - \nu^2) b^2 c^2 (c^2 - b^2)$, also ist

$$z^2 + m^4 x^2 + n^4 y^2 = \varrho^2 \frac{(c^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{\mu^2 (\mu^2 - b^2)}$$

$$R = \frac{\left\{ \varrho^2 \dfrac{(c^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{\mu^2 (\mu^2 - b^2)} \right\}^{3/2}}{\dfrac{(c^2 - \mu^2)^2}{\mu^2 (\mu^2 - b^2)} \varrho^2} = \varrho \frac{(\mu^2 - \nu^2)^{3/2}}{\mu (c^2 - \mu^2)^{1/2} (\mu^2 - b^2)^{1/2}}$$

Die beiden Hauptkrümmungshalbmesser der im Punkt (μ, ν) der Kugel (ϱ) sich schneidenden homofokalen Kegel (μ) und (ν) sind nun

11. $$R_\mu = \varrho \frac{(\mu^2 - \nu^2)^{3/2}}{\mu (\mu^2 - b^2)^{1/2} (c^2 - \mu^2)^{1/2}} \qquad R_\nu = - \varrho \frac{(\mu^2 - \nu^2)^{3/2}}{\nu (b^2 - \nu^2)^{1/2} (c^2 - \nu^2)^{1/2}}$$

Vier homofokale Kegel (μ) und (μ'), (ν) und (ν') schneiden eine Kugel (ϱ) in einem von vier sphärischen Kegelschnitten gebildeten Viereck ABCD. Wir bezeichnen die Hauptkrümmungshalbmesser der in den Punkten A, B, C, D zusammenstoßenden Kegel der Reihe nach mit R_a, R'_a; R_b, R'_b; R_c, R'_c; R_d, R'_d, so haben wir

$$\frac{R_a}{R'_a} = - \frac{\nu (b^2 - \nu^2)^{1/2} (c^2 - \nu^2)^{1/2}}{\mu (b^2 - \mu^2)^{1/2} (c^2 - \mu^2)^{1/2}} \qquad \frac{R_b}{R'_b} = - \frac{\nu' (b^2 - \nu'^2)^{1/2} (c^2 - \nu'^2)^{1/2}}{\mu (b^2 - \mu^2)^{1/2} (c^2 - \mu^2)^{1/2}}$$

$$\frac{R_c}{R'_c} = - \frac{\nu' (b^2 - \nu'^2)^{1/2} (c^2 - \nu'^2)^{1/2}}{\mu' (b^2 - \mu'^2)^{1/2} (c^2 - \mu'^2)^{1/2}} \qquad \frac{R_d}{R'_d} = - \frac{\nu (b^2 - \nu^2)^{1/2} (c^2 - \nu^2)^{1/2}}{\mu' (b^2 - \mu'^2)^{1/2} (c^2 - \mu'^2)^{1/2}}$$

$$\frac{R_a}{R'_a} : \frac{R_b}{R'_b} = \frac{R_d}{R'_d} : \frac{R_c}{R'_c}$$

12. $$R_a . R_c . R'_b . R'_d = R'_a . R'_c . R_b . R_d .$$

In einem von vier homofokalen sphärischen Kegelschnitten auf einer Kugel gebildeten Viereck theilen sich die acht Krümmungshalbmesser der Kegel in den Ecken in zwei Gruppen; das Produkt der Halbmesser der einen Gruppe ist gleich dem Produkt der vier andern.

Die Polare der Ebene $Ax + By + z = o$ hinsichtlich des Kegels $m^2 x^2 + n^2 y^2 = z$ genügt den Gleichungen:

$$x + \frac{A}{m^2} z = o \qquad y + \frac{B}{n^2} z = o$$

Wenden wir dieß auf den Kegel $\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = o$ an, so erhalten wir für die Gleichungen der Polare

$$x + A\frac{\mu^2}{c^2 - \mu^2}z = o \qquad y + B\frac{\mu^2 - b^2}{c^2 - \mu^2}z = o$$

Durch Elimination von μ ergibt sich

$$13. \quad \frac{c^2 - b^2}{b^2}\,\frac{1}{A}\,x - \frac{c^2}{b^2}\,\frac{1}{B}\,y + z = o$$

Dieß ist die Gleichung einer Ebene, welche die Polaren von $Ax + By + z = o$ hinsichtlich aller homofokalen Kegel enthält. Beide Ebenen stehen auf einander senkrecht, weil

$$\frac{c^2 - b^2}{b^2}\,\frac{1}{A}\,A - \frac{c^2}{b^2}\,\frac{1}{B}\,.\,B + 1 = o$$

ist. Wir haben somit den Satz:

Die Polaren einer Ebene hinsichtlich zweier Systeme von homofokalen Kegeln liegen in einer zu der gegebenen senkrechten Ebene. Beide Ebenen schneiden sich da, wo die erste einen der homofokalen Kegel berührt.

Wir wollen annehmen, daß die Ebene $Ax + By + z = o$ den homofokalen Kegel

$$\frac{x_0{}^2}{\mu_0{}^2} + \frac{y_0{}^2}{\mu_0{}^2 - b^2} - \frac{z_0{}^2}{c^2 - \mu_0{}^2} = o$$

berührt, so muß $A = -\frac{c^2 - \mu_0{}^2}{\mu_0{}^2}\,\frac{x_0}{z_0}$ und $B = -\frac{c^2 - \mu_0{}^2}{\mu_0{}^2 - b^2}\,\frac{y_0}{z_0}$ sein; setzt man diese Werthe von A und B in die Gleichungen der Polare

$$x + A\frac{\mu^2}{c^2 - \mu^2}z = o \text{ und } y + B\frac{\mu^2 - b^2}{c^2 - \mu^2}z = o$$

und eliminirt x_0, y_0, z_0, so entsteht

$$14. \quad \frac{\mu_0{}^2}{\mu^4}x^2 + \frac{\mu_0{}^2 - b^2}{(\mu^2 - b^2)^2}y^2 - \frac{c^2 - \mu_0{}^2}{(c^2 - \mu^2)^2}z^2 = o$$

Gegeben sind zwei homofokale Kegel; die Polaren der Tangentialebenen des einen Kegels in Beziehung auf den andern liegen auf einem dritten, nicht homofokalen Kegel.

Die Gleichung für die geodätischen Linien auf der Fläche $\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} = 1$ haben wir schon in §. 24, 1 entwickelt. Die dortige Ausführung zeigt, daß man auf ein ganz ähnliches Resultat gekommen wäre, wenn man die Fläche $\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = o$ genommen hätte, indem in beiden Fällen die Differenzialien X, Y, Z; dX, dY, dZ dieselben Werthe haben. Somit ist

$$15. \quad \frac{x^2}{\mu^4} + \frac{y^2}{(\mu^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(c^2 - \mu^2)^2}\,C = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\frac{dx^2}{\mu^2} + \frac{dy^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{dz^2}{c^2 - \mu^2}}$$

die Gleichung der geodätischen Linien auf dem Kegel (μ).

Wir wollen nun dieselbe in elliptische Coordinaten umsetzen, indem wir zunächst aus 2. die Werthe von x, y, z in die linke Seite von der Gleichung einsetzen; wir erhalten dann

$$\frac{x^2}{\mu^4} + \frac{y^2}{(\mu^2-b^2)^2} + \frac{z^2}{(c^2-\mu^2)^2} = \frac{\varrho^2\nu^2}{b^2c^2\mu^2} + \frac{\varrho^2(b^2-\nu^2)}{b^2(c^2-b^2)(\mu^2-b^2)} + \frac{\varrho^2(c^2-\nu^2)}{c^2(c^2-b^2)(c^2-\mu^2)}$$

oder mit Hinweglassung des Index 2

$$= \varrho\,\frac{\nu(c-b)(\mu-b)(c-\mu) + (b-\nu)c\mu(c-\mu) + (c-\nu)b\mu(\mu-b)}{bc(c-b)\mu(\mu-b)(c-\mu)}$$

Die drei Summanden des Zählers geben entwickelt:

$$\nu c(\mu c - \mu\mu - bc + b\mu) - \nu b(\mu c - \mu\mu - bc + b\mu)$$
$$+ c\mu(bc - b\mu - \nu c + \mu\nu) + \mu b(c\mu - bc - \mu\nu + \nu b)$$
$$= bc(c-b)(\mu-\nu)$$

somit ist

$$16.\quad \frac{x^2}{\mu^4} + \frac{y^2}{(\mu^2-b^2)^2} + \frac{z^2}{(c^2-\mu^2)^2} = \frac{\varrho^2(\mu^2-\nu^2)}{\mu^2(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}$$

Die Werthe von dx, dy, dz ergeben sich aus 2. durch Differenziation, indem man μ als konstant ansieht, weil die geodätische Linie auf dem Kegel (μ) liegt:

$$dx = \frac{\mu}{bc}(\nu d\varrho + \varrho d\nu)$$

$$dy = \frac{\sqrt{\mu^2-b^2}}{b\sqrt{c^2-b^2}}\left(\sqrt{b^2-\nu^2}\,d\varrho - \frac{\varrho\nu}{\sqrt{b^2-\nu^2}}d\nu\right)$$

$$dz = \frac{\sqrt{c^2-\mu^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}}\left(\sqrt{c^2-\nu^2}\,d\varrho - \frac{\varrho\nu}{\sqrt{c^2-\nu^2}}d\nu\right)$$

Hieraus erhalten wir

$$\frac{dx^2}{\mu^2} + \frac{dy^2}{\mu^2-b^2} - \frac{dz^2}{c^2-\mu^2} = \frac{(\nu d\varrho + \varrho d\nu)^2}{b^2c^2} + \frac{\left(\sqrt{b^2-\nu^2}\,d\varrho - \frac{\varrho\nu}{\sqrt{b^2-\nu^2}}d\nu\right)^2}{b^2(c^2-b^2)} - \frac{\left(\sqrt{c^2-\nu^2}\,d\varrho - \frac{\varrho\nu}{\sqrt{c^2-\nu^2}}d\nu\right)^2}{c^2(c^2-b^2)}$$

Bei der Entwicklung des rechten Theils der Gleichung findet man, daß die Coefficienten von $d\varrho^2$ und von $d\varrho\,.\,d\nu$ verschwinden; der Coefficient von $d\nu^2$ ist, mit Hinweglassung der Zahl ^{2},

$$\varrho\left(\frac{1}{bc} + \frac{\nu}{b(c-b)(b-\nu)} - \frac{\nu}{c(c-b)(c-\nu)}\right)$$

$$= \varrho\,\frac{(c-b)(b-\nu)(c-\nu) + c\nu(c-\nu) - b\nu(b-\nu)}{bc(c-b)(b-\nu)(c-\nu)}$$

$$= \varrho\,\frac{bc(c-b)}{bc(c-b)(b-\nu)(c-\nu)}$$

mithin ist

$$17.\quad \frac{dx^2}{\mu^2} + \frac{dy^2}{\mu^2-b^2} - \frac{dz^2}{c^2-\mu^2} = \frac{\varrho^2 d\nu^2}{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}$$

Die Gleichung der geodätischen Linien auf dem Kegel (μ) verwandelt sich nun, wenn der Kürze wegen $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$ gesetzt wird, in folgende:

$$C = \frac{\varrho^4 (\mu^2 - \nu^2)\, d\nu^2}{\mu^2 (\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)\, ds^2}$$

Wir nehmen zwei Punkte auf dem Kegel (μ) an, (x, y, z) und $(x + dx, y + dy, z + dz)$; die Verbindungslinie dieser Punkte ist eine Tangente des Kegels; das vom Ursprung auf dieselbe gefällte Perpendikel hat den Werth

$$P = \frac{\sqrt{\{(ydx - xdy)^2 + (xdz - zdx)^2 + (zdy - ydz)^2\}}}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$

Mit Benützung der Gleichungen 2 und der Werthe von dx, dy, dz ergibt sich

$$ydx - xdy = \frac{\varrho\mu\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b^2 c\sqrt{c^2 - b^2}}(\nu d\varrho + \varrho d\nu)$$

$$- \frac{\varrho\mu\sqrt{\mu^2 - b^2}\,\nu}{b^2 c\sqrt{c^2 - b^2}}\left(\sqrt{b^2 - \nu^2}\,d\varrho - \frac{\varrho\nu d\nu}{\sqrt{b^2 - \nu^2}}\right)$$

$$= \frac{\varrho^2\mu\sqrt{\mu^2 - b^2}\,d\nu}{c\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}$$

$$zdx - xdz = \frac{\varrho\mu\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{bc^2\sqrt{c^2 - b^2}}(\nu d\varrho + \varrho d\nu)$$

$$- \frac{\varrho\mu\sqrt{c^2 - \mu^2}\,\nu}{bc^2\sqrt{c^2 - b^2}}\left(\sqrt{c^2 - \nu^2}\,d\varrho - \frac{\varrho\nu d\nu}{\sqrt{c^2 - \nu^2}}\right)$$

$$= \frac{\varrho^2\mu\sqrt{c^2 - \mu^2}\,d\nu}{b\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}$$

$$zdy - ydz = \frac{\varrho\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{bc(c^2 - b^2)}\left(\sqrt{b^2 - \nu^2}\,d\varrho - \frac{\varrho\nu d\nu}{\sqrt{b^2 - \nu^2}}\right)$$

$$- \frac{\varrho\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{bc(c^2 - b^2)}\left(\sqrt{c^2 - \nu^2}\,d\varrho - \frac{\varrho\nu d\nu}{\sqrt{c^2 - \nu^2}}\right)$$

$$= -\frac{\varrho^2\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\,\nu d\nu}{bc\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}$$

Mithin ist $(ydx - xdy)^2 + (xdz - zdx)^2 + (zdy - ydz)^2$, wenn wir den Index 2 weglassen,

$$= \varrho\varrho\, d\nu \left(\frac{\mu(\mu - b)}{c(c - b)(b - \nu)} + \frac{\mu(c - \mu)}{b(c - b)(c - \nu)} + \frac{(\mu - b)(c - \mu)\nu}{bc(b - \nu)(c - \nu)}\right)$$

Durch Addition dieser drei Brüche erhält man im Zähler (siehe die Entwicklung von 16.)

$$bc(c - b)(\mu - \nu)$$

Also ist die Summe der drei Brüche gleich $\frac{\mu - \nu}{(b - \nu)(c - \nu)}$, oder, wenn man den Index 2 wieder setzt und $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$,

18. $P = \frac{\varrho^2 \sqrt{\mu^2 - \nu^2}}{\sqrt{b^2 - \nu^2} \sqrt{c^2 - \nu^2}} \frac{d\nu}{ds}$

Hiedurch verwandelt sich die Gleichung der geodätischen Linien auf dem Kegel (μ) in folgende:

19. $C = \frac{P^2}{\mu^2 (\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}$

P ist das vom Ursprung auf die Tangente der geodätischen Linie gefällte Perpendikel; die vorstehende Gleichung enthält den Satz:

Bei einer geodätischen Linie auf einem Kegel zweiten Grades ist das von der Spitze auf die Tangente gefällte Perpendikel von konstanter Länge. Alle Tangenten einer solchen Linie berühren also eine concentrische Kugel. Diesen Satz, welcher sich durch Abwickeln des Kegelmantels auf eine Ebene sehr leicht auf geometrischem Wege für jeden beliebigen Kegel beweisen läßt, werden wir später noch Gelegenheit haben, anzuwenden.

Wir nennen den Winkel zwischen der Tangente der geodätischen Linie im Punkt (ϱ, μ, ν) und der Durchschnittslinie der Flächen (ϱ) und (μ) i, so ist offenbar

20. $\cos i = \frac{P}{\varrho} = \frac{\varrho \sqrt{\mu^2 - \nu^2}}{\sqrt{b^2 - \nu^2} \sqrt{c^2 - \nu^2}} \frac{d\nu}{ds}$

Dieser Ausdruck läßt sich aber noch auf einem andern Wege ableiten. Wir haben nach den Formeln, die auf die Gleichungen 10 geführt haben, wo x, y, z und ν als die Variabelen betrachtet werden, $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{\varrho \sqrt{\mu^2 - \nu^2}}{\sqrt{b^2 - \nu^2} \sqrt{c^2 - \nu^2}} d\nu = ds'$. Nun ist offenbar ds' ein Element der Durchschnittslinie zwischen der Kugel (ϱ) und dem Kegel (μ), mithin die Cathete des rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse ds, oder das Element der geodätischen Linie, ist. Der Winkel zwischen ds' und ds ist gleich i, also

$$\cos i = \frac{ds'}{ds} = \frac{\varrho \sqrt{\mu^2 - \nu^2}}{\sqrt{b^2 - \nu^2} \sqrt{c^2 - \nu^2}} \frac{d\nu}{ds}$$

Hieraus könnte man direkt die Gleichung 18 finden.

Der Hauptkrümmungshalbmesser von (μ), dessen Krümmungskreis diesen Kegel in der Durchschnittslinie mit (ϱ) tangirt, hat nach 11. den Werth

$$R_\mu = \varrho \frac{(\mu^2 - \nu^2)^{3/2}}{\mu (\mu^2 - b^2)^{1/2} (c^2 - \mu^2)^{1/2}}$$

Nun ist nach dem Satze von Euler $\frac{1}{r} = \frac{\cos^2 i}{R}$, da der andere Hauptkrümmungshalbmesser unendlich ist, also in der Euler'schen Gleichung der Summand $\frac{\sin^2 i}{R'}$ bei Kegeln wegfällt. Mit Hülfe des Werths von R_μ und von 20. erhalten wir für den Krümmungshalbmesser der geodätischen Linie.

21. $r = \frac{R_\mu}{\cos^2 i} = \frac{(\mu^2 - \nu^2)^{1/2} (b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}{\varrho \mu (\mu^2 - b^2)^{1/2} (c^2 - \mu^2)^{1/2}} \frac{ds^2}{d\nu^2}$

oder nach 18.

$$22. \quad r = \frac{\varrho^3 (\mu^2 - \nu^2)^{3/2}}{P^2 \mu (\mu^2 - b^2)^{1/2} (c^2 - \mu^2)^{1/2}}$$

Es sei ABCD ein von vier Krümmungslinien auf (μ) gebildetes Viereck, d. h. AB und CD sind die Durchschnitte des Kegels mit den Kugeln (ϱ) und (ϱ'); BC und DA sind zwei Erzeugende von (μ) oder die Durchschnitte dieses Kegels mit den homofokalen Kegeln (ν) und (ν'). Durch die vier Ecken ziehen wir vier geodätische Linien auf (μ), welche eine Krümmungslinie berühren, oder solche, deren Tangenten eine Kugel berühren, und bezeichnen die Krümmungshalbmesser derselben in den Ecken A, B, C und D mit r_a, r_b, r_c, r_d, so ist nach 22., wenn wir der Kürze wegen den konstanten Ausdruck $P^2\mu (\mu^2 - b^2)^{1/2} (c^2 - \mu^2)^{1/2} = \frac{1}{\lambda}$ setzen

$$r_a = \lambda \,.\, \varrho^3 (\mu^2 - \nu^2)^{3/2} \qquad r_b = \lambda \,.\, \varrho^3 (\mu^2 - \nu'^2)^{3/2}$$
$$r_c = \lambda \,.\, \varrho'^3 (\mu^2 - \nu'^2)^{3/2} \qquad r_d = \lambda \,.\, \varrho'^3 (\mu^2 - \nu^2)^{3/2}$$

$$23. \quad r_a \,.\, r_c = r_b \,.\, r_d$$

Zieht man auf einem Kegel zweiten Grades durch die Ecken eines Krümmungslinienvierecks vier geodätische Linien, deren Tangenten eine Kugel berühren, so bilden die Krümmungshalbmesser dieser Linien in den Ecken eine Proportion.

Man könnte diesen Satz auch erweitern, insofern als die Gleichung 23 selbst dann noch stattfindet, wenn die Tangenten der geodätischen Linien vier verschiedene Kugeln berühren, deren Halbmesser proportionirt sind.

Wenn in einem Punkt auf (μ) zwei geodätische Linien, deren Tangenten eine Kugel berühren, zusammentreffen, so haben hier in 22. die Größen P, μ, ϱ und ν für beide Linien denselben Werth; also auch r:

Zwei geodätische Linien auf einem Kegel zweiten Grades, deren Tangenten eine Kugel berühren, haben in ihrem Durchschnittspunkt gleiche Krümmungshalbmesser und mithin bilden sie auch mit den Krümmungslinien gleiche Winkel.

Die Gleichung 20 kann auch so geschrieben werden:

$$\varrho \,.\, \cos i = P$$

In dieser Form entspricht sie der Liouville'schen Gleichung für die centrischen Flächen,

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \alpha^2$$

denn P ist konstant längs einer geodätischen Linie auf dem Kegel.

Aus $\cos i = \frac{P}{\varrho}$ folgt, daß der Winkel i konstant ist, wenn P und ϱ zugleich konstant sind, oder wenn blos das Verhältniß $\frac{P}{\varrho}$ konstant ist, mit andern Worten:

Alle geodätischen Linien auf einem Kegel zweiten Grades, welche eine Krümmungslinie berühren, treffen eine andere Krümmungslinie desselben Systems unter dem gleichen Winkel.

Gegeben sind 1.: Ein Punkt im Raum, durch welchen die Kugel (ϱ) und die beiden homofokalen Kegel (μ) und (ν) gehen, und den wir also durch (ϱ, μ, ν) bezeichnen; 2.: Eine Kugel (α), deren Halbmesser α ist, und ein weiterer homofokaler Kegel (β). Der Punkt (ϱ, μ, ν) und der unendlich nahe Punkt $(\varrho + d\varrho, \mu + d\mu, \nu + d\nu)$ sind zwei Gegenecken eines Parallelepipeds, und wir nehmen an, daß die Verbindungslinie dieser Gegenecken eine

gemeinsame Tangente von (α) und (β) sei. Indem wir die Diagonale des Parallelepipeds ds nennen, und die drei im Punkt (ϱ, μ, ν) zusammenstoßenden Kanten desselben mit ds', ds'', ds''' bezeichnen, haben wir nach 8., 9. und 10. diese Gleichungen:

$$ds' = d\varrho;\ ds'' = \frac{\varrho\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}}\, d\mu;\ ds''' = \frac{\varrho\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}{\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}\, d\nu$$

Hieraus ließe sich $ds = \sqrt{ds'^2 + ds''^2 + ds'''^2}$ direkt bestimmen; allein ein leichterer Weg ist der nachstehende:

Der Berührungskegel von (α), dessen Spitze (ϱ, μ, ν) ist, entspricht der Gleichung

$$24.\quad \cos^2 i' = \frac{\varrho^2 - \alpha^2}{\varrho^2}$$

i' ist der Winkel, zwischen der Erzeugenden des Kegels und dem vom Ursprung nach (ϱ, μ, ν) gezogenen Halbmesser von (ϱ); denn offenbar ist der letztere die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Catheten der Halbmesser von (α) und die genannte Erzeugende $= \sqrt{\varrho^2 - \alpha^2}$ sind.

$$25.\quad \frac{\cos^2 i''}{\mu^2 - \beta^2} + \frac{\cos^2 i'''}{\nu^2 - \beta^2} = o$$

Durch die Verbindungslinie des Ursprungs mit (ϱ, μ, ν) lassen sich zwei Ebenen legen, welche den Kegel (β) tangiren; ihre Gleichung ist in 25. dargestellt. i'' ist der Winkel irgend einer durch (ϱ, μ, ν) in einer solchen Ebene gezogenen Geraden mit dem Durchschnitt von (ϱ) und (ν) und i''' der Winkel derselben Geraden mit der Durchschnittslinie von (ϱ) und (μ). Das System der Gleichungen 24 und 25 bezieht sich also auf die durch (ϱ, μ, ν) gelegte gemeinschaftliche Tangente von (α) und (β). Da nun ds eine solche gemeinsame Tangente sein soll, so folgt daraus, daß die Winkel zwischen ds und den Kanten ds', ds'', ds''', beziehungsweise gleich i', i'' und i''' sind. Nun besteht zufolge einer auf geometrischem Wege sehr leicht nachzuweisenden Eigenschaft des Parallelepipeds diese Gleichung:

$$ds = ds' . \cos i' + ds'' . \cos i'' + ds''' . \cos i'''$$

Aus 24. und 25. erhalten wir mit Berücksichtigung der Bedingungsgleichung $\cos^2 i' + \cos^2 i'' + \cos^2 i''' = 1$

$$\cos i' = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \alpha^2}}{\varrho};\ \cos i'' = \frac{\alpha}{\varrho}\,\frac{\sqrt{\mu^2 - \beta^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}};\ \cos i''' = \frac{\alpha}{\varrho}\,\frac{\sqrt{\beta^2 - \nu^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}$$

somit

$$26.\quad ds = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \alpha^2}}{\varrho}\, d\varrho + \frac{\alpha\sqrt{\mu^2 - \beta^2}}{\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}\, d\mu$$
$$\frac{\alpha\sqrt{\beta^2 - \nu^2}}{\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}\, d\nu$$

Setzt man hier ds = o, so erhält man

$$27.\quad o = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \alpha^2}}{\varrho}\, d\varrho + \frac{\alpha\sqrt{\mu^2 - \beta^2}}{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}}\, d\mu$$
$$+ \frac{\alpha\sqrt{\beta^2 - \nu^2}}{\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}\, d\nu$$

Dieß ist die Differenzialgleichung der Fläche, deren Normalen eine Kugel (α) und einen Kegel zweiten Grades (β) berühren, in elliptischen Coordinaten.

Die Größen b, c; α, β sind die Konstanten, ϱ, μ, ν die Variabelen.

In dem unendlich kleinen Parallelepiped, welches wir soeben betrachteten, ist übrigens auch $ds = \frac{ds'}{\cos i'} = \frac{ds''}{\cos i''} = \frac{ds'''}{\cos i'''}$ oder

$$ds = \frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - \alpha^2}} d\varrho; \quad ds = \frac{\varrho^2 (\mu^2 - \nu^2)}{\alpha \sqrt{\mu^2 - \beta^2} \sqrt{\mu^2 - b^2} \sqrt{c^2 - \mu^2}} d\mu;$$

$$ds = \frac{\varrho^2 (\mu^2 - \nu^2)}{\alpha \sqrt{\beta^2 - \nu^2} \sqrt{b^2 - \nu^2} \sqrt{c^2 - \nu^2}} d\nu$$

Hieraus ergibt sich, wenn wir der Analogie mit früheren Gleichungen wegen (§. 25) $\sqrt{\mu^2 - \beta^2} \sqrt{\mu^2 - b^2} \sqrt{c^2 - \mu^2} = - \Delta (\mu^2)$ und $\sqrt{\beta^2 - \nu^2} \sqrt{b^2 - \nu^2} \sqrt{c^2 - \nu^2} = \Delta (\nu^2)$ setzen,

28. $$\frac{d\mu}{\Delta (\mu^2)} + \frac{d\nu}{\Delta (\nu^2)} = 0$$

Dieß ist eine Differenzialgleichung mit zwei Variabelen, welche in die Klasse der Abelianischen Differenzialgleichungen gehört (s. §. 25, 20—22).

Die Gleichung 26 hat noch eine weitere Bedeutung: sie gibt das Element ds einer beliebigen Kurve im Raum für den Punkt (ϱ, μ, ν) an, welches verlängert die Kugel (α) und den homofokalen Kegel (β) berührt. Im Allgemeinen sind α und β Funktionen von ϱ, μ, ν, welche von der Natur der Kurve abhängen. Für geodätische Linien auf (μ) hat man $d\mu = 0$, $\alpha = \text{const.}$ $\beta = \mu = \text{const.}$

29. $$ds = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \alpha^2}}{\varrho} d\varrho + \frac{\alpha \sqrt{\mu^2 - \nu^2}}{\sqrt{b^2 - \nu^2} \sqrt{c^2 - \nu^2}} d\nu$$

Die Rektifikation der Krümmungslinien auf (μ) oder der sphärischen Kegelschnitte beruht auf der Integration der Gleichung

30. $$ds = \frac{\alpha \sqrt{\mu^2 - \nu^2}}{\sqrt{b^2 - \nu^2} \sqrt{c^2 - \nu^2}} d\nu$$

α ist der Halbmesser der Kugel, $\mu = \text{const.}$

§. 28. Die homofokalen Flächen zweiten Grades.

Homofokale Paraboloide.

1. $$\frac{y^2}{2p + 4\varrho} + \frac{z^2}{2q + 4\varrho} = x + \varrho \qquad \frac{y^2}{2p + 4\mu} + \frac{z^2}{2q + 4\mu} = x + \mu$$
$$\frac{y^2}{2p + 4\nu} + \frac{z^2}{2q + 4\nu} = x + \nu$$

Diese Gleichungen stellen drei Paraboloide vor, die wir mit (ϱ), (μ) und (ν) bezeichnen. p und q sind Konstante, welche als gegeben angenommen werden. Gleichwie ein Punkt im Raum bestimmt ist, wenn die Halbaxen der drei durch ihn gelegten centrischen homofokalen Flächen gegeben sind, so ist die Lage dieses Punktes auch bestimmt durch die Größen ϱ, μ, und ν, oder durch die Scheiteldistanzen (Abstände der Scheitel vom Ursprung) der drei durch ihn gehenden homofokalen Paraboloide (ϱ), (μ) und (ν). Setzen wir z. B. in

der ersten Gleichung $z = o$, so ist $y^2 = (2p + 4\varrho)(x + \varrho)$. Der Abstand des Brennpunkts dieser Parabel vom Ursprung ist $= 2p$, also unabhängig von ϱ; ebenso findet man für den Abstand des Brennpunkts der Parabel $z^2 = (2q + 4\varrho)(x + \varrho)$ vom Ursprung den Werth $2q$. Die drei Paraboloide (ϱ), (μ), (ν) sind demnach homofokal, d. h. ihre Hauptschnitte, welche in den xy und xz Ebenen liegen, haben dieselben Brennpunkte. Da die Gleichungen 1 in der Form übereinstimmen, so nehmen wir die erste derselben und entwickeln sie nach Potenzen von ϱ,

$$\varrho^3 + \left(\frac{p}{2} + \frac{q}{2} + x\right)\varrho^2 + \left\{\frac{pq}{4} + \left(\frac{p}{2} + \frac{q}{2}\right)x - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4}\right\}\varrho + \frac{pqx}{4} - \frac{qy^2}{8} - \frac{pz^2}{8} = o$$

Die drei Wurzeln dieser Gleichung sind ϱ, μ, ν, und nach der bekannten Theorie der Gleichungen ist

$$2.\quad \varrho + \mu + \nu = -\frac{p}{2} - \frac{q}{2} - x$$

$$3.\quad \varrho\mu + \varrho\nu + \mu\nu = \frac{pq}{4} + \left(\frac{p}{2} + \frac{q}{2}\right)x - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4}$$

$$4.\quad \varrho\mu\nu = -\frac{pqx}{4} + \frac{qy^2}{8} + \frac{pz^2}{8}$$

Aus 2. erhalten wir

$$x = -\varrho - \mu - \nu - \frac{p}{2} - \frac{q}{2}$$

Die Werthe von y und z können wir durch Elimination aus 1. bekommen. Durch Subtraktion der zweiten und dritten von der ersten unter den Gleichungen 1 ergibt sich

$$\frac{y^2}{(p + 2\varrho)(p + 2\mu)} + \frac{z^2}{(q + 2\varrho)(q + 2\mu)} = -1$$

$$\frac{y^2}{(p + 2\varrho)(p + 2\nu)} + \frac{z^2}{(q + 2\varrho)(q + 2\nu)} = -1$$

Hieraus

$$\frac{y^2}{(p + 2\varrho)(p + 2\mu)(q + 2\nu)} - \frac{y^2}{(p + 2\varrho)(p + 2\nu)(q + 2\mu)} = \frac{1}{q + 2\mu} - \frac{1}{q + 2\nu}$$

$$y^2 = \frac{2(\nu - \mu)(p + 2\varrho)(p + 2\mu)(p + 2\nu)}{(p + 2\nu)(q + 2\mu) - (p + 2\mu)(q + 2\nu)} = -\frac{1}{p - q}(p + 2\varrho)(p + 2\mu)(p + 2\nu)$$

$$\frac{z^2}{(q + 2\varrho)(q + 2\mu)(p + 2\nu)} - \frac{z^2}{(q + 2\varrho)(q + 2\nu)(p + 2\mu)} = \frac{1}{p + 2\mu} - \frac{1}{p + 2\nu}$$

$$z^2 = \frac{2(\nu - \mu)(q + 2\varrho)(q + 2\mu)(q + 2\nu)}{(q + 2\nu)(p + 2\mu) - (q + 2\mu)(p + 2\nu)} = \frac{1}{p - q}(q + 2\varrho)(q + 2\mu)(q + 2\nu)$$

Wir haben somit diese Zusammenstellung:

$$5.\quad x = -\varrho - \mu - \nu - \frac{p}{2} - \frac{q}{2}$$

6. $y^2 = -\frac{1}{p-q}(p+2\varrho)(p+2\mu)(p+2\nu)$

7. $z^2 = \frac{1}{p-q}(q+2\varrho)(q+2\mu)(q+2\nu)$

Hieraus können wir sogleich folgenden Satz ableiten: Wenn in 5. x konstant ist, so ist es auch die Summe $\varrho + \mu + \nu$, oder

Bewegt sich ein Punkt in einer Ebene, welche senkrecht ist zur xAxe, so ist die Summe der Scheitelabstände der drei durch ihn gehenden homofokalen Paraboloide, deren Axe die xAxe ist, konstant.

Für das Perpendikel P, welches vom Scheitel des Paraboloids $\frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n} = x$ auf die Tangentialebene des Punkts (x, y, z) gefällt wird, hat man den Werth

$$P = \frac{x}{\sqrt{1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2}}}$$

Das Perpendikel, welches vom Ursprung auf die Tangentialebene des Paraboloids $\frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n} = x + \varrho$ im Punkt (x, y, z) gefällt wird, ist gegeben durch die Gleichung

$$P = \frac{x + 2\varrho}{\sqrt{1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2}}}$$

Wir wollen nun die Größe unter dem Wurzelzeichen $1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2}$ in elliptischen Coordinaten ausdrücken, indem wir nach 1. setzen

$$m = 2p + 4\varrho \qquad n = 2q + 4\varrho$$

und nach 6. und 7. die Werthe von y^2 und z^2 substituiren, wodurch wir erhalten

$$1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2} = 1 - \frac{(p+2\mu)(p+2\nu)}{(p-q)(p+2\varrho)} + \frac{(q+2\mu)(q+2\nu)}{(p-q)(q+2\varrho)}$$

$$= \frac{(p-q)(p+2\varrho)(q+2\varrho) - (p+2\mu)(p+2\nu)(q+2\varrho) + (q+2\mu)(q+2\nu)(p+2\varrho)}{(p-q)(p+2\varrho)(q+2\varrho)}$$

Die drei Summanden im Zähler entwickelt, geben

$$+ p^2q + 2p^2\varrho + 2pq\varrho + 4p\varrho^2 - pq^2 - 2pq\varrho - 2q^2\varrho - 4q\varrho^2$$
$$- (p^2q + 2p^2\varrho + 2pq\nu + 4p\varrho\nu + 2pq\mu + 4p\varrho\mu + 4q\mu\nu + 8\varrho\mu\nu)$$
$$+ pq^2 + 2q^2\varrho + 2pq\nu + 4q\varrho\nu + 2pq\mu + 4q\varrho\mu + 4p\mu\nu + 8\varrho\mu\nu$$

Wenn man diejenigen Größen wegläßt, die sich aufheben, so bleibt

$$4\varrho^2(p-q) - 4\varrho\nu(p-q) - 4\varrho\mu(p-q) + 4\mu\nu(p-q)$$
$$= 4(p-q)(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)$$

8. $1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2} = 4\frac{(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)}{(p+2\varrho)(q+2\varrho)}$

Hiedurch ergibt sich folgender Ausdruck für das vom Ursprung auf die Tangentialebene des Punkts (x, y, z) der Fläche $\frac{y^2}{2p+4\varrho} + \frac{z^2}{2q+4\varrho} = x + \varrho$ gefällte Perpendikel:

$$9.\quad P = \frac{(x+2\varrho)\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{q+2\varrho}}{2\sqrt{\varrho-\mu}\sqrt{\varrho-\nu}}$$

Aus den Gleichungen 5, 6 und 7 erhalten wir durch Differenziation, indem wir x, y, z und ϱ als die Variabelen betrachten

$$10.\quad dx = -d\varrho \qquad dy = \frac{\sqrt{p+2\mu}\sqrt{p+2\nu}}{\sqrt{-(p-q)}}\,\frac{d\varrho}{\sqrt{p+2\varrho}}$$

$$dz = \frac{\sqrt{q+2\mu}\sqrt{q+2\nu}}{\sqrt{p-q}}\,\frac{d\varrho}{\sqrt{q+2\varrho}}$$

$$dx^2+dy^2+dz^2 = d\varrho^2\left(1-\frac{(p+2\mu)(p+2\nu)}{(p+2\varrho)(p-q)}+\frac{(q+2\mu)(q+2\nu)}{(q+2\varrho)(p-q)}\right)$$

also (siehe die Entwicklung der Gleichung 8)

$$ds'^2 = dx^2+dy^2+dz^2 = 4\,d\varrho^2\,\frac{(p-q)(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)}{(p-q)(p+2\varrho)(q+2\varrho)}$$

$$11.\quad ds' = 2d\varrho\,\frac{\sqrt{\varrho-\mu}\sqrt{\varrho-\nu}}{\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{q+2\varrho}}$$

Wir bezeichnen die Winkel, welche das Element ds' oder die Normale des Paraboloids (ϱ) mit den Axen der x, y, z bildet, durch a, a', a'', so ist

$$\cos a = \frac{dx}{ds'};\quad \cos a' = \frac{dy}{ds'};\quad \cos a'' = \frac{dz}{ds'},$$

oder

$$12.\quad \cos a = -\tfrac{1}{2}\,\frac{\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{q+2\varrho}}{\sqrt{\varrho-\mu}\sqrt{\varrho-\nu}}$$

$$\cos a' = \tfrac{1}{2}\,\frac{\sqrt{p+2\mu}\sqrt{p+2\nu}\sqrt{q+2\varrho}}{\sqrt{-(p-q)}\sqrt{\varrho-\mu}\sqrt{\varrho-\nu}}$$

$$\cos a'' = \tfrac{1}{2}\,\frac{\sqrt{q+2\mu}\sqrt{q+2\nu}\sqrt{p+2\varrho}}{\sqrt{p-q}\sqrt{\varrho-\mu}\sqrt{\varrho-\nu}}$$

Wenn man aber in 5., 6. und 7. die Größen x, y, z und μ als Variabele ansieht, so erhält man auf ganz analoge Weise für den unendlich kleinen Abstand ds'' der beiden Punkte (ϱ, μ, ν) und ($\varrho, \mu + d\mu, \nu$)

$$13.\quad ds'' = 2d\mu\,\frac{\sqrt{-(\varrho-\mu)}\sqrt{\mu-\nu}}{\sqrt{p+2\mu}\sqrt{q+2\mu}}$$

ds'' ist die Normale des Paraboloids (μ); die Winkel, welche sie mit den Axen der x, y und z bildet, bezeichnen wir mit $\alpha, \alpha', \alpha''$ und erhalten

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds''},\quad \cos\alpha' = \frac{dy}{ds''},\quad \cos\alpha'' = \frac{dz}{ds''}$$ oder nach 12.

$$14.\quad \cos\alpha = -\tfrac{1}{2}\,\frac{\sqrt{p+2\mu}\sqrt{q+2\mu}}{\sqrt{-(\varrho-\mu)}\sqrt{\mu-\nu}}$$

$$\cos\alpha' = \tfrac{1}{2}\,\frac{\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{p+2\nu}\sqrt{q+2\mu}}{\sqrt{-(p-q)}\sqrt{-(\varrho-\mu)}\sqrt{\mu-\nu}}$$

$$\cos\alpha'' = \tfrac{1}{2}\,\frac{\sqrt{q+2\varrho}\sqrt{q+2\nu}\sqrt{p+2\mu}}{\sqrt{p-q}\sqrt{-(\varrho-\mu)}\sqrt{\mu-\nu}}$$

Betrachtet man endlich in 5., 6. und 7. x, y, z und ν als die Variabelen, und bezeichnet den unendlich kleinen Abstand der Punkte (ϱ, μ, ν) und $(\varrho, \mu, \nu + d\nu)$ oder die Normale des Paraboloids (ν) mit ds''', so ist

$$15. \quad ds''' = 2d\nu \frac{\sqrt{-(\mu-\nu)}\sqrt{-(\varrho-\nu)}}{\sqrt{p+2\nu}\sqrt{q+2\nu}}$$

ds''' bildet mit den Axen der x, y, z die Winkel $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}', \mathfrak{a}''$; $\cos\mathfrak{a} = \frac{dx}{ds'''}$ $\cos\mathfrak{a}' = \frac{dy}{ds'''}$; $\cos\mathfrak{a}'' = \frac{dz}{ds'''}$, oder nach 12. durch gegenseitige Vertauschung der Buchstaben ϱ und ν

$$16. \quad \cos\mathfrak{a} = -\tfrac{1}{2} \frac{\sqrt{p+2\nu}\sqrt{q+2\nu}}{\sqrt{-(\mu-\nu)}\sqrt{-(\varrho-\nu)}}$$

$$\cos\mathfrak{a}' = \tfrac{1}{2} \frac{\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{p+2\mu}\sqrt{q+2\nu}}{\sqrt{-(p-q)}\sqrt{-(\mu-\nu)}\sqrt{-(\varrho-\nu)}}$$

$$\cos\mathfrak{a}'' = \tfrac{1}{2} \frac{\sqrt{q+2\varrho}\sqrt{q+2\mu}\sqrt{p+2\nu}}{\sqrt{p-q}\sqrt{-(\mu-\nu)}\sqrt{-(\varrho-\nu)}}$$

Aus 12. und 14. erhalten wir

$$17. \quad \cos\mathfrak{a} \,.\, \cos\alpha + \cos\mathfrak{a}' \,.\, \cos\alpha' + \cos\mathfrak{a}'' \,.\, \cos\alpha''$$

$$= \frac{1}{4} \frac{\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{q+2\varrho}\sqrt{p+2\mu}\sqrt{q+2\mu}}{\sqrt{\varrho-\mu}\sqrt{-(\varrho-\mu)}\sqrt{\varrho-\nu}\sqrt{\mu-\nu}}$$

$$- \frac{1}{4} \frac{(p+2\nu)\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{p+2\mu}\sqrt{q+2\mu}\sqrt{q+2\varrho}}{(p-q)\sqrt{\varrho-\mu}\sqrt{-(\varrho-\mu)}\sqrt{\varrho-\nu}\sqrt{\mu-\nu}}$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{(q+2\nu)\sqrt{q+2\varrho}\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{p+2\mu}\sqrt{q+2\mu}}{(p-q)\sqrt{\varrho-\mu}\sqrt{-(\varrho-\mu)}\sqrt{\varrho-\nu}\sqrt{\mu-\nu}} = 0$$

Also stehen die beiden Flächen (ϱ) und (μ) auf einander senkrecht. Ganz ebenso läßt sich zeigen, daß die Flächen (ϱ) und (ν) wie auch (μ) und (ν) auf einander senkrecht stehen. Hierauf beruht das Theorem:

Drei homofokale Paraboloide stehen auf einander senkrecht, und mithin schneiden sie sich nach dem Satz von Dupin in ihren Krümmungslinien.

Es sei ABCD ein von vier Krümmungslinien auf dem Paraboloid (ϱ) gebildetes Viereck. Die Abscissen der Ecken bezeichnen wir mit x_a, y_a, z_a; x_b, y_b, z_b; x_c, y_c, z_c; x_d, y_d, z_d; die Punkte A, B, C, D werden der Reihe nach durch die drei in denselben zusammentreffenden homofokalen Paraboloide bezeichnet mit (ϱ, μ, ν); (ϱ, μ, ν'); (ϱ, μ', ν'); (ϱ, μ', ν). Nach 5. ist

$$x_a = -\varrho - \mu - \nu - \frac{p}{2} - \frac{q}{2} \qquad x_b = -\varrho - \mu - \nu' - \frac{p}{2} - \frac{q}{2}$$

$$x_c = -\varrho - \mu' - \nu' - \frac{p}{2} - \frac{q}{2} \qquad x_d = -\varrho - \mu' - \nu - \frac{p}{2} - \frac{q}{2}$$

$$18. \quad x_a + x_c = x_b + x_d$$

In einem von vier Krümmungslinien gebildeten Viereck auf einem Paraboloid ist die Summe der Abstände zweier Ge-

genecken von irgend einer auf der Hauptaxe senkrechten Ebene gleich der Summe der Abstände der beiden andern Gegenecken. Legt man durch eine Ecke eines solchen Vierecks eine zur Hauptaxe senkrechte Ebene, so ist die Entfernung einer zweiten Ecke des Vierecks von dieser Ebene so groß als die Summe der Entfernungen der beiden andern Ecken.

Aus 6. folgt

$$y_a = \sqrt{-\frac{1}{p-q}}\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{p+2\mu}\sqrt{p+2\nu}$$

$$y_b = \sqrt{-\frac{1}{p-q}}\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{p+2\mu}\sqrt{p+2\nu'}$$

$$y_c = \sqrt{-\frac{1}{p-q}}\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{p+2\mu'}\sqrt{p+2\nu'}$$

$$y_d = \sqrt{-\frac{1}{p-q}}\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{p+2\mu'}\sqrt{p+2\nu}$$

19. $y_a \cdot y_c = y_b \cdot y_d$ ebenso $z_a \cdot z_c = z_b \cdot z_d$.

In einem Krümmungslinienviereck auf einem Paraboloid bilden die Entfernungen der Ecken von einer der beiden andern durch den Ursprung gehenden Hauptebenen eine Proportion.

$$\overline{AC}^2 = (x_a - x_c)^2 + (y_a - y_c)^2 + (z_a - z_c)^2$$

oder nach 5., 6., 7.

$$= \{(\mu' - \mu) + (\nu' - \nu)\}^2 - \frac{p+2\varrho}{p-q} 4(\mu\nu + \mu'\nu') - 2 y_a y_c$$

$$+ \frac{q+2\varrho}{p-q} 4(\mu\nu + \mu'\nu') - 2 z_a \cdot z_c$$

$$= \{(\mu' - \mu) + (\nu' - \nu)\}^2 - 4(\mu\nu + \mu'\nu') - 2 y_a y_c - 2 z_a z_c$$

$$= (\mu' - \mu)^2 + (\nu' - \nu)^2 - 2(\mu\nu + \mu'\nu' + \mu'\nu + \mu\nu') - 2 y_a y_c - 2 z_a z_c$$

$$\overline{BD}^2 = (x_b - x_d)^2 + (y_b - y_d)^2 + (z_b - z_d)^2$$

oder nach 5., 6. und 7.

$$= \{(\mu' - \mu) - (\nu' - \nu)\}^2 - \frac{p+2\varrho}{p-q} 4(\mu\nu' + \mu'\nu)$$

$$+ \frac{q+2\varrho}{p-q} 4(\mu\nu' + \mu'\nu) - 2 y_b y_d - 2 z_b z_d$$

$$= (\mu' - \mu)^2 + (\nu' - \nu)^2 - 2(\mu\nu + \mu'\nu' + \mu'\nu + \mu\nu') - 2 y_b y_d - 2 z_b z_d$$

Da nun nach 19. $y_a \cdot y_c = y_b \cdot y_d$ und $z_a \cdot z_c = z_b \cdot z_d$ ist, so haben wir

20. $AC = BD$ oder

In einem Krümmungslinienviereck auf einem Paraboloid ist die Entfernung von zwei Gegenecken gleich der Entfernung der beiden andern.

Aus $dx = - d\varrho$ (Gleichung 10) folgt:

Die Projektion des Stücks der Normalen zwischen zwei unendlich nahen homofokalen Paraboloiden auf der Hauptaxe ist konstant.

Aus 11. läßt sich der Satz ableiten:

Die Abstände der vier Ecken eines Krümmungslinienvierecks

auf einem Paraboloid von dem unendlich nahen homofokalen Paraboloid bilden eine Proportion.

Dieses Theorem hat zuerst Bertrand für alle Flächen zweiten Grades angegeben (**Recueil des savants étrangers**).

Zufolge der Gleichungen 12, 14 oder 16 besteht der Satz:

Die Cosinus der Winkel, welche die Normalen eines Paraboloids in den Ecken eines Krümmungslinienvierecks mit einer Axe bilden, sind proportionirt.

Die beiden Hauptkrümmungshalbmesser im Punkte (x, y, z) des Paraboloids $\frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n} = x + \varrho$ sind durch diese Gleichung gegeben:

$$\frac{1}{R} = \frac{m+n+4x+4\varrho \pm \sqrt{(m+n+4x+4\varrho)^2 - 4mn\left(1+\frac{4y^2}{m^2}+\frac{4z^2}{n^2}\right)}}{\frac{mn}{4}\left(1+\frac{4y^2}{m^2}+\frac{4z^2}{n^2}\right)^{3/2}}$$

Wenn wir nun elliptische Coordinaten anwenden, so haben wir zu setzen

$$m = 2p + 4\varrho; \quad n = 2q + 4\varrho; \quad x = -\varrho - \mu - \nu - \frac{p}{2} - \frac{q}{2};$$

$$1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2} = \frac{4(\varrho - \mu)(\varrho - \nu)}{(p + 2\varrho)(q + 2\varrho)}$$

$$m + n + 4x + 4\varrho = 4(\varrho - \mu + \varrho - \nu)$$

$$4mn\left(1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2}\right) = 64(\varrho - \mu)(\varrho - \nu)$$

$$\sqrt{(m+n+4x+4\varrho)^2 - 4mn\left(1+\frac{4y^2}{m^2}+\frac{4z^2}{n^2}\right)} = 4\left((\varrho-\mu)-(\varrho-\nu)\right)$$

Hiedurch wird der Zähler des Bruches von $\frac{1}{R} = 8(\varrho - \mu)$ oder $= 8(\varrho - \nu)$

$$\frac{mn}{4}\left(1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2}\right)^{3/2} = \frac{(\varrho - \mu)^{3/2}(\varrho - \nu)^{3/2}}{(p + 2\varrho)^{1/2}(q + 2\varrho)^{1/2}}$$

Bezeichnen wir die beiden Hauptkrümmungshalbmesser im Punkt (ϱ, μ, ν) mit $R > R'$, so ist demnach

$$21. \quad R = \frac{(\varrho - \mu)^{1/2}(\varrho - \nu)^{3/2}}{(p + 2\varrho)^{1/2}(q + 2\varrho)^{1/2}} \qquad R' = \frac{(\varrho - \mu)^{3/2}(\varrho - \nu)^{1/2}}{(p + 2\varrho)^{1/2}(q + 2\varrho)^{1/2}}$$

Hieraus folgt sogleich:

In einem Krümmungslinienviereck auf einem Paraboloid theilen sich die acht Hauptkrümmungshalbmesser der vier Ecken in zwei Gruppen; die vier Hauptkrümmungshalbmesser in einer Gruppe bilden eine Proportion.

Für die sechs Krümmungshalbmesser von drei in einem Punkt sich schneidenden orthogonalen Paraboloiden gelten die Gleichungen 36 des §. 21.

Aus 12. und 21. erhält man

$$22. \quad R'.\cos a = -\frac{1}{2}(\varrho - \mu) \qquad R.\cos a = -\frac{1}{2}(\varrho - \nu)$$

R ist der Halbmesser des Kreises, welcher die Krümmungslinie $\mu = \text{const.}$ berührt, auf dem Paraboloid (ϱ), während der Kreis von R' die Krümmungslinie $\nu = \text{const.}$ berührt. Nach 22. haben wir also den Satz:

Bei einer Krümmungslinie auf einem Paraboloid ist die Projektion des Hauptkrümmungshalbmessers, dessen Ebene die Krümmungslinie senkrecht schneidet, auf der Hauptaxe konstant.

Da nun zwei Gegenecken eines Krümmungslinienvierecks von einer zur Hauptaxe senkrechten Ebene zusammen so weit entfernt sind, als die beiden andern Gegenecken, so folgt hieraus weiter:

Die acht Krümmungsmittelpunkte, welche den vier Ecken eines Krümmungslinienvierecks auf einem Paraboloid entsprechen, theilen sich in zwei Gruppen, wovon jede ein Viereck bildet: Die Summe der Entfernungen zweier Gegenecken eines solchen Vierecks von einer zur Hauptaxe senkrechten Ebene ist so groß als die Summe der Entfernungen der beiden andern Gegenecken.

Diese Krümmungsmittelpunkte liegen auf einer besondern Fläche (k); die Normalen des Paraboloids (ϱ), deren Fußpunkte eine Krümmungslinie bilden, tangiren diese Fläche in einer geodätischen Linie. In dem Krümmungslinienviereck ABCD sind z. B. AB und CD zwei Gegenseiten, deren Gleichungen in elliptischen Coordinaten

$$\mu = \text{const.} \quad \mu' = \text{const.}$$

heißen, während die Gleichungen von AC und BD $\nu = \text{const.}$ $\nu' = \text{const.}$ sind. Die Fläche (k) besteht nun aus zwei Mänteln, deren scheinbare Contouren sich überall senkrecht schneiden. Der eine Mantel wird durch die Mittelpunkte der Krümmungskreise R gebildet, der andere durch diejenigen von R'. Die Normalen von (ϱ), deren Fußpunkte auf AB und CD liegen, tangiren den ersten Mantel von (k) in zwei geodätischen Linien, und die Normalen von (ϱ), deren Fußpunkte auf BC und AD liegen, tangiren diesen Mantel in konjugirten geodätischen Linien (s. §. 15); wir können somit für die Fläche (k) das Theorem aufstellen:

In einem von zwei geodätischen und zwei konjugirten geodätischen Linien auf der Fläche der Krümmungsmittelpunkte eines Paraboloids gebildeten Viereck ist die Summe der Entfernungen zweier Gegenecken von einer zur Hauptaxe senkrechten Ebene gleich der Summe der Entfernungen der beiden andern Gegenecken. Hiebei ist aber zu bemerken, daß beide geodätische Linien eine Krümmungslinie der Fläche der Krümmungsmittelpunkte berühren, und daß die zwei konjugirten geodätischen Linien auf derselben Krümmungslinie senkrecht stehen müssen. Oder auch müssen die ersteren Linien durch einen Nabelpunkt gehen, wodurch sich die Richtung der letzteren von selbst bestimmt.

Die Gleichung 16 §. 20 der geodätischen Linien auf dem Paraboloid $\frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n} = x$ heißt

$$1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2} = C \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\frac{dy^2}{m} + \frac{dz^2}{n}}$$

Wenn wir auf elliptische Coordinaten übergehen, so haben wir nach der Gleichung 8 dieses Paragraphs

$$1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2} = 4 \frac{(\varrho - \mu)(\varrho - \nu)}{(p + 2\varrho)(q + 2\varrho)}$$

Wir wollen nun annehmen, daß die geodätische Linie auf dem Paraboloid (ϱ) liege, und bezeichnen ein Element derselben mit ds, so ist

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Die Werthe von dy und dz ergeben sich aus 6. und 7., indem man y, z, μ und ν als variabel betrachtet; man erhält also durch Differenziation:

$$dy = \frac{\sqrt{p + 2\varrho}}{\sqrt{q - p}\sqrt{p + 2\mu}\sqrt{p + 2\nu}}\Big((p + 2\nu)\,d\mu + (p + 2\mu)\,d\nu\Big)$$

$$dz = \frac{\sqrt{q + 2\varrho}}{\sqrt{p - q}\sqrt{q + 2\mu}\sqrt{q + 2\nu}}\Big((q + 2\nu)\,d\mu + (q + 2\mu)\,d\nu\Big),$$

$$\frac{dy^2}{m} + \frac{dz^2}{n} = \frac{dy^2}{2p + 4\varrho} + \frac{dz^2}{2q + 4\varrho} = \frac{\{(p + 2\nu)\,d\mu + (p + 2\mu)\,d\nu\}^2}{2(q - p)(p + 2\mu)(p + 2\nu)}$$

$$- \frac{\{(q + 2\nu)\,d\mu + (q + 2\mu)\,d\nu\}^2}{2(p - q)(q + 2\mu)(q + 2\nu)}$$

$$= - \frac{\mu - \nu}{(p + 2\mu)(q + 2\mu)}\,d\mu^2 + \frac{\mu - \nu}{(p + 2\nu)(q + 2\nu)}\,d\nu^2$$

Die Gleichung für geodätische Linien auf (ϱ) in elliptischen Coordinaten ist also:

$$22.\quad C = -4\,\frac{(\varrho - \mu)(\varrho - \nu)(\mu - \nu)}{(p + 2\varrho)(q + 2\varrho)ds^2}\left(\frac{d\mu^2}{(p + 2\mu)(q + 2\mu)} - \frac{d\nu^2}{(p + 2\nu)(q + 2\nu)}\right)$$

Im Punkt (ϱ, μ, ν) auf (ϱ) schneiden sich die beiden Krümmungslinien $\varrho = \text{const.}$, $\mu = \text{const.}$ und $\varrho = \text{const.}$, $\nu = \text{const.}$ Das Element der ersten Krümmungslinie haben wir mit ds''' bezeichnet, und dafür gefunden (15.) $ds''' = 2d\nu\,\dfrac{\sqrt{-(\mu - \nu)}\sqrt{-(\varrho - \nu)}}{\sqrt{p + 2\nu}\sqrt{q + 2\nu}}$. Wenn nun der Winkel zwischen ds und $ds''' = i$ ist, so haben wir $\cos i = \dfrac{ds'''}{ds}$;

$$\cos^2 i = \frac{4d\nu^2}{ds^2}\,\frac{(\varrho - \nu)(\mu - \nu)}{(p + 2\nu)(q + 2\nu)}$$

Das Element der zweiten Krümmungslinie ist ds'' und nach 13.

$$ds'' = 2d\mu\,\frac{\sqrt{-(\varrho - \mu)}\sqrt{\mu - \nu}}{\sqrt{p + 2\mu}\sqrt{q + 2\mu}}$$

also

$$\sin i = \frac{ds''}{ds} \text{ oder } \sin^2 i = -\frac{4d\mu^2}{ds^2}\,\frac{(\varrho - \mu)(\mu - \nu)}{(p + 2\mu)(q + 2\mu)}$$

Hiedurch verwandelt sich die Gleichung 22 in folgende:

$$C = \frac{\varrho - \mu}{(p + 2\varrho)(q + 2\varrho)}\cos^2 i + \frac{\varrho - \nu}{(p + 2\varrho)(q + 2\varrho)}\sin^2 i$$

oder

$$23.\quad \mu\cos^2 i + \nu\sin^2 i = \varrho - C(p + 2\varrho)(q + 2\varrho) = C'$$

Somit haben wir für die geodätischen Linien des Paraboloids eine Relation gefunden, welche der Liouville'schen Gleichung für das Ellipsoid und die Hyperboloide entspricht, $\mu^2\cos^2 i + \nu^2\sin^2 i^2 = \text{const.}$ Um den Werth von C' zu bestimmen, nehmen wir an, daß die geodätische Linie auf (ϱ), gehörig verlängert, die Krümmungslinie α berühre, d. h. die Durchschnittslinie der homofokalen Paraboloide (ϱ) und $\dfrac{y^2}{2p + 4\alpha} + \dfrac{z^2}{2q + 4\alpha} = x + \alpha$, so

ist im Berührungspunkt $i = o$, $\mu = \alpha$, also verwandelt sich 23. in $\alpha = C'$; somit ist

24. $\mu \cos^2 i + \nu \sin^2 i = \alpha$

die Gleichung für die geodätischen Linien auf dem Paraboloid (ϱ), welche die Krümmungslinie $\varrho = \text{const.}$ $\alpha = \text{const.}$ tangiren.

Alle Consequenzen, welche aus der Gleichung von Liouville folgen, lassen sich aus der Formel 24 ziehen, blos mit der Modification, daß man μ und ν statt μ^2 und ν^2 zu setzen hat. Die Formeln 15, 16, 17, 18 des §. 24 verwandeln sich also in folgende für das Paraboloid:

25. $\cos i = \sqrt{\frac{\alpha - \nu}{\mu - \nu}} \qquad \sin i = \sqrt{\frac{\mu - \alpha}{\mu - \nu}} \qquad \operatorname{tg} i = \sqrt{\frac{\mu - \alpha}{\alpha - \nu}}$

26. $\frac{\sin i}{\sin i'} = \sqrt{\frac{\mu - \alpha}{\mu - \beta}}$

27. $\mu + \nu = \alpha + \beta = \text{const.}$

28. $\sin i . \sin i^1 . \sin i^2 . \sin i^3 \ldots = \sin J . \sin J^1 . \sin J^2 . \sin J^3 \ldots$

Die drei letzten Gleichungen enthalten folgende Theoreme für das Paraboloid:

Wenn sich die Spitze eines von zwei geodätischen Linien gebildeten Winkels, welche zwei bestimmte Krümmungslinien ($\alpha = \text{const.}$ und $\beta = \text{const.}$) berühren, auf einer dritten Krümmungslinie bewegt, so ist das Verhältniß der Sinus der Winkel, welche die geodätischen Linien mit der letzteren Krümmungslinie bilden, konstant.

Die Spitze eines von zwei geodätischen Linien gebildeten rechten Winkels, welche zwei bestimmte Krümmungslinien ($\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$) oder nur eine berühren, bewegt sich auf einer zur Hauptaxe senkrechten Ebene. Denn wenn $\mu + \nu$ konstant ist auf dem Paraboloid (ϱ), so ist es auch die Abscisse $x = -\varrho - \mu - \nu - \frac{p}{2} - \frac{q}{2}$. Bei dem analogen Satz für das Ellipsoid und die Hyperboloide liegt die Spitze des rechten Winkels auf einer concentrischen Kugel. Da nun das Paraboloid als ein Ellipsoid mit unendlich fernem Mittelpunkt angesehen werden kann, so sieht man leicht die Uebereinstimmung zwischen beiden Sätzen, insofern als die Kugel sich in eine zur Hauptaxe senkrechte Ebene verwandelt.

Wenn man einer Krümmungslinie ein geodätisches Vieleck von n Seiten einbeschreibt, so lassen sich die Winkel, welche jede Seite des Vielecks mit der Krümmungslinie bildet, in zwei Gruppen bringen: Das Produkt der Sinus der n Winkel in der ersten Gruppe ist gleich dem Produkt der Sinus der n Winkel in der andern Gruppe.

Setzt man in 26. $\alpha = \beta$, so ist $\sin i = \sin i'$, oder

Zwei geodätische Linien, welche eine Krümmungslinie eines Paraboloids berühren, bilden in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt mit einer zweiten Krümmungslinie gleiche Winkel mit derselben.

Nach dem Theorem von Euler ist

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}\cos^2 i + \frac{1}{R'}\cos^2 i$$

Mit Benützung der Werthe von R und R' aus 21. erhalten wir

$$29.\quad \frac{1}{r} = \frac{\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{q+2\varrho}}{(\varrho-\mu)^{3/2}(\varrho-\nu)^{3/2}}\{\varrho - (\mu\cos^2 i + \nu\sin^2 i)\}$$

Dieß ist der Ausdruck für den Krümmungshalbmesser r jeder beliebigen geodätischen Linie auf dem Paraboloid (ϱ), welche im Punkte (ϱ, μ, ν) mit der Krümmungslinie μ = const. den Winkel i bildet. Bei den geodätischen Linien, welche die Krümmungslinien ϱ = const., α = const. tangiren, ist $\mu\cos^2 i + \nu\sin^2 i = \alpha$, also

$$30.\quad r = \frac{(\varrho-\mu)^{3/2}(\varrho-\nu)^{3/2}}{(p+2\varrho)^{1/2}(q+2\varrho)^{1/2}(\varrho-\alpha)}$$

Hieraus findet man ohne Mühe den Beweis für diesen Satz:

Wenn man in einem Krümmungslinienviereck auf einem Paraboloid zwei Eckenpaare durch geodätische Linien verbindet, so bilden die Krümmungshalbmesser der letzteren in den Ecken eine Proportion.

Aus 30. folgt:

$$31.\quad \frac{1}{r^2}(\varrho-\mu)^3(\varrho-\nu)^3 = \text{const.}$$

Dieß ist eine weitere Gleichung für die geodätischen Linien auf dem Paraboloid.

Der Joachimsthal'sche Ausdruck für die Poldistanz eines Elements auf einer Fläche, welches mit einer Krümmungslinie den Winkel i bildet, heißt:

$$\triangle = \frac{\frac{\cos^2 i}{R} + \frac{\sin^2 i}{R'}}{\frac{\cos^2 i}{R^2} + \frac{\sin^2 i}{R'^2}}$$

Wenn man die Werthe von R, R', cos i und sin i aus 21. und 25. substituirt, so erhält man

$$\triangle = \frac{(\varrho-\mu)^{3/2}(\varrho-\nu)^{3/2}}{(p+2\varrho)^{1/2}(q+2\varrho)^{1/2}} \cdot \frac{\varrho-\alpha}{\varrho^2 - 2\varrho\alpha + \alpha(\mu+\nu) - \mu\nu}$$

Da ds die Diagonale in dem unendlich kleinen Parallelogramm ist, dessen Kanten ds'' und ds''' sind, so läßt sich, mit Hülfe der Gleichungen

$$ds^2 = ds''^2 + ds'''^2 \text{ und } ds = ds'''\cos i + ds''\sin i$$

das Element der paraboloidischen Linie auf zweierlei Art bestimmen:

$$32.\quad ds^2 = 4d\mu^2\frac{(\varrho-\mu)(\nu-\mu)}{(p+2\mu)(q+2\mu)} + 4d\nu^2\frac{(\varrho-\nu)(\mu-\nu)}{(p+2\nu)(q+2\nu)}$$

$$33.\quad ds = -2d\nu\frac{\sqrt{\varrho-\nu}\sqrt{\alpha-\nu}}{\sqrt{p+2\nu}\sqrt{q+2\nu}} - 2d\mu\frac{\sqrt{\varrho-\mu}\sqrt{\alpha-\mu}}{\sqrt{p+2\mu}\sqrt{q+2\mu}}$$

Soll die Gleichung 33 das Element einer beliebigen paraboloidischen Linie vorstellen, so ist allgemein $\alpha = \varphi(\mu, \nu)$; in dem speziellen Fall der geodätischen Linien ist α = const., wodurch sich die Integration von 33. wesentlich vereinfacht.

Endlich bestehen noch die Relationen $ds = \frac{ds'''}{\cos i} = \frac{ds''}{\sin i}$; oder

34. $$\frac{d\mu\sqrt{\varrho - \mu}}{\sqrt{p + 2\mu}\sqrt{q + 2\mu}\sqrt{\alpha - \mu}} + \frac{d\nu\sqrt{\varrho - \nu}}{\sqrt{p + 2\nu}\sqrt{q + 2\nu}\sqrt{\alpha - \nu}} = 0$$

§. 29. Die homofokalen Paraboloide. Fortsetzung.

Es ist eine Ebene $Ax + By + z = \gamma$ gegeben, auf welcher sich ein Punkt M bewegt, dessen Coordinaten entweder (x, y, z) heißen mögen, oder durch die Parameter der drei durch A gehenden homofokalen Paraboloide

$$\frac{y^2}{2p + 4\varrho} + \frac{z^2}{2q + 4\varrho} = x + \varrho \qquad \frac{y^2}{2p + 4\mu} + \frac{z^2}{2q + 4\mu} = x + \mu$$

$$\frac{y^2}{2p + 4\nu} + \frac{z^2}{2q + 4\nu} = x + \nu$$

nämlich durch (ϱ, μ, ν) ausgedrückt werden können. Die Normalen von (ϱ), (μ), (ν), bilden in M mit der Ebene die Winkel i, i', i''; wir bezeichnen ferner, wie früher, die Winkel, welche die Normalen von (ϱ), (μ), (ν) mit den x, y, z Axen machen, der Reihe nach mit a, a', a''; $\alpha, \alpha', \alpha''$; $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}', \mathfrak{a}''$, so ist

1. $$\sin i = \frac{A}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}} \cos a + \frac{B}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}} \cos a' + \frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}} \cos a''$$

2. $$\sin i' = \frac{A}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}} \cos \alpha + \frac{B}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}} \cos \alpha' + \frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}} \cos \alpha''$$

3. $$\sin i'' = \frac{A}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}} \cos \mathfrak{a} + \frac{B}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}} \cos \mathfrak{a}' + \frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}} \cos \mathfrak{a}''$$

Mithin

$$\varrho \sin^2 i + \mu \sin^2 i' + \nu \sin^2 i'' = \frac{1}{1 + A^2 + B^2} \{(A \cos a + B \cos a' + \cos a'')^2 \varrho + (A \cos \alpha + B \cos \alpha' + \cos \alpha'')^2 \mu + (A \cos \mathfrak{a} + B \cos \mathfrak{a}' + \cos \mathfrak{a}'')^2 \nu\}$$

$$= \frac{1}{1 + A^2 + B^2} \{(\cos^2 a \,.\, \varrho + \cos^2 \alpha \,.\, \mu + \cos^2 \mathfrak{a} \,.\, \nu) A^2 + (\cos a \,.\, \cos a' \,.\, \varrho + \cos \alpha \,.\, \cos \alpha' \,.\, \mu + \cos \mathfrak{a} \,.\, \cos \mathfrak{a}' \,.\, \nu) 2AB + (\cos a \,.\, \cos a'' \,.\, \varrho + \cos \alpha \,.\, \cos \alpha'' \,.\, \mu + \cos \mathfrak{a} \,.\, \cos \mathfrak{a}'' \,.\, \nu) 2A\}$$

$$+ \frac{1}{1 + A^2 + B^2} \{(\cos^2 a' \,.\, \varrho + \cos^2 \alpha' \,.\, \mu + \cos^2 \mathfrak{a}' \,.\, \nu) B^2 + (\cos^2 a'' \,.\, \varrho + \cos^2 \alpha'' \,.\, \mu + \cos^2 \mathfrak{a}'' \,.\, \nu) + (\cos a' \,.\, \cos a'' \,.\, \varrho + \cos \alpha' \,.\, \cos \alpha'' \,.\, \mu + \cos \mathfrak{a}' \,.\, \cos \mathfrak{a}'' \,.\, \nu) 2B\}$$

Wenn wir die Ausdrücke in den Parenthesen entwickeln, mit Hülfe der Werthe von $\cos a$, $\cos a'$, $\cos a''$; $\cos \alpha$, $\cos \alpha'$, $\cos \alpha''$; $\cos \mathfrak{a}$, $\cos \mathfrak{a}'$, $\cos \mathfrak{a}''$ (12, 14. 16. in §. 28), so erhalten wir

$$\cos a^2 . \varrho + \cos \alpha^2 . \mu + \cos \mathfrak{a}^2 . \nu$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{(p+2\varrho)(q+2\varrho)\varrho}{(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)} - \frac{(p+2\mu)(q+2\mu)\mu}{(\varrho-\mu)(\mu-\nu)} + \frac{(p+2\nu)(q+2\nu)\nu}{(\varrho-\nu)(\mu-\nu)}\right)$$

$$= \{(pq+2p\varrho+2q\varrho+4\varrho^2)\mu\varrho - (pq+2p\varrho+2q\varrho+4\varrho^2)\nu\varrho - (pq+2p\mu+2q\mu+4\mu^2)\varrho\mu + (pq+2p\mu+2q\mu+4\mu^2)\nu\mu + (pq+2p\nu+2q\nu+4\nu^2)\varrho\nu - (pq+2p\nu+2q\nu+4\nu^2)\mu\nu\} : 4(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)(\mu-\nu)$$

$$= \frac{p}{2} + \frac{q}{2} + \frac{\varrho^3\mu - \varrho^3\nu - \varrho\mu^3 + \mu^3\nu + \varrho\nu^3 - \nu^3\mu}{(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)(\mu-\nu)}$$

Nun ist $(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)(\mu-\nu) = \varrho^2\mu - \varrho^2\nu + \varrho\nu^2 - \mu\varrho^2 + \mu^2\nu - \mu\nu^2$, ferner $(\varrho^2\mu - \varrho^2\nu + \varrho\nu^2 - \mu^2\varrho + \mu^2\nu - \mu\nu^2)(\varrho+\mu+\nu) = \varrho^3\mu - \varrho^3\nu - \varrho\mu^3 + \mu^3\nu + \varrho\nu^3 - \nu^3\mu$; somit $\cos^2 a . \varrho + \cos^2 \alpha . \mu + \cos^2 \mathfrak{a} . \nu = \frac{p}{2} + \frac{q}{2} + \varrho + \mu + \nu$; oder nach §. 28, 5.

4. $\cos^2 a . \varrho + \cos^2 \alpha . \mu + \cos^2 \mathfrak{a} . \nu = - x$

$$\cos a . \cos a' . \varrho + \cos \alpha . \cos . \alpha' . \mu + \cos \mathfrak{a} . \cos \mathfrak{a}' . \nu$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{(q+2\varrho)\varrho}{(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)} - \frac{(q+2\mu)\mu}{(\varrho-\mu)(\mu-\nu)} + \frac{(q+2\nu)\nu}{(\varrho-\nu)(\mu-\nu)}\right)\frac{\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{p+2\mu}\sqrt{p+2\nu}}{\sqrt{q-p}}$$

Der Ausdruck in der Klammer ist, wie man leicht findet, gleich 2; und nach §. 28, 6 ist der Bruch gleich y, also

5. $\cos a . \cos a' . \varrho + \cos \alpha . \cos \alpha' . \mu + \cos \mathfrak{a} . \cos \mathfrak{a}' . \nu = -\frac{1}{2} y$

$$\cos a . \cos a'' . \varrho + \cos \alpha . \cos \alpha'' . \mu + \cos \mathfrak{a} . \cos . \mathfrak{a}'' . \nu$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{(p+2\varrho)\varrho}{(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)} - \frac{(p+2\mu)\mu}{(\varrho-\mu)(\mu-\nu)} + \frac{(p+2\nu)\nu}{(\varrho-\nu)(\mu-\nu)}\right)\frac{\sqrt{q+2\varrho}\sqrt{q+2\mu}\sqrt{q+2\nu}}{\sqrt{p-q}}$$

Die Größe in der Klammer ist gleich 2, und der Bruch nach §. 28, 7 gleich z, also

6. $\cos a . \cos a'' . \varrho + \cos \alpha . \cos \alpha'' . \mu + \cos \mathfrak{a} . \cos \mathfrak{a}'' . \nu = -\frac{1}{2} z$

$$\cos^2 a' . \varrho + \cos^2 \alpha' . \mu + \cos^2 \mathfrak{a}' . \nu = \frac{1}{4}\left\{\frac{(p+2\mu)(p+2\nu)(q+2\varrho)}{(q-p)(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)} - \frac{(p+2\varrho)(p+2\nu)(q+2\mu)}{(q-p)(\varrho-\mu)(\mu-\nu)} + \frac{(p+2\varrho)(p+2\mu)(q+2\nu)}{(q-p)(\varrho-\nu)(\mu-\nu)}\right\}$$

$$= \frac{1}{4(q-p)(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)(\mu-\nu)}\{(p^2q + 2p^2\varrho + 2q\nu p + 4p\nu\varrho + 2\mu pq + 4\mu p\varrho + 4\mu\nu q + 8\mu\nu\varrho)\varrho\mu$$
$$- (p^2q + 2p^2\varrho + 2p\nu q + 4p\nu\varrho + 2\mu pq + 4\mu p\varrho + 4\mu\nu q + 8\mu\nu\varrho)\varrho\nu$$
$$- (p^2q + 2p^2\mu + 2p\nu q + 4p\mu\nu + 2\varrho pq + 4\varrho p\mu + 4\varrho\nu q + 8\varrho\mu\nu)\varrho\mu$$
$$+ (p^2q + 2p^2\mu + 2p\nu q + 4p\mu\nu + 2\varrho pq + 4\varrho p\mu + 4\varrho\nu q + 8\varrho\mu\nu)\mu\nu$$
$$+ (p^2q + 2p^2\nu + 2p\mu q + 4p\mu\nu + 2\varrho pq + 4\varrho p\nu + 4\varrho\mu q + 8\varrho\mu\nu)\varrho\nu$$
$$- (p^2q + 2p^2\nu + 2p\mu q + 4p\mu\nu + 2\varrho pq + 4\varrho p\nu + 4\varrho\mu q + 8\varrho\mu\nu)\mu\nu\}$$

Wenn man in der Klammer diejenigen Summanden wegläßt, welche sich aufheben, so bleibt noch

$$(\mu-\nu)\{p^2\varrho^2 + p^2\mu\nu - p^2\varrho(\mu+\nu) + pq\varrho(\mu+\nu) - pq\varrho^2 - pq\mu\nu\}$$
$$= (\mu-\nu)p(p-q)\{\varrho^2 - (\mu+\nu)\varrho + \mu\nu\}$$
$$= (\mu-\nu)p(p-q)(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)$$

der ersten Gleichung $z = o$, so ist $y^2 = (2p + 4\varrho)(x + \varrho)$. Der Abstand des Brennpunkts dieser Parabel vom Ursprung ist $= 2p$, also unabhängig von ϱ; ebenso findet man für den Abstand des Brennpunkts der Parabel $z^2 = (2q + 4\varrho)(x + \varrho)$ vom Ursprung den Werth $2q$. Die drei Paraboloide (ϱ), (μ), (ν) sind demnach homofokal, d. h. ihre Hauptschnitte, welche in den xy und xz Ebenen liegen, haben dieselben Brennpunkte. Da die Gleichungen 1 in der Form übereinstimmen, so nehmen wir die erste derselben und entwickeln sie nach Potenzen von ϱ,

$$\varrho^3 + \left(\frac{p}{2} + \frac{q}{2} + x\right)\varrho^2 + \left\{\frac{pq}{4} + \left(\frac{p}{2} + \frac{q}{2}\right)x - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4}\right\}\varrho$$
$$+ \frac{pqx}{4} - \frac{qy^2}{8} - \frac{pz^2}{8} = o$$

Die drei Wurzeln dieser Gleichung sind ϱ, μ, ν, und nach der bekannten Theorie der Gleichungen ist

$$2.\quad \varrho + \mu + \nu = -\frac{p}{2} - \frac{q}{2} - x$$

$$3.\quad \varrho\mu + \varrho\nu + \mu\nu = \frac{pq}{4} + \left(\frac{p}{2} + \frac{q}{2}\right)x - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4}$$

$$4.\quad \varrho\mu\nu = -\frac{pqx}{4} + \frac{qy^2}{8} + \frac{pz^2}{8}$$

Aus 2. erhalten wir

$$x = -\varrho - \mu - \nu - \frac{p}{2} - \frac{q}{2}$$

Die Werthe von y und z können wir durch Elimination aus 1. bekommen. Durch Subtraktion der zweiten und dritten von der ersten unter den Gleichungen 1 ergibt sich

$$\frac{y^2}{(p + 2\varrho)(p + 2\mu)} + \frac{z^2}{(q + 2\varrho)(q + 2\mu)} = -1$$
$$\frac{y^2}{(p + 2\varrho)(p + 2\nu)} + \frac{z^2}{(q + 2\varrho)(q + 2\nu)} = -1$$

Hieraus

$$\frac{y^2}{(p + 2\varrho)(p + 2\mu)(q + 2\nu)} - \frac{y^2}{(p + 2\varrho)(p + 2\nu)(q + 2\mu)}$$
$$= \frac{1}{q + 2\mu} - \frac{1}{q + 2\nu}$$

$$y^2 = \frac{2(\nu - \mu)(p + 2\varrho)(p + 2\mu)(p + 2\nu)}{(p + 2\nu)(q + 2\mu) - (p + 2\mu)(q + 2\nu)} = -\frac{1}{p - q}(p + 2\varrho)(p + 2\mu)(p + 2\nu)$$

$$\frac{z^2}{(q + 2\varrho)(q + 2\mu)(p + 2\nu)} - \frac{z^2}{(q + 2\varrho)(q + 2\nu)(p + 2\mu)}$$
$$= \frac{1}{p + 2\mu} - \frac{1}{p + 2\nu}$$

$$z^2 = \frac{2(\nu - \mu)(q + 2\varrho)(q + 2\mu)(q + 2\nu)}{(q + 2\nu)(p + 2\mu) - (q + 2\mu)(p + 2\nu)} = \frac{1}{p - q}(q + 2\varrho)(q + 2\mu)(q + 2\nu)$$

Wir haben somit diese Zusammenstellung:

$$5.\quad x = -\varrho - \mu - \nu - \frac{p}{2} - \frac{q}{2}$$

6. $y^2 = -\frac{1}{p-q}(p+2\varrho)(p+2\mu)(p+2\nu)$

7. $z^2 = \frac{1}{p-q}(q+2\varrho)(q+2\mu)(q+2\nu)$

Hieraus können wir sogleich folgenden Satz ableiten: Wenn in 5. x konstant ist, so ist es auch die Summe $\varrho + \mu + \nu$, oder

Bewegt sich ein Punkt in einer Ebene, welche senkrecht ist zur x Axe, so ist die Summe der Scheitelabstände der drei durch ihn gehenden homofokalen Paraboloide, deren Axe die x Axe ist, konstant.

Für das Perpendikel P, welches vom Scheitel des Paraboloids $\frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n} = x$ auf die Tangentialebene des Punkts (x, y, z) gefällt wird, hat man den Werth

$$P = \frac{x}{\sqrt{1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2}}}$$

Das Perpendikel, welches vom Ursprung auf die Tangentialebene des Paraboloids $\frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n} = x + \varrho$ im Punkt (x, y, z) gefällt wird, ist gegeben durch die Gleichung

$$P = \frac{x + 2\varrho}{\sqrt{1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2}}}$$

Wir wollen nun die Größe unter dem Wurzelzeichen $1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2}$ in elliptischen Coordinaten ausdrücken, indem wir nach 1. setzen

$$m = 2p + 4\varrho \qquad n = 2q + 4\varrho$$

und nach 6. und 7. die Werthe von y^2 und z^2 substituiren, wodurch wir erhalten

$$1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2} = 1 - \frac{(p+2\mu)\,(p+2\nu)}{(p-q)\,(p+2\varrho)} + \frac{(q+2\mu)\,(q+2\nu)}{(p-q)\,(q+2\varrho)}$$

$$= \frac{(p-q)(p+2\varrho)(q+2\varrho) - (p+2\mu)(p+2\nu)(q+2\varrho) + (q+2\mu)(q+2\nu)(p+2\varrho)}{(p-q)\,(p+2\varrho)\,(q+2\varrho)}$$

Die drei Summanden im Zähler entwickelt, geben

$$+ p^2q + 2p^2\varrho + 2pq\varrho + 4p\varrho^2 - pq^2 - 2pq\varrho - 2q^2\varrho - 4q\varrho^2$$
$$- (p^2q + 2p^2\varrho + 2pq\nu + 4p\varrho\nu + 2pq\mu + 4p\varrho\mu + 4q\mu\nu + 8\varrho\mu\nu)$$
$$+ pq^2 + 2q^2\varrho + 2pq\nu + 4q\varrho\nu + 2pq\mu + 4q\varrho\mu + 4p\mu\nu + 8\varrho\mu\nu$$

Wenn man diejenigen Größen wegläßt, die sich aufheben, so bleibt

$$4\varrho^2(p-q) - 4\varrho\nu(p-q) - 4\varrho\mu(p-q) + 4\mu\nu(p-q)$$
$$= 4(p-q)(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)$$

8. $1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2} = 4\frac{(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)}{(p+2\varrho)(q+2\varrho)}$

Hiedurch ergibt sich folgender Ausdruck für das vom Ursprung auf die Tangentialebene des Punkts (x, y, z) der Fläche $\frac{y^2}{2p+4\varrho} + \frac{z^2}{2q+4\varrho} = x + \varrho$ gefällte Perpendikel:

$$9.\quad P = \frac{(x + 2\varrho)\sqrt{p + 2\varrho}\,\sqrt{q + 2\varrho}}{2\sqrt{\varrho - \mu}\,\sqrt{\varrho - \nu}}$$

Aus den Gleichungen 5, 6 und 7 erhalten wir durch Differenziation, indem wir x, y, z und ϱ als die Variabelen betrachten

$$10.\quad dx = -d\varrho \qquad dy = \frac{\sqrt{p + 2\mu}\,\sqrt{p + 2\nu}}{\sqrt{-(p - q)}}\;\frac{d\varrho}{\sqrt{p + 2\varrho}}$$

$$dz = \frac{\sqrt{q + 2\mu}\,\sqrt{q + 2\nu}}{\sqrt{p - q}}\;\frac{d\varrho}{\sqrt{q + 2\varrho}}$$

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\varrho^2\left(1 - \frac{(p + 2\mu)(p + 2\nu)}{(p + 2\varrho)(p - q)} + \frac{(q + 2\mu)(q + 2\nu)}{(q + 2\varrho)(p - q)}\right)$$

also (siehe die Entwicklung der Gleichung 8)

$$ds'^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = 4\,d\varrho^2\,\frac{(p - q)(\varrho - \mu)(\varrho - \nu)}{(p - q)(p + 2\varrho)(q + 2\varrho)}$$

$$11.\quad ds' = 2d\varrho\,\frac{\sqrt{\varrho - \mu}\,\sqrt{\varrho - \nu}}{\sqrt{p + 2\varrho}\,\sqrt{q + 2\varrho}}$$

Wir bezeichnen die Winkel, welche das Element ds' oder die Normale des Paraboloids (ϱ) mit den Axen der x, y, z bildet, durch a, a', a'', so ist

$$\cos a = \frac{dx}{ds'};\quad \cos a' = \frac{dy}{ds'};\quad \cos a'' = \frac{dz}{ds'},$$

oder

$$12.\quad \cos a = -\,{}^1\!/_2\,\frac{\sqrt{p + 2\varrho}\,\sqrt{q + 2\varrho}}{\sqrt{\varrho - \mu}\,\sqrt{\varrho - \nu}}$$

$$\cos a' = {}^1\!/_2\,\frac{\sqrt{p + 2\mu}\,\sqrt{p + 2\nu}\,\sqrt{q + 2\varrho}}{\sqrt{-(p - q)}\,\sqrt{\varrho - \mu}\,\sqrt{\varrho - \nu}}$$

$$\cos a'' = {}^1\!/_2\,\frac{\sqrt{q + 2\mu}\,\sqrt{q + 2\nu}\,\sqrt{p + 2\varrho}}{\sqrt{p - q}\,\sqrt{\varrho - \mu}\,\sqrt{\varrho - \nu}}$$

Wenn man aber in 5., 6. und 7. die Größen x, y, z und μ als Variabele ansieht, so erhält man auf ganz analoge Weise für den unendlich kleinen Abstand ds'' der beiden Punkte (ϱ, μ, ν) und ($\varrho, \mu + d\mu, \nu$)

$$13.\quad ds'' = 2d\mu\,\frac{\sqrt{-(\varrho - \mu)}\,\sqrt{\mu - \nu}}{\sqrt{p + 2\mu}\,\sqrt{q + 2\mu}}$$

ds'' ist die Normale des Paraboloids (μ); die Winkel, welche sie mit den Axen der x, y und z bildet, bezeichnen wir mit $\alpha, \alpha', \alpha''$ und erhalten $\cos\alpha = \frac{dx}{ds''}$, $\cos\alpha' = \frac{dy}{ds''}$, $\cos\alpha'' = \frac{dz}{ds''}$ oder nach 12.

$$14.\quad \cos\alpha = -\,{}^1\!/_2\,\frac{\sqrt{p + 2\mu}\,\sqrt{q + 2\mu}}{\sqrt{-(\varrho - \mu)}\,\sqrt{\mu - \nu}}$$

$$\cos\alpha' = {}^1\!/_2\,\frac{\sqrt{p + 2\varrho}\,\sqrt{p + 2\nu}\,\sqrt{q + 2\mu}}{\sqrt{-(p - q)}\,\sqrt{-(\varrho - \mu)}\,\sqrt{\mu - \nu}}$$

$$\cos\alpha'' = {}^1\!/_2\,\frac{\sqrt{q + 2\varrho}\,\sqrt{q + 2\nu}\,\sqrt{p + 2\mu}}{\sqrt{p - q}\,\sqrt{-(\varrho - \mu)}\,\sqrt{\mu - \nu}}$$

Betrachtet man endlich in 5., 6. und 7. x, y, z und ν als die Variabelen, und bezeichnet den unendlich kleinen Abstand der Punkte (ϱ, μ, ν) und ($\varrho, \mu, \nu + d\nu$) oder die Normale des Paraboloids (ν) mit ds''', so ist

$$15.\quad ds''' = 2d\nu \frac{\sqrt{-(\mu-\nu)}\sqrt{-(\varrho-\nu)}}{\sqrt{p+2\nu}\sqrt{q+2\nu}}$$

ds''' bildet mit den Axen der x, y, z die Winkel a, a', a''; $\cos a = \frac{dx}{ds'''}$ $\cos a' = \frac{dy}{ds'''}$; $\cos a'' = \frac{dz}{ds'''}$, oder nach 12. durch gegenseitige Vertauschung der Buchstaben ϱ und ν

$$16.\quad \cos a = -\tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{p+2\nu}\sqrt{q+2\nu}}{\sqrt{-(\mu-\nu)}\sqrt{-(\varrho-\nu)}}$$

$$\cos a' = \tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{p+2\mu}\sqrt{q+2\nu}}{\sqrt{-(p-q)}\sqrt{-(\mu-\nu)}\sqrt{-(\varrho-\nu)}}$$

$$\cos a'' = \tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{q+2\varrho}\sqrt{q+2\mu}\sqrt{p+2\nu}}{\sqrt{p-q}\sqrt{-(\mu-\nu)}\sqrt{-(\varrho-\nu)}}$$

Aus 12. und 14. erhalten wir

$$17.\quad \cos a \,.\, \cos\alpha + \cos a' \,.\, \cos\alpha' + \cos a'' \,.\, \cos\alpha''$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{q+2\varrho}\sqrt{p+2\mu}\sqrt{q+2\mu}}{\sqrt{\varrho-\mu}\sqrt{-(\varrho-\mu)}\sqrt{\varrho-\nu}\sqrt{\mu-\nu}}$$

$$-\frac{1}{4}\frac{(p+2\nu)\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{p+2\mu}\sqrt{q+2\mu}\sqrt{q+2\varrho}}{(p-q)\sqrt{\varrho-\mu}\sqrt{-(\varrho-\mu)}\sqrt{\varrho-\nu}\sqrt{\mu-\nu}}$$

$$+\frac{1}{4}\frac{(q+2\nu)\sqrt{q+2\varrho}\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{p+2\mu}\sqrt{q+2\mu}}{(p-q)\sqrt{\varrho-\mu}\sqrt{-(\varrho-\mu)}\sqrt{\varrho-\nu}\sqrt{\mu-\nu}} = 0$$

Also stehen die beiden Flächen (ϱ) und (μ) auf einander senkrecht. Ganz ebenso läßt sich zeigen, daß die Flächen (ϱ) und (ν) wie auch (μ) und (ν) auf einander senkrecht stehen. Hierauf beruht das Theorem:

Drei homofokale Paraboloide stehen auf einander senkrecht, und mithin schneiden sie sich nach dem Satz von Dupin in ihren Krümmungslinien.

Es sei ABCD ein von vier Krümmungslinien auf dem Paraboloid (ϱ) gebildetes Viereck. Die Abscissen der Ecken bezeichnen wir mit x_a, y_a, z_a; x_b, y_b, z_b; x_c, y_c, z_c; x_d, y_d, z_d; die Punkte A, B, C, D werden der Reihe nach durch die drei in denselben zusammentreffenden homofokalen Paraboloide bezeichnet mit (ϱ, μ, ν); (ϱ, μ, ν'); (ϱ, μ', ν'); (ϱ, μ', ν). Nach 5. ist

$$x_a = -\varrho - \mu - \nu - \frac{p}{2} - \frac{q}{2} \qquad x_b = -\varrho - \mu - \nu' - \frac{p}{2} - \frac{q}{2}$$

$$x_c = -\varrho - \mu' - \nu' - \frac{p}{2} - \frac{q}{2} \qquad x_d = -\varrho - \mu' - \nu - \frac{p}{2} - \frac{q}{2}$$

$$18.\quad x_a + x_c = x_b + x_d$$

In einem von vier Krümmungslinien gebildeten Viereck auf einem Paraboloid ist die Summe der Abstände zweier Ge-

genecken von irgend einer auf der Hauptaxe senkrechten Ebene gleich der Summe der Abstände der beiden andern Gegenecken. Legt man durch eine Ecke eines solchen Vierecks eine zur Hauptaxe senkrechte Ebene, so ist die Entfernung einer zweiten Ecke des Vierecks von dieser Ebene so groß als die Summe der Entfernungen der beiden andern Ecken.

Aus 6. folgt

$$y_a = \sqrt{-\frac{1}{p-q}}\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{p+2\mu}\sqrt{p+2\nu}$$

$$y_b = \sqrt{-\frac{1}{p-q}}\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{p+2\mu}\sqrt{p+2\nu'}$$

$$y_c = \sqrt{-\frac{1}{p-q}}\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{p+2\mu'}\sqrt{p+2\nu'}$$

$$y_d = \sqrt{-\frac{1}{p-q}}\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{p+2\mu'}\sqrt{p+2\nu}$$

19. $y_a \,.\, y_c = y_b \,.\, y_d$ ebenso $z_a \,.\, z_c = z_b \,.\, z_d$.

In einem Krümmungslinienviereck auf einem Paraboloid bilden die Entfernungen der Ecken von einer der beiden andern durch den Ursprung gehenden Hauptebenen eine Proportion.

$$\overline{AC}^2 = (x_a - x_c)^2 + (y_a - y_c)^2 + (z_a - z_c)^2$$

oder nach 5., 6., 7.

$$= \{(\mu' - \mu) + (\nu' - \nu)\}^2 - \frac{p+2\varrho}{p-q}\,4\,(\mu\nu + \mu'\nu') - 2\,y_a\,y_c$$

$$+ \frac{q+2\varrho}{p-q}\,4\,(\mu\nu + \mu'\nu') - 2\,z_a\,.\,z_c$$

$$= \{(\mu' - \mu) + (\nu' - \nu)\}^2 - 4\,(\mu\nu + \mu'\nu') - 2\,y_a\,y_c - 2\,z_a\,z_c$$

$$= (\mu' - \mu)^2 + (\nu' - \nu)^2 - 2\,(\mu\nu + \mu'\nu' + \mu'\nu + \mu\nu') - 2\,y_a\,y_c - 2\,z_a\,z_c$$

$$\overline{BD}^2 = (x_b - x_d)^2 + (y_b - y_d)^2 + (z_b - z_d)^2$$

oder nach 5., 6. und 7.

$$= \{(\mu' - \mu) - (\nu' - \nu)\}^2 - \frac{p+2\varrho}{p-q}\,4\,(\mu\nu' + \mu'\nu)$$

$$+ \frac{q+2\varrho}{p-q}\,4\,(\mu\nu' + \mu'\nu) - 2\,y_b\,y_d - 2\,z_b\,z_d$$

$$= (\mu' - \mu)^2 + (\nu' - \nu)^2 - 2\,(\mu\nu + \mu'\nu' + \mu'\nu + \mu\nu') - 2\,y_b\,y_d - 2\,z_b\,z_d$$

Da nun nach 19. $y_a \,.\, y_c = y_b \,.\, y_d$ und $z_a \,.\, z_c = z_b \,.\, z_d$ ist, so haben wir

20. $AC = BD$ oder

In einem Krümmungslinienviereck auf einem Paraboloid ist die Entfernung von zwei Gegenecken gleich der Entfernung der beiden andern.

Aus $dx = -\,d\varrho$ (Gleichung 10) folgt:

Die Projektion des Stücks der Normalen zwischen zwei unendlich nahen homofokalen Paraboloiden auf der Hauptaxe ist konstant.

Aus 11. läßt sich der Satz ableiten:

Die Abstände der vier Ecken eines Krümmungslinienvierecks

auf einem Paraboloid von dem unendlich nahen homofokalen Paraboloid bilden eine Proportion.

Dieses Theorem hat zuerst Bertrand für alle Flächen zweiten Grades angegeben (Recueil des savants étrangers).

Zufolge der Gleichungen 12, 14 oder 16 besteht der Satz:

Die Cosinus der Winkel, welche die Normalen eines Paraboloids in den Ecken eines Krümmungslinienvierecks mit einer Axe bilden, sind proportionirt.

Die beiden Hauptkrümmungshalbmesser im Punkte (x, y, z) des Paraboloids $\frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n} = x + \varrho$ sind durch diese Gleichung gegeben:

$$\frac{1}{R} = \frac{m+n+4x+4\varrho \pm \sqrt{(m+n+4x+4\varrho)^2 - 4mn\left(1+\frac{4y^2}{m^2}+\frac{4z^2}{n^2}\right)}}{\frac{mn}{4}\left(1+\frac{4y^2}{m^2}+\frac{4z^2}{n^2}\right)^{3/2}}$$

Wenn wir nun elliptische Coordinaten anwenden, so haben wir zu setzen

$$m = 2p + 4\varrho; \quad n = 2q + 4\varrho; \quad x = -\varrho - \mu - \nu - \frac{p}{2} - \frac{q}{2};$$

$$1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2} = \frac{4(\varrho - \mu)(\varrho - \nu)}{(p + 2\varrho)(q + 2\varrho)}$$

$$m + n + 4x + 4\varrho = 4(\varrho - \mu + \varrho - \nu)$$

$$4mn\left(1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2}\right) = 64(\varrho - \mu)(\varrho - \nu)$$

$$\sqrt{(m+n+4x+4\varrho)^2 - 4mn\left(1+\frac{4y^2}{m^2}+\frac{4z^2}{n^2}\right)} = 4\left((\varrho-\mu)-(\varrho-\nu)\right)$$

Hiedurch wird der Zähler des Bruches von $\frac{1}{R} = 8(\varrho - \mu)$ oder $= 8(\varrho - \nu)$

$$\frac{mn}{4}\left(1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2}\right)^{3/2} = \frac{(\varrho - \mu)^{3/2}(\varrho - \nu)^{3/2}}{(p + 2\varrho)^{1/2}(q + 2\varrho)^{1/2}}.$$

Bezeichnen wir die beiden Hauptkrümmungshalbmesser im Punkt (ϱ, μ, ν) mit $R > R'$, so ist demnach

$$21. \quad R = \frac{(\varrho - \mu)^{1/2}(\varrho - \nu)^{3/2}}{(p + 2\varrho)^{1/2}(q + 2\varrho)^{1/2}} \qquad R' = \frac{(\varrho - \mu)^{3/2}(\varrho - \nu)^{1/2}}{(p + 2\varrho)^{1/2}(q + 2\varrho)^{1/2}}$$

Hieraus folgt sogleich:

In einem Krümmungslinienviereck auf einem Paraboloid theilen sich die acht Hauptkrümmungshalbmesser der vier Ecken in zwei Gruppen; die vier Hauptkrümmungshalbmesser in einer Gruppe bilden eine Proportion.

Für die sechs Krümmungshalbmesser von drei in einem Punkt sich schneidenden orthogonalen Paraboloiden gelten die Gleichungen 36 des §. 21.

Aus 12. und 21. erhält man

$$22. \quad R' . \cos a = -\frac{1}{2}(\varrho - \mu) \qquad R . \cos a = -\frac{1}{2}(\varrho - \nu)$$

R ist der Halbmesser des Kreises, welcher die Krümmungslinie $\mu = \text{const.}$ berührt, auf dem Paraboloid (ϱ), während der Kreis von R' die Krümmungslinie $\nu = \text{const.}$ berührt. Nach 22. haben wir also den Satz:

oder

$$23.\quad \frac{d\varrho}{\triangle(\varrho)} + \frac{d\mu}{\triangle(\mu)} + \frac{d\nu}{\triangle(\nu)} = 0$$

$$24.\quad \frac{\varrho d\varrho}{\triangle(\varrho)} + \frac{\mu d\mu}{\triangle(\mu)} + \frac{\nu d\nu}{\triangle(\nu)} = 0$$

$$25.\quad \frac{\varrho^2 d\varrho}{\triangle(\varrho)} + \frac{\mu^2 d\mu}{\triangle(\mu)} + \frac{\nu^2 d\nu}{\triangle(\nu)} = \frac{ds}{2}$$

Diese Differenzialgleichungen, welche wir hier durch höchst einfache geometrische Betrachtungen gefunden haben, bilden das Seitenstück zu den Abelianischen Differenzialgleichungen, welche die Formeln 20, 21 und 22 des §. 25 darstellen.

Aus 23. und 24., welche Gleichungen als diejenigen der gemeinschaftlichen Tangenten von zwei homofokalen Flächen angesehen werden können, leitet man ab

$$(\varrho - \mu) \frac{d\varrho}{\triangle(\varrho)} = (\mu - \nu) \frac{d\nu}{\triangle(\nu)}$$

$$(\varrho - \mu) \frac{d\mu}{\triangle(\mu)} = -(\varrho - \nu) \frac{d\nu}{\triangle(\nu)}$$

Statt 25. kann man auch schreiben

$$ds = 2\,\frac{\varrho^2 - (\alpha + \beta)\,\varrho + \alpha\beta}{\triangle(\varrho)}\,d\varrho + 2\,\frac{\mu^2 - (\alpha - \beta)\,\mu + \alpha\beta)}{\triangle(\mu)}\,d\mu + 2\,\frac{\nu^2 - (\alpha + \beta)\,\nu + \alpha\beta}{\triangle(\nu)}\,d\nu$$

Da nun $\varrho^2 - (\alpha + \beta)\,\varrho + \alpha\beta = (\varrho - \alpha)(\varrho - \beta)$ und $\triangle(\varrho) = \sqrt{(p + 2\varrho)(q + 2\varrho)(\varrho - \alpha)(\varrho - \beta)}$ ist, so folgt daraus

$$\frac{\varrho^2 - (\alpha + \beta)\,\varrho + \alpha\beta}{\triangle(\varrho)} = \sqrt{\frac{(\varrho - \alpha)(\varrho - \beta)}{(p + 2\varrho)(q + 2\varrho)}}$$

ebenso lassen sich die beiden andern Brüche transformiren, wodurch man auf 19. kommt.

Die weiteren Betrachtungen über die Gleichung $L(\varrho, \mu, \nu) = \text{const.}$ sind ganz analog denjenigen, welche früher über die Fläche angestellt wurden, deren Krümmungsmittelpunkte auf homofokalen Ellipsoiden und Hyperboloiden liegen.

Die Gleichung 19

$$ds = 2d\varrho \sqrt{\frac{(\varrho - \alpha)(\varrho - \beta)}{(p + 2\varrho)(q + 2\varrho)}} + 2d\mu \sqrt{\frac{(\mu - \alpha)(\mu - \beta)}{(p + 2\mu)(q + 2\mu)}} + 2d\nu \sqrt{\frac{(\nu - \alpha)(\nu - \beta)}{(p + 2\nu)(q + 2\nu)}}$$

hat noch eine weitere und sehr allgemeine Bedeutung. Sie gibt nämlich den Werth für das Bogenelement ds jeder beliebigen Kurve im Raum in elliptischen (oder vielleicht zur Unterscheidung besser „paraboloidischen") Coordinaten an. Durch die Konstanten p und q ist ein System von homofokalen Paraboloiden gegeben. Zur vollkommenen Bestimmung der Lage eines Elements ds einer Kurve gehören: erstens die Coordinaten ϱ, μ, ν des Punkts auf der Kurve und dann die Parameter α und β der homofokalen Paraboloide (α) und (β), welche

dieses Element, gehörig verlängert, berührt. Zwischen den genannten Parametern und den Coordinaten ϱ, μ, ν wird eine Relation stattfinden.

26. $\alpha = \varphi\ (\varrho, \mu, \nu)$ und $\beta = \psi\ (\varrho, \mu, \nu)$

welche von der Natur der Kurve abhängt; setzen wir diese Werthe für α und β in 19. ein, so erhalten wir eine Gleichung von der Form $ds = F\ (\varrho, \mu, \nu)$ von deren Integration die Rektifikation der gegebenen Kurve abhängt.

Es bieten sich nun verschiedene spezielle Fälle dar. Die Formel für ds wird schon um Vieles einfacher, wenn die Kurve auf einem der Paraboloide, z. B. auf (ϱ) liegt. Dann erhalten wir zunächst $d\varrho = o$, und da alle Tangenten der Kurve jedenfalls (ϱ) berühren, so ist auch $\varrho = \alpha$, somit haben wir für alle Kurven auf (ϱ) die Gleichung:

27. $$ds = 2d\mu \sqrt{\frac{(\mu - \varrho)\ (\mu - \psi)}{(p + 2\mu)\ (q + 2\mu)}} + 2d\nu \sqrt{\frac{(\nu - \varrho)\ (\nu - \psi)}{(p + 2\nu)\ (q + 2\nu)}}$$

Will man sich auf die geodätischen Linien beschränken, welche die Eigenschaft haben, daß alle ihre Tangenten eine zweite homofokale Fläche berühren, so ist $\psi\ (\varrho, \mu, \nu) = \beta = \text{const.}$, also

28. $$ds = 2d\mu \sqrt{\frac{(\mu - \varrho)\ (\mu - \beta)}{(p + 2\mu)\ (q + 2\mu)}} + 2d\nu \sqrt{\frac{(\nu - \varrho)\ (\nu - \beta)}{(p + 2\nu)\ (q + 2\nu)}}$$

Diese Gleichung gilt für die geodätischen Linien auf (ϱ). Ihre weitere Behandlung führt auf elliptische Integrale, was man sogleich sieht, wenn die Zähler und Nenner der Brüche mit

$$\sqrt{(\mu - \varrho)\ (\mu - \beta)} \text{ und } \sqrt{(\nu - \varrho)\ (\nu - \beta)}$$

multiplicirt werden; man erhält dadurch

29. $$ds = 2d\mu \frac{\varrho\beta - (\varrho + \beta)\ \mu + \mu^2}{\sqrt{(p + 2\mu)\ (q + 2\mu)\ (\mu - \varrho)\ (\mu - \beta)}} + 2d\nu \frac{\varrho\beta - (\varrho + \beta)\ \nu + \nu^2}{\sqrt{(p + 2\nu)\ (q + 2\nu)\ (\nu - \varrho)\ (\nu - \beta)}}$$

Wollen wir aber das Bogendifferenzial der Krümmungslinie auf (ϱ) haben, z. B. derjenigen, welche durch die Relationen $\varrho = \text{const.}$ $\mu = \text{const.}$ charakterisirt ist, so ist nicht blos $d\varrho = o$, sondern auch $d\mu = o$ und die zwei homofokalen Flächen, welche von den Tangenten der Krümmungslinie berührt werden, sind (ϱ) und (μ) selbst; somit ergibt sich

30. $$ds = 2d\nu \sqrt{\frac{(\nu - \varrho)\ (\nu - \mu)}{(p + 2\nu)\ (q + 2\nu)}} \text{ und } s = \int 2d\nu \sqrt{\frac{(\nu - \varrho)\ (\nu - \mu)}{(p + 2\nu)\ (q + 2\nu)}}$$

für den Bogen der Krümmungslinie auf dem Paraboloid (ϱ).

II. Theil.

I. Untersuchungen über die allgemeine Theorie der krummen Flächen.

Von C. F. Gauß.

I.

Bei Untersuchungen über verschiedene Richtungen von Geraden im Raum ist es häufig von Vortheil, wenn man die Oberfläche einer Kugel mit dem Halbmesser = 1 und deren Mittelpunkt beliebig ist, zu Hülfe nimmt; die Endpunkte der mit jenen Geraden parallelen Halbmesser geben die Richtung der Letzteren an. Da die Lage aller Punkte im Raum durch 3 Coordinaten bestimmt wird, d. h. durch ihre Entfernungen von 3 unter sich normalen Ebenen, so kommen vor allem die Richtungen der zu diesen Ebenen normalen Axen in Betracht; wir werden die Punkte der Kugeloberfläche, welche diesen Richtungen entsprechen, durch (1), (2), (3) bezeichnen; sie stehen also von einander je um einen Quadranten ab. Außerdem nehmen wir die Richtungen der Axen nach denjenigen Seiten an, gegen welche hin die entsprechenden Coordinaten zunehmen.

II.

Nicht unnütz wird es sein, einige Propositionen, welche bei den vorliegenden Fragen häufig in Anwendung kommen, hier anzuführen.

1. Der Winkel zwischen 2 sich schneidenden Geraden wird gemessen durch den Bogen zwischen den ihren Richtungen entsprechenden Punkten auf der Kugel.

Die Lage irgend einer Ebene kann durch den größten Kreis angegeben werden, dessen Ebene mit ihr parallel ist.

3. Der Winkel zwischen zwei Ebenen ist gleich demjenigen zwischen den entsprechenden größten Kreisen und wird also gemessen durch den Bogen, welcher zwischen den Polen der Letzteren enthalten ist. Demgemäß wird die Neigung einer Geraden gegen eine Ebene durch den Bogen gemessen, welcher von dem der Richtung der Geraden entsprechenden Punkte bis zu dem, die Lage der Ebene vorstellenden größten Kreis rechtwinklig gezogen ist.

4. Bezeichnen wir die Coordinaten zweier Punkte durch x, y, z, x', y', z', ihre Entfernung durch r und den Punkt auf der Kugel, welcher der Richtung ihrer Verbindungslinie entspricht, mit L, so ist

$$x' = x + r \cos (1) L$$
$$y' = y + r \cos (2) L$$
$$z' = z + r \cos (3) L$$

5. Hieraus folgt leicht, daß man im Allgemeinen hat

$$\cos(1)L^2 + \cos(2)L^2 + \cos(3)L^2 = 1$$

sowie auch, wenn man mit L' irgend einen andern Punkt der Kugel bezeichnet,

$$\cos(1)L\cos(1)L' + \cos(2)L\cos(2)L' + \cos(3)L\cos(3)L' = \cos LL'$$

6. Lehrsatz. Wenn auf der Kugeloberfläche 4 Punkte L L' L'' L''' gegeben sind und der Winkel, welchen die Bögen LL', L''L''' in ihrem Schnittpunkt bilden, mit A bezeichnet wird, so ist

$$\cos LL'' \,.\, \cos L'L''' - \cos LL''' \,.\, \cos L'L'' = \sin LL' \,.\, \sin L''L''' \,.\, \cos A$$

Beweis. Wir bezeichnen den Schnittpunkt auch mit A und setzen

$$AL = t,\ AL' = t',\ AL'' = t'',\ AL''' = t'''$$

so ist

$$\begin{aligned}
\cos LL'' &= \cos t \cos t'' + \sin t \sin t'' \cos A\\
\cos L'L''' &= \cos t' \cos t''' + \sin t' \sin t''' \cos A\\
\cos LL''' &= \cos t \cos t''' + \sin t \sin t''' \cos A\\
\cos L'L'' &= \cos t' \cos t'' + \sin t' \sin t'' \cos A
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\cos LL'' \,.\, \cos L'L''' - \cos LL''' \,.\, \cos L'L''\\
&= \cos A \left\{ \begin{array}{l} \cos t \cos t'' \sin t' \sin t''' + \cos t \cos t''' \sin t \sin t'' - \\ \cos t \cos t''' \sin t' \sin t'' - \cos t' \cos t'' \sin t \sin t''' \end{array} \right\}\\
&= \cos A (\cos t \sin t' - \sin t \cos t')(\cos t'' \sin t''' - \sin t'' \cos t''')\\
&= \cos A \,.\, \sin(t' - t) \sin(t''' - t'')\\
&= \cos A \,.\, \sin LL' \,.\, \sin L''L'''
\end{aligned}$$

Da übrigens von A zwei Äste der größten Kreise ausgehen, so werden hier zwei Winkel gebildet, die sich zu 180^0 ergänzen: aber unsere Analysis zeigt, daß diejenigen Äste zu wählen sind, deren Richtungen mit dem Fortschreiten von L zu L' und von L'' zu L''' übereinstimmen; hieraus folgt zugleich, da die größten Kreise sich in 2 Punkten schneiden, daß es willkührlich ist, welcher gewählt wird. Für den Winkel A kann auch der Bogen zwischen den Polen der größten Kreise gesetzt werden, von welchen LL' und L''L''' Theile sind; es sind jedoch solche Pole zu wählen, welche hinsichtlich dieser Bögen ähnlich liegen, so daß jeder entweder zur Rechten liegt, wenn man von L gegen L' und von L'' gegen L''' fortschreitet, oder zur Linken.

7. L, L', L'' sind drei Punkte auf der Kugeloberfläche; wir setzen der Kürze wegen

$$\begin{aligned}
\cos(1)L &= x \quad \cos(2)L = y \quad \cos(3)L = z\\
\cos(1)L' &= x' \quad \cos(2)L' = y' \quad \cos(3)L' = z'\\
\cos(1)L'' &= x'' \quad \cos(2)L'' = y'' \quad \cos(3)L'' = z''
\end{aligned}$$

$$xy'z'' + x'y''z + x''yz' - xy''z' - x'yz'' - x''y'z = \triangle$$

Es sei λ der Pol des größten Kreises, von dem LL' ein Theil ist, und zwar derjenige, welcher hinsichtlich dieses Bogens ebenso liegt, wie der Punkt (1) hinsichtlich der Bögen (2) (3). Dann ist nach dem obigen Lehrsatz

$$yz' - y'z = \cos(1)\lambda \,.\, \sin(2)(3) \,.\, \sin LL' \quad ,$$

oder, da $(2)(3) = 90^0$

$$\begin{aligned}
yz' - yz' &= \cos(1)\lambda \,.\, \sin LL' \qquad \text{ferner}\\
zx' - z'x &= \cos(2)\lambda \,.\, \sin LL'\\
xy' - x'y &= \cos(3)\lambda \,.\, \sin LL'
\end{aligned}$$

Wenn wir diese Gleichungen der Reihe nach mit x'', y'', z'' multipliciren, so erhalten wir unter Anwendung der zweiten Gleichung in 5.

$$\triangle = \cos \lambda L'' \,.\, \sin LL'$$

Nun sind drei Fälle zu unterscheiden: Erstens, wenn L'' auf demselben größten Kreis liegt, von dem LL' ein Theil ist, so wird $\lambda L'' = 90^0$ mithin $\triangle = o$ sein. Wenn aber L'' außerhalb dieses größten Kreises liegt, so hat man den zweiten Fall, wenn L'' auf derselben Seite wie λ und den dritten, wenn es auf der entgegengesetzten Seite liegt: in diesen Fällen werden die Punkte L, L', L'' ein sphärisches Dreieck bilden und im zweiten Fall in derselben Ordnung, wie die Punkte (1), (2), (3), im dritten in entgegengesetzter Ordnung liegen. Bezeichnet man also die Winkel jenes Dreiecks einfach mit L, L', L'' und das von L'' auf die LL' auf der Kugeloberfläche gefällte Perpendikel mit p, so ist $\sin p = \sin L \,.\, \sin LL'' = \sin L' \,.\, \sin L'L''$ und $\lambda L'' = 90 \mp p$, wo das obere Zeichen für den zweiten und das untere für den dritten Fall gilt. Hieraus schließen wir

$$\pm \triangle = \sin L \,.\, \sin LL' \,.\, \sin LL'' = \sin L' \,.\, \sin LL' \,.\, \sin L''L' = \sin L'' \,.\, \sin LL'' \,.\, \sin L'L''$$

Übrigens ist der erste Fall im zweiten oder dritten enthalten, und es ist leicht einzusehen, daß $\pm \triangle$ der 6fache Inhalt des vom Mittelpunkt der Kugel und den Punkten L, L', L'' gebildeten Tetraeders ist.

Endlich folgern wir noch, daß derselbe Ausdruck $\pm \, {}^1/_6 \triangle$ allgemein den Inhalt irgend eines Tetraeders bedeutet, dessen Ecken der Ursprung und die drei Punkte x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'' sind.

III.

Eine krumme Fläche hat im Punkt A eine stetige Krümmung (curvatura continua), wenn die Richtungen aller von A nach sämmtlichen unendlich nahen Punkten der Fläche gezogenen Geraden von einer und derselben durch A gehenden Ebene unendlich wenig abweichen: diese Ebene berührt die Fläche im Punkt A. Trifft diese Bedingung in irgend einem Punkt nicht zu, so wird die Stetigkeit der Krümmung hier unterbrochen, wie z. B. in der Spitze eines Kegels. Unsere Untersuchungen beschränken sich auf solche krumme Flächen oder Theile derselben, wo eine derartige Unterbrechung nirgends statt findet. Hier bemerken wir nur, daß die Methoden, welche zur Bestimmung der Lage der Tangential Ebene dienen, für singuläre Punkte, wo die Stetigkeit der Krümmung aufhört, unbrauchbar werden und zu unbestimmten Resultaten führen.

IV.

Die Lage der Tangential Ebene wird am zweckmäßigsten aus derjenigen der Geraden bestimmt, welche im Punkt A normal ist, und deßwegen die Normale der Fläche heißt. Wir bestimmen die Richtung dieser Normalen durch den Punkt L auf der Kugel und setzen

$$\cos (1)\, L = X \quad , \quad \cos (2)\, L = Y \quad , \quad \cos (3)\, L = Z$$

x, y, z sind die Coordinaten von A. Es seien ferner $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ die Coordinaten eines andern Punktes A' auf der Fläche; ds dessen unendlich kleiner Abstand von A, endlich λ der Punkt auf der Kugel, welcher der Richtung des Elements AA' entspricht, so wird

$$dx = ds \,.\, \cos (1)\, \lambda \quad , \quad dy = ds \,.\, \cos (2)\, \lambda \quad , \quad dz = ds \,.\, \cos (3)\, \lambda$$

sein, und da $\lambda L = 90^0$,

$$X \cos (1)\, \lambda + Y \cos (2)\, \lambda + Z \cos (3)\, \lambda = o$$

Durch Combination dieser Gleichungen leiten wir ab

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = o$$

Es gibt 2 allgemeine Methoden, um die Beschaffenheit (indoles) einer krummen Fläche zu erforschen. Bei der ersten wird die Gleichung zwischen den Coordinaten x, y, z benützt, von der wir annehmen, daß sie auf die Form $W = o$ gebracht sei, wo W eine Funktion von x, y, z sein wird.

Das vollständige Differential der Funktion W sei

$$d\,W = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

Dann wird auf der krummen Fläche

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = o$$

und daher

$$P \cos (1)\,\lambda + Q \cos (2)\,\lambda + R \cos (3)\,\lambda = o$$

sein. Da diese Gleichung, ebenso wie die obige, auf die Richtungen aller Elemente ds auf der Fläche anwendbar sein muß, so läßt sich leicht erkennen, daß X, Y, Z den Größen P, Q, R proportional sein müssen, und deßwegen wird, da

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

entweder

$$X = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}\; Y = \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}\; Z = \frac{R}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}$$

oder

$$X = \frac{-P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}\; Y = \frac{-Q}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}\; Z = \frac{-R}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}$$

sein. Nach der zweiten Methode werden die Coordinaten als Funktionen von 2 Veränderlichen p und q angesehen. Wir wollen annehmen, daß aus der Differenziation dieser Funktionen die Gleichungen

$$dx = a\,dp + a'\,dq$$
$$dy = b\,dp + b'\,dq$$
$$dz = c\,dp + c'\,dq$$

hervorgehen. Setzen wir diese Werthe in der obigen Formel ein, so erhalten wir

$$(a\,X + b\,Y + c\,Z)\,dp + (a'\,X + b'\,Y + c'\,Z)\,dq = o$$

Da diese Gleichung unabhängig von den Werthen der Differentialien dp, dq sein muß, so ist

$$a\,X + b\,Y + c\,Z = o,\; a'\,X + b'\,Y + c'\,Z = o$$

woraus wir den Schluß ziehen, daß X, Y, Z den Größen

$$bc' - cb' \;,\; ca' - ac' \;,\; ab' - ba'$$

proportional sein müssen. Wenn wir der Kürze wegen

$$\sqrt{(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2} = \triangle$$

setzen, so wird entweder

$$X = \frac{bc' - cb'}{\triangle} \;,\; Y = \frac{ca' - ac'}{\triangle} \;,\; Z = \frac{ab' - ba'}{\triangle}$$

oder $X = \frac{cb' - bc'}{\triangle} \;,\; Y = \frac{ac' - ca'}{\triangle} \;,\; Z = \frac{ba' - ab'}{\triangle}$

sein. Zu diesen zwei allgemeinen Methoden kommt noch eine dritte, wo eine der Coordinaten, z. B. z als Funktion der beiden übrigen gegeben ist.

Diese Methode ist jedoch nichts Anderes als ein spezieller Fall, entweder von der ersten oder zweiten. Denn wenn

$$dz = t\,dx + u\,dy$$

gesetzt wird, so ist entweder

$$X = \frac{-t}{\sqrt{1+t^2+u^2}}, \quad Y = \frac{-u}{\sqrt{1+t^2+u^2}}, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{1+t^2+u^2}}$$

oder

$$X = \frac{t}{\sqrt{1+t^2+u^2}}, \quad Y = \frac{u}{\sqrt{1+t^2+u^2}}, \quad Z = \frac{-1}{\sqrt{1+t^2+u^2}}$$

V.

Die beiden Auflösungen im vorhergehenden Artikel beziehen sich auf entgegengesetzte Punkte der Kugeloberfläche, oder auf entgegengesetzte Richtungen, da es in der Natur der Sache liegt, daß die Normale nach beiden Seiten der krummen Fläche hingezogen werden kann. Da man also 2 der Fläche benachbarte Räume zu unterscheiden hat, einen äußern und einen innern, so wird auch die auf jede Normale bezügliche Lösung nach dem Lehrsatz in Artikel II (7) gefunden werden können, wo zugleich das Kennzeichen zur Unterscheidung des einen Raumes vom andern gegeben ist.

Bei der ersten Methode wird ein solches Kriterium von dem Zeichen der Größe W abhängen. Es wird nämlich im Allgemeinen die Fläche solche Theile des Raums, in welchen W einen positiven Werth hat, von denjenigen trennen, wo W negativ ist. Aus dem angeführten Theorem läßt sich aber leicht schließen, daß wenn der positive Werth von W sich auf den äußern Raum bezieht, und die Normale nach derselben Seite hin gezogen wird, die erstere Lösung zu wählen ist. Übrigens läßt sich in jedem Fall leicht beurtheilen, ob auf der ganzen Fläche dieselbe Regel hinsichtlich des Zeichens von W gilt oder bei verschiedenen Theilen verschiedene Regeln: so lange die Coefficienten P, Q, R endliche Werthe haben, auch nicht alle 3 verschwinden, wird das Gesetz der Stetigkeit einen Wechsel verbieten.

Wenn wir die zweite Methode befolgen, so können wir auf der Fläche zwei Systeme von Curven ziehen, bei dem einen ist p veränderlich, q constant, bei dem andern ist q veränderlich und p constant; die gegenseitige Lage dieser Linien in Beziehung auf den äußern Raum entscheidet darüber, welche von beiden Lösungen zu nehmen ist. So oft nämlich 3 Linien, z. B. ein bei wachsendem p von A ausgehender Ast der Curve des ersten Systems und ebenso ein bei wachsendem q von A ausgehender Ast der Curve des zweiten Systems, und die nach dem äußern Raum gezogene Normale ähnlich liegen wie vom Coordinaten Ursprung aus die Axen der x, y, z (wenn sowohl von den ersteren als auch von den letzteren 3 Linien die erste nach links, die zweite nach rechts und die dritte nach oben gerichtet ist) so gilt die erste Lösung; wenn aber die gegenseitige Lage der 3 ersten Linien derjenigen von den letzteren entgegengesetzt ist, so gilt die zweite Lösung.

Bei der dritten Methode ist zu unterscheiden, ob bei einem positiven Zuwachs von z, wenn x und y unverändert bleiben, der Übergang nach dem äußern oder innern Raum statt findet. Auf den ersten Fall findet die erste Lösung, auf den zweiten die andere Anwendung.

VI.

Ebenso wie beim Übertragen der Richtung der Normalen von der krummen Fläche auf die Kugel jedem einzelnen Punkt der ersten Fläche ein bestimmter Punkt der zweiten entspricht, so wird auch jede Linie oder jede Figur hier — dort eine correspondirende haben. Bei der Betrachtung von 2 sich also gegenseitig entsprechenden Figuren, von welchen die Eine gleichsam das Bild der andern ist, sind zwei Momente zu berücksichtigen; je nachdem bloß die Größe (quantitas, Umfang und Inhalt) oder bloß die Lage ins Auge gefaßt wird.

Das erste Moment bildet die Basis für gewisse Bemerkungen, welche in der Lehre von den krummen Flächen von Nutzen sind. Unter Total Krümmung — curvatura integra — eines ringsum abgeschlossenen Theils der Fläche verstehen wir den Flächeninhalt der correspondirenden sphärischen Figur. Von dieser curvatura integra ist die so zu sagen specifische Krümmung wohl zu unterscheiden, welche wir das Krümmungsmaß — mensura curvaturae — nennen; diese Letztere bezieht sich nur auf einen bestimmten Punkt der Fläche, und ist gleich dem Quotienten, welcher hervorgeht, wenn die curvatura integra des dem Punkte anliegenden Elements der Fläche durch die Fläche (den Inhalt) dieses Elements dividirt wird, sie bezeichnet also das Verhältniß des Inhalts von zwei correspondirenden Flächen Elementen der Kugel und der gegebenen Fläche. Der Nutzen dieser Neuerungen wird, wie wir hoffen, durch das Folgende vollständig documentirt werden. Was jedoch die Terminologie anbelangt, so waren wir vor Allem darauf bedacht, jede Zweideutigkeit auszuschließen, weßhalb wir es nicht für unpassend hielten, die Analogie in der Lehre von den ebenen Curven (wenn sie auch nicht allgemein angenommen ist) streng zu befolgen, wonach unter Krümmungsmaß einfach Krümmung, unter curvatura integra aber Größe, Ausdehnung (amplitudo) zu verstehen ist. Allein wenn es auch auf die Worte nicht so sehr ankommt, wenn nur die Sache selbst nicht gehaltlos ist oder die Ausdrucksweise der umhertastenden Interpretation preisgegeben?

Die Lage einer Figur auf der Kugel kann derjenigen von der correspondirenden Figur auf der Fläche entweder ähnlich oder entgegengesetzt (inversus) sein. Das Erstere findet statt, wenn je 2 Linien auf der Fläche, die von Einem Punkt mit ungleichen aber nicht entgegengesetzten Richtungen ausgehen auf der Kugel durch ähnlich liegende Linien dargestellt werden, so daß also überall das Bild der zur Rechten liegenden Linien auch rechts liegt. Beim zweiten Fall ist das Gegentheil. Diese zwei Fälle werden wir durch das positive oder negative Zeichen des Krümmungsmaßes unterscheiden. Aber diese Unterscheidung wird nur so lange gelten, als wir bei beiden Flächen den Raum bestimmen, in welchem die Figur angenommen wird. Bei der Hülfs-Kugel gilt immer der äußere, dem Centrum abgewendete Raum; bei der krummen Fläche kommt so zu sagen auch der äußere Raum in Betracht oder vielmehr derjenige, in welchen die Normale fällt; es wird nämlich in der Ähnlichkeit der Figuren Nichts geändert, wenn bei der Fläche bald die Figur bald die Normale in den entgegengesetzten Raum gebracht wird, wenn nur ihr Bild immer in demselben Raum auf der Kugel gezeichnet ist.

Das positive oder negative Zeichen, welches für die Lage einer unendlich kleinen Figur dem Krümmungsmaß zukommt, findet auch auf die curvatura integra einer endlichen Figur der Fläche Anwendung. Doch wenn wir den Beweis in seiner ganzen Allgemeinheit führen wollen, so müssen wir einige

Erläuterungen bringen, was wir hier jedoch kurz abmachen können. So lange eine Figur auf der Fläche so verglichen wird, daß den einzelnen innerhalb derselben gelegenen Punkten verschiedene Punkte auf der Kugel entsprechen, so reicht die obige Erklärung aus. Findet aber die angeführte Bedingung nicht statt, so wird es nöthig sein, manche Theile der Figur auf der Kugel zwei oder mehrmal zu zählen, wodurch, bei einer ähnlichen oder entgegengesetzten Lage, entweder Anhäufung (accumulatio) oder Aufhebung (destructio) entstehen kann. In einem solchen Fall wird es am einfachsten sein, die Figur auf der Fläche sich in solche Theile getheilt zu denken, von welchen jeder Einzelne für sich betrachtet jener Bedingung genügt; dann jedem seine curvatura integra zuzutheilen, nach der Größe des Inhalts der entsprechenden sphärischen Figur, mit dem nach der Lage bestimmten Zeichen, und endlich der ganzen Figur, die aus der Addition der den einzelnen Theilen entsprechenden Total Krümmungen hervorgehende curvatura integra zu geben. Im Allgemeinen ist also die curvatura integra der Figur $= \int k\, d\varsigma$, wo $d\varsigma$ das Flächenelement der Figur, k das Krümmungsmaß in irgend einem Punkte bedeutet. Die hauptsächlichsten, auf die geometrische Veranschaulichung dieses Integrals bezüglichen Momente sind folgende. Der Peripherie der Figur auf der Fläche (unter der Einschränkung von Art. III) wird auf der Kugel immer eine in sich selbst zurückkehrende Linie entsprechen. Wenn diese sich nirgends schneidet, so theilt sie die ganze Kugeloberfläche in 2 Theile, wovon der Eine der Figur auf der krummen Fläche entspricht, und dessen, positiv oder negativ zu nehmender, Inhalt, je nachdem er hinsichtlich seiner Peripherie ähnlich liegt, wie die Figur auf der Fläche, oder entgegengesetzt (inverse), der Letzteren curvatura integra angeben wird. Wofern aber jene Linie sich selbst ein oder mehrere mal schneidet, so wird eine complicirte Figur entstehen, deren Inhalt jedoch ebenso genau erhoben werden kann, wie bei Figuren ohne Knoten, und wird dieser, richtig aufgefaßte Inhalt immer den genauen Werth der curvatura integra vorstellen. Doch behalten wir uns eine ausführlichere Auseinandersetzung dieses Beweises hinsichtlich ganz allgemein aufgefaßter Figuren für eine andere Gelegenheit vor.

VII.

Wir wollen jetzt die Formel für das Krümmungsmaß in irgend einem Punkt der krummen Fläche suchen. Bezeichnen wir mit $d\varsigma$ das Element dieser Fläche, so wird $Z\, d\varsigma$ der Inhalt der Projection dieses Elements auf die xy Ebene sein, und ferner, wenn $d\Sigma$ der Inhalt des entsprechenden sphärischen Elements ist, so wird $Z d\Sigma$ die Projection desselben auf die gleiche Ebene vorstellen: das positive oder negative Zeichen von Z gibt die ähnliche oder entgegengesetzte Lage der Projection hinsichtlich des projicirten Elements an: denn diese Projectionen werden in Beziehung auf Größe und Lage unter sich in demselben Verhältniß stehen, wie die Elemente selbst. Wir wollen nun ein dreieckiges Element auf der krummen Fläche betrachten, und annehmen, daß die Coordinaten der drei Eckpunkte seiner Projection

$$\begin{array}{ll} x\ , & y \\ x + dx\ , & y + dy \\ x + \delta x & y + \delta y \end{array}$$

seien. Der doppelte Inhalt dieses Dreiecks wird durch die Formel ausgedrückt

$$dx \,.\, \delta y - dy\, \delta x$$

und zwar in positiver oder negativer Form, je nachdem die Lage der vom ersten zum dritten Punkt gehenden Seite hinsichtlich der vom ersten zum zweiten Punkt gehenden ähnlich oder entgegengesetzt ist der Lage der y Axe gegenüber von der x Axe.

Wenn ferner die Coordinaten der drei Eckpunkte der Projection des sphärischen Elements vom Mittelpunkt der Kugel an gerechnet

$$\begin{array}{ll} X \; , & Y \\ X + dX & Y + dY \\ X + \delta X & Y + \delta Y \end{array}$$

sind, so wird der doppelte Inhalt dieser Projection ausgedrückt durch

$$dX \,.\, \delta Y - dY \,.\, \delta X \quad ,$$

wo über das Zeichen dieselben Bestimmungen gelten, wie oben. Das Krümmungsmaß in diesem Punkt der Fläche wird also sein

$$k = \frac{dX \,.\, \delta Y - dY \,.\, \delta X}{dx \,.\, \delta y - dy \,.\, \delta x}$$

Wenn wir nun voraussetzen, daß die Fläche nach der dritten Art in Art. IV bestimmt ist, so erhält man X und Y in Form von Funktionen der Größen x und y, also

$$dX = \left(\frac{dX}{dx}\right) dx + \left(\frac{dX}{dy}\right) dy$$

$$dX = \left(\frac{dX}{dx}\right) \delta x + \left(\frac{dX}{dy}\right) \delta y$$

$$dY = \left(\frac{dY}{dx}\right) dx + \left(\frac{dY}{dy}\right) dy$$

$$dY = \left(\frac{dY}{dx}\right) \delta x + \left(\frac{dY}{dy}\right) \delta y$$

Nach Einsetzung dieser Werthe geht der obige Ausdruck in folgenden über

$$k = \frac{dX}{dx}\,\frac{dY}{dy} - \frac{dX}{dy}\,\frac{dY}{dx}$$

Indem wir setzen

$$\frac{dz}{dx} = t \quad , \quad \frac{dz}{dy} = u$$

und ferner

$$\frac{d^2z}{dx^2} = T \quad , \quad \frac{d^2z}{dxdy} = U \quad , \quad \frac{d^2z}{dy^2} = V$$

oder

$$dt = Tdx + U\,dy \quad , \quad du = U\,dx + V\,dy$$

so folgt aus den obigen Formeln

$$X = -tZ \quad , \quad Y = -uZ \quad , \quad (1 + t^2 + u^2)\,Z^2 = 1 \quad ,$$

und hieraus

$$dX = -Z\,dt - t\,dZ$$
$$dY = -Z\,du - u\,dZ$$
$$(1 + t^2 + u^2)\,dZ + Z\,(t\,dt + u\,du) = o$$

oder
$$dZ = -Z^3 (t\,dt + u\,du)$$
$$dX = -Z^3 (1 + u^2)\,dt + Z^3\,tu\,du$$
$$dY = -Z^3\,tu\,dt - Z^3 (1 + t^2)\,du$$

somit
$$\frac{dX}{dx} = Z^3 \left\{ -(1 + u^2)\,T + tu\,U \right\}$$
$$\frac{dX}{dy} = Z^3 \left\{ -(1 + u^2)\,U + tu\,V \right\}$$
$$\frac{dY}{dx} = Z^3 \left\{ tu\,T - (1 + t^2)\,U \right\}$$
$$\frac{dY}{dy} = Z^3 \left\{ tu\,U - (1 + t^2)\,V \right\}$$

werden diese Werthe in den vorhergehenden Ausdruck substituirt, so erhält man
$$k = Z^6 (TV - U^2)(1 + t^2 + u^2) = Z^4 (TV - U^2) = \frac{TV - U^2}{(1 + t^2 + u^2)^2}$$

VIII.

Durch zweckmäßige Wahl des Ursprungs und der Axen der Coordinaten kann man leicht bewirken, daß für einen bestimmten Punkt A die Größen t, u, U verschwinden. Es werden nämlich die zwei ersten Bedingungen schon erfüllt, wenn die Berührungsebene in diesem Punkt zugleich die Ebene der Coordinaten x, y ist. Ist nun A zugleich der Ursprung, so wird der Ausdruck für die Coordinaten z diese Form annehmen
$$z = \frac{1}{2} T^0 x^2 + U^0 xy + \frac{1}{2} V^0 y^2 + \Omega\text{*)}$$
wo Ω von höherer Ordnung ist, als von der zweiten. Verändert man die Lage der Axen der x und y um den Winkel M so, daß
$$\operatorname{tg} 2M = \frac{2U^0}{T^0 - V^0}$$
ist, so läßt sich leicht erkennen, daß eine Gleichung von dieser Form
$$z = \frac{1}{2} Tx^2 + \frac{1}{2} Vy^2 + \Omega$$
entstehen wird, wodurch auch der dritten Bedingung Genüge geleistet ist. Hieraus erhellt:

1. Wenn man die krumme Fläche durch eine auf ihr normal stehende

---

*) Wenn man $z = f(x, y)$ nach dem Taylor'schen Satz entwickelt, $f(x + h, y + i) =$
$$z + th + T\frac{h^2}{2} + \ldots$$
$$+ ui + U\,hi + \ldots$$
$$+ V\frac{i^2}{2} + \ldots$$
und $z = t = u = x = y = o$ und $h = x$, $i = y$ setzt, so erhält man obige Formel.

und durch die Axe der x gehende Ebene schneidet, so ist der Krümmungshalbmesser der (ebenen) Schnittkurve $= \pm \frac{1}{T}$; das positive oder negative Vorzeichen zeigt an, daß die Fläche gegen die Seite hin, wo die Coordinaten z positiv genommen sind, concav oder convex ist.

2. Desgleichen wird $\frac{1}{V}$ gleich dem Krümmungshalbmesser der Schnittcurve sein, welche in einer durch die y Axe gehenden Normalebene liegt.

3. Setzt man $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, so ist

$$z = \frac{1}{2} \left(T \cos \varphi^2 + V \sin \varphi^2 \right) r^2 + \Omega$$

woraus folgt, daß wenn der Normalschnitt mit der Axe der x einen Winkel φ bildet, der Krümmungshalbmesser in A

$$= \frac{1}{T \cos \varphi^2 + V \sin \varphi^2}$$

ist.

So oft $T = V$ ist, werden die Krümmungshalbmesser in sämmtlichen Normal-Ebenen gleich sein. Sind aber T und V ungleich, so ist einleuchtend, da $T \cos \varphi^2 + V \sin \varphi^2$ für irgend einen Werth von φ zwischen T und V fällt, daß die Krümmungshalbmesser der in 1 und 2 betrachteten Hauptschnitte das Maximum und Minimum der Krümmung angeben, wenn T und V mit demselben Zeichen behaftet sind, und daß im andern Fall der Eine dem Maximum der Concavität und der andere dem Maximum der Convexität entspricht. Diese Betrachtungen enthalten ungefähr Alles, was Euler über die Krümmung der Flächen zuerst lehrte.

5. Das Krümmungsmaß nimmt im Punkt A den sehr einfachen Ausdruck $k = T \,.\, V$ an, woraus folgt:

Lehrsatz. Das Krümmungsmaß in irgend einem Punkt einer Fläche ist gleich einem Bruch, dessen Zähler die Einheit, dessen Nenner aber das Produkt der beiden äußersten Krümmungshalbmesser der Normalschnitte ist.

Zugleich erhellt, daß das Krümmungsmaß positiv wird, für die concav concaven oder convex convexen Flächen (welche Unterscheidung nicht wesentlich ist), negativ aber für die concav-convexen. Wenn eine Fläche aus Theilen von jeder Gattung besteht, so wird auf der Grenze das Krümmungsmaß verschwinden. Über die Natur derjenigen Flächen, wo das Krümmungsmaß überall verschwindet, werden wir weiter unten sprechen.

IX.

Die allgemeine Formel für das Krümmungsmaß, welche am Schluß des Artikels VII aufgestellt wurde, ist unter allen die einfachste, weil sie nur 5 Elemente enthält; zu einer complicirteren, mit 9 Elementen, gelangen wir, wenn wir die erste Methode zur Untersuchung der Flächen anwenden. Indem wir die Bezeichnungen des Artikel IV beibehalten, wollen wir folgende weitere einführen:

$$\frac{d^2W}{dx^2} = P' \ , \quad \frac{d^2W}{dy^2} = Q' \ , \quad \frac{d^2W}{dz^2} = R'$$

$$\frac{d^2W}{dydz} = P'' \ , \quad \frac{d^2W}{dxdz} = Q'' \ , \quad \frac{d^2W}{dxdy} = R''$$

so daß

$$dP = P'dx + R''dy + Q''dz$$
$$dQ = R''dx + Q'dy + P''dz$$
$$dR = Q''dx + P''dy + R'dz$$

da aber $t = -\frac{P}{R}$, so erhält man durch Differentiation

$$R^2dt = -RdP + PdR = (PQ'' - RP')\,dx + (PP'' - RR'')\,dy + (PR' - RQ'')\,dz$$

oder, wenn man dz mit Hülfe von $Pdx + Qdy + Rdz = o$ eliminirt,

$$R^3dt = (-R^2P' + 2PRQ'' - P^2R')\,dx + (PRP'' + QRQ'' - PQR' - R^2R'')\,dy$$

Auf ähnliche Weise findet man

$$R^3du = (PRP'' + QRQ'' - PQR' - R^2R'')\,dx + (-R^2Q' + 2QRP'' - Q^2R')\,dy$$

Hieraus schließen wir

$$R^3T = -R^2P' + 2PRQ'' - P^2R'$$
$$R^3U = PRP'' + QRQ'' - PQR' - R^2R''$$
$$R^3V = -R^2Q' + 2QRP'' - Q^2R'$$

Durch Substitution dieser Werthe in die Formel Art. VII erhalten wir für das Krümmungsmaß folgenden symmetrischen Ausdruck:

$$(P^2 + Q^2 + R^2)^2\,k$$
$$= P^2(Q'R' - P''^2) + Q^2(P'R' - Q''^2) + R^2(P'Q' - R''^2)$$
$$+ 2QR(Q''R'' - P'P'') + 2PR(P''R'' - Q'Q'') + 2PQ(P''Q'' - R'R'')$$

X.

Eine noch complicirtere, nämlich aus 15 Elementen zusammengesetzte Formel erhalten wir, wenn wir die zweite zur Erforschung der Eigenschaften von den Flächen dienende Methode anwenden. Allein es ist von großem Werth, auch diese auszuarbeiten. Indem wir die Bezeichnungen des Art. IV beibehalten, setzen wir weiter

$$\frac{d^2x}{dp^2} = \alpha \ , \quad \frac{d^2x}{dpdq} = \alpha' \ , \quad \frac{d^2x}{dq^2} = \alpha'' \ ,$$

$$\frac{d^2y}{dp^2} = \beta \ , \quad \frac{d^2y}{dpdq} = \beta' \ , \quad \frac{d^2y}{dq^2} = \beta'' \ ,$$

$$\frac{d^2z}{dp^2} = \gamma \ , \quad \frac{d^2z}{dpdq} = \gamma' \ , \quad \frac{d^2z}{dq^2} = \gamma'' \ ,$$

ferner sei zur Abkürzung

$$bc' - cb' = A \ ,$$
$$ca' - ac' = B \ ,$$
$$ab' - ba' = C \ .$$

Nun ist zunächst

$$Adx + Bdy + Cdz = o$$

oder

$$dz = -\frac{A}{C}dx - \frac{B}{C}dy$$

In Betracht, daß also z als Funktion von x und y angesehen werden kann, ist

$$\frac{dz}{dx} = t = -\frac{A}{C}$$

$$\frac{dz}{dy} = u = -\frac{B}{C}$$

Ferner schließen wir aus $dx = adp + a'dq$, $dy = bdp + b'dq$

$$Cdp = b'dx - a'dy$$

$$Cdq = - bdx + ady$$

Hieraus erhalten wir die vollständigen Differentiale von t, u

$$C^3dt = \left(A\frac{dC}{dp} - C\frac{dA}{dp}\right)(b'dx - a'dy) + \left(C\frac{dA}{dq} - A\frac{dC}{dq}\right)(bdx - ady) \ ,$$

$$C^3du = \left(B\frac{dC}{dp} - C\frac{dB}{dp}\right)(b'dx - a'dy) + \left(C\frac{dB}{dq} - B\frac{dC}{dq}\right)(bdx - ady) \ ,$$

Wenn wir nun in diesen Formeln substituiren

$$\frac{dA}{dp} = c'\beta + b\gamma' - c\beta' - b'\gamma$$

$$\frac{dA}{dq} = c'\beta' + b\gamma'' - c\beta'' - b'\gamma'$$

$$\frac{dB}{dp} = a'\gamma + c\alpha' - a\gamma' - c'\alpha$$

$$\frac{dB}{dq} = a'\gamma' + c\alpha'' - a\gamma'' - c'\alpha'$$

$$\frac{dC}{dp} = b'\alpha + a\beta' - b\alpha' - a'\beta$$

$$\frac{dC}{dq} = b'\alpha' + a\beta'' - b\alpha'' - a'\beta'$$

und erwägen, daß die Werthe der hieraus abgeleiteten Differentiale dt, du, gleich sein müssen, unabhängig von den Differentialen dx, dy, den Ausdrücken $Tdx + Udy$, $Udx + Vdy$, so finden wir nach einigen nahe liegenden Transformationen

$$C^3T = b'^2(\alpha A + \beta B + \gamma C) - 2bb'(\alpha' A + \beta' B + \gamma' C) + b^2(\alpha'' A + \beta'' B + \gamma'' C)$$

$$C^3U = - a'b'(\alpha A + \beta B + \gamma C) + (ab' + ba')(\alpha' A + \beta' B + \gamma' C) - ab(\alpha'' A + \beta'' B + \gamma'' C)$$

$$C^3V = a'^2(\alpha A + \beta B + \gamma C) - 2aa'(\alpha' A + \beta' B + \gamma' C) + a^2(\alpha'' A + \beta'' B + \gamma'' C)$$

Setzen wir nun zur Abkürzung

(1) $A\alpha + B\beta + C\gamma = D$

(2) $A\alpha' + B\beta' + C\gamma' = D'$

(3) $A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma'' = D''$

so ist $$C^3T = b'^2 (D - 2D' + D'')$$
$$C^3U = - a'b' D + (ab' + ba') D' - ab D''$$
$$C^3V = a'^2 D - 2aa' D' + a^2 D''$$

Hieraus ergibt sich

$$C^6 (TV - U^2) = (DD'' - D'^2)(ab' - ba')^2 = (DD'' - D'^2) C^2$$

und für das Krümmungsmaß

$$k = \frac{DD'' - D'^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2}$$

XI.

An die Stelle der zuletzt angegebenen Formel wollen wir eine andere setzen, die zu den fruchtbarsten Theoremen in der Lehre von den krummen Flächen gehört. Wir führen folgende Bezeichnungen ein

$$a^2 + b^2 + c^2 = E$$
$$aa' + bb' + cc' = F$$
$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = G$$
$$(4) \quad a\alpha + b\beta + c\gamma = m$$
$$(5) \quad a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = m'$$
$$(6) \quad a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' = m''$$
$$(7) \quad a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = n$$
$$(8) \quad a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' = n'$$
$$(9) \quad a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma'' = n''$$
$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2 = \triangle$$

Durch Elimination der Größen β, γ aus den Gleichungen (1), (4), (7), indem man sie mit $(bc' - cb')$, $(b'C - c'B)$, $(cB - bC)$ multiplicirt und addirt, erhält man

$$\alpha \left\{ A (bc' - cb') + a (b'C - c'B) + a' (cB - bC) \right\}$$
$$= D (bc' - cb') + m (b'C - c'B) + n (cB - bC)$$

welche Gleichung sich leicht in folgende umwandeln läßt

$$AD = \alpha \triangle + a (nF - mG) + a' (mF - nE)$$

Die Elimination von α, γ oder α, β führt auf analoge Weise zu

$$BD = \beta \triangle + b (nF - mG) + b' (mF - nE)$$
$$CD = \gamma \triangle + c (nF - mG) + c' (mF - nE)$$

Wenn wir diese 3 Gleichungen durch α'', β'', γ'' multipliciren und addiren, so erhalten wir

$$(10) \quad DD'' = (\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'') \triangle + m'' (nF - mG) + n'' (mF - nE)$$

Auf ähnliche Art folgt aus den Gleichungen (2), (5), (8)

$$AD' = \alpha' \triangle + a (n'F - m'G) + a' (m'F - n'E)$$
$$BD' = \beta' \triangle + b (n'F - m'G) + b' (m'F - n'E)$$
$$CD' = \gamma' \triangle + c (n'F - m'G) + c' (m'F - n'E)$$

Durch Multiplication mit α', β', γ' und nachherige Addition

$$D'^2 = (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2) \triangle + m' (n'F - m'G) + n' (m'F - n'E)$$

Die Combination dieser Gleichung mit (10) liefert

$$DD'' - D'^2 = (\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' - \alpha'^2 - \beta'^2 - \gamma'^2)\triangle^{*)}$$
$$+ E(n'^2 - nn'') + F(nm'' - 2m'n' + mn'') + G(m'^2 - mm'')$$

Nun ist

$$\frac{dE}{dp} = 2m\,,\ \frac{dE}{dq} = 2m'\,,\ \frac{dF}{dp} = m' + n\,,\ \frac{dF}{dq} = m'' + n'\,,$$
$$\frac{dG}{dp} = 2n'\,,\ \frac{dG}{dq} = 2n''$$

oder

$$m = \frac{1}{2}\frac{dE}{dp}\,,\ m' = \frac{1}{2}\frac{dE}{dq}\,,\ m'' = \frac{dF}{dq} - \frac{1}{2}\frac{dG}{dp}$$
$$n = \frac{dF}{dp} - \frac{1}{2}\frac{dE}{dq}\,,\ n' = \frac{1}{2}\frac{dG}{dp}\,,\ n'' = \frac{1}{2}\frac{dG}{dq}$$

Ferner läßt sich leicht beweisen, daß

$$\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' - \alpha'^2 - \beta'^2 - \gamma'^2 = \frac{dn}{dq} - \frac{dn'}{dp} = \frac{dm''}{dp} - \frac{dm'}{dq}$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{d^2E}{dq^2} + \frac{d^2F}{dpdq} - \frac{1}{2}\frac{d^2G}{dp^2}$$

Setzen wir diese verschiedenen Ausdrücke in die Formel für das Krümmungsmaß am Schluß des vorhergehenden Artikels, so gelangen wir zu folgender Gleichung, welche nur die Größen E, F, G und ihre Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung enthält.

---

*) Durch Anwendung von Determinanten kann die Formel für $DD'' - D'^2$ leicht entwickelt werden. Man hat nämlich (X) (1)

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & a & a' \\ \beta & b & b' \\ \gamma & c & c' \end{vmatrix} \qquad D'' = \begin{vmatrix} \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$$

$$D' = \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha' & a & a' \\ \beta' & b & b' \\ \gamma' & c & c' \end{vmatrix}$$

also nach dem Multiplications-Theorem für Determinanten

$$DD'' = \begin{vmatrix} \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' & a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' & a'\alpha'' + b'\beta'' + c\gamma'' \\ \alpha a + \beta b + \gamma c & aa + bb + cc & a'a + b'b + cc \\ \alpha a' + \beta b' + \gamma c' & aa' + bb' + cc' & a'a' + b'b' + cc' \end{vmatrix}$$

$$D'^2 = \begin{vmatrix} \alpha'\alpha' + \beta'\beta' + \gamma'\gamma' & \alpha'a + \beta'b + \gamma'c & \alpha'a' + \beta'b' + \gamma'c' \\ a\alpha' + b\beta' + c\gamma' & aa + bb + cc & aa' + bb' + cc' \\ a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' & a'a + b'b + c'c & a'a' + b'b' + c'c' \end{vmatrix}$$

oder

$$DD'' = \begin{vmatrix} \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' & m'' & n'' \\ m & E & F \\ n & F & G \end{vmatrix}$$

$$D'^2 = \begin{vmatrix} \alpha'\alpha' + \beta'\beta' + \gamma'\gamma' & m' & n' \\ m' & E & F \\ n' & F & G \end{vmatrix}$$

$$4(EG - F^2)^2 k = E\left\{\frac{dE}{dq}\frac{dG}{dq} - 2\frac{dF}{dp}\frac{dG}{dq} + \left(\frac{dG}{dp}\right)^2\right\}$$
$$+ F\left(\frac{dE}{dp}\frac{dG}{dq} - \frac{dE}{dq}\frac{dG}{dp} - 2\frac{dE}{dq}\frac{dF}{dq} + 4\frac{dF}{dp}\frac{dF}{dq} - 2\frac{dF}{dp}\frac{dG}{dp}\right)$$
$$+ G\left\{\frac{dE}{dp}\frac{dG}{dp} - 2\frac{dE}{dp}\frac{dF}{dq} + \left(\frac{dE}{dq}\right)^2\right\} - 2(EG - F^2)\left(\frac{d^2E}{dq^2} - 2\frac{d^2F}{dpdq} + \frac{d^2G}{dp^2}\right)$$

XII.

Da ganz allgemein

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = E\,dp^2 + 2\,F\,dpdq + G\,dq^2$$

ist, so leuchtet ein, daß $\sqrt{E\,dp^2 + 2\,F\,dpdq + G\,dg^2}$ der allgemeine Ausdruck für das Element einer Linie auf einer krummen Fläche ist. Unsere im vorhergehenden Artikel ausgeführte Analysis zeigt also, daß zur Angabe des Krümmungsmaßes nicht bestimmte Formeln nöthig sind, welche die Coordinaten x, y, z wie auch die Funktionen der unbestimmten Größen p, q darstellen, sondern daß der allgemeine Ausdruck für die Größe irgend eines Linienelements genügt. Wir wollen zu einigen Anwendungen dieses höchst wichtigen Satzes übergehen.

Wir nehmen an, es lasse sich unsere krumme Fläche auf irgend eine andere, krumme oder ebene, abwickeln (explicari), so daß irgend einem durch die Coordinaten x, y, z bestimmten Punkt der ersten Fläche ein bestimmter Punkt der zweiten Fläche entspricht, dessen Coordinaten x', y', z' sind. Es werden also x', y', z' auch als Funktionen der unbestimmten Größen p und q betrachtet werden können und man wird für das Element $\sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}$ diesen Ausdruck erhalten

$$\sqrt{E'\,dp^2 + 2\,F'\,dpdq + G'\,dq^2}$$

E', F', G' sind auch Funktionen derselben Größen p, q. Aus unserer Erklärung über die Abwicklung (explicatio) von Fläche auf Fläche folgt, daß die korrespondirenden Elemente in beiden Flächen nothwendigerweise gleich sind, daß man also identisch hat

$$E = E' \quad , \quad F = F' \quad , \quad G = G' \quad ,$$

also führt die Formel des vorhergehenden Artikels sofort zu dem ausgezeichneten Theorem: *Wenn eine krumme Fläche auf irgend eine andere Fläche abgewickelt wird, so bleibt das Krümmungsmaß in den einzelnen Punkten unverändert.*

Ferner wird ein begrenzter Theil der krummen Fläche nach der Abwicklung auf eine andere Fläche dieselbe curvatura integra beibehalten.

Einen speciellen Fall, auf welchen die Mathematiker bis jetzt ihre Untersuchungen beschränkt haben, bilden die auf eine Ebene abwickelbaren Flächen. Unsere Theorie lehrt sofort, daß das Krümmungsmaß solcher Flächen in jedem Punkt $= 0$ sein muß, es wird also, wenn ihre Eigenschaften nach der dritten Methode ausgedrückt werden, überall die Gleichung stattfinden

$$\frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2 = 0 \quad ,$$

welches Kriterium, obwohl schon früher bekannt, nach unserem Urtheil wenigstens, meistens nicht mit der wünschenswerthen Strenge bewiesen wurde.

XIII.

Was wir im vorigen Artikel auseinandersetzten, hängt mit der eigenthümlichen Betrachtungsweise der Flächen zusammen, welche in hohem Grade würdig ist, von den Mathematikern sorgfältig ins Auge gefaßt zu werden. Wenn nämlich eine Fläche nicht sowohl als die Grenze des Körperlichen, sondern vielmehr selbst als Körper aufgefaßt wird, von welchem Eine Dimension als verschwindend zu betrachten ist, der zwar biegsam aber nicht ausdehnbar ist, so hängen die Eigenschaften der Fläche zum Theil von der Form ab, auf welche sie reducirt werden kann, zum Theil sind sie absolut und bleiben unveränderlich, in welche Gestalt auch die Fläche gelangen wird. Zu diesen letzteren, deren Erforschung für die Geometrie ein neues und fruchtbares Feld eröffnet, gehört das Krümmungsmaß und die curvatura integra in dem von uns für diese Ausdrücke angenommenen Sinn; außerdem gehört hieher die Lehre von den kürzesten Linien, sowie noch mehreres Andere, wovon wir später uns zu handeln vornehmen. Bei dieser Betrachtungsweise werden eine Ebene, und eine auf eine Ebene abwickelbare, z. B. eine cylindrische, kegelförmige Fläche, als im Wesentlichen identisch angesehen werden müssen, und die der Natur der Sache entsprechende Art, die Eigenschaften einer so betrachteten Fläche allgemein auszudrücken, wird immer in der Formel $\sqrt{Edp^2 + 2\,F\,dpdq + G\,dq^2}$ wurzeln, welche den Zusammenhang des Linien-Elements mit den zwei unbestimmten Veränderlichen p und q angibt. Allein ehe wir diesen Gegenstand weiter verfolgen, ist es nöthig, die Grundzüge der Theorie von den kürzesten Linien auf den Flächen vorauszuschicken.

XIV.

Die Eigenschaften einer Curve im Raum werden im Allgemeinen dadurch bestimmt, daß man die ihren einzelnen Punkten entsprechenden Coordinaten x, y, z in Form von Funktionen Einer Veränderlichen, die wir mit w bezeichnen, ausdrückt. Die Länge einer solchen Linie von einem beliebigen Anfangspunkt aus bis zum Punkt (x, y, z) wird durch das Integral

$$\int dw \sqrt{\left(\frac{dx}{dw}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dw}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dw}\right)^2}$$

ausgedrückt. Wenn wir annehmen, daß die Lage der Linie unendlich wenig variire, so daß die Coordinaten der einzelnen Punkte die Variationen δx, δy, δz annehmen, so findet man die Variation der ganzen Länge

$$= \int \frac{dx\,.\,d\delta x + dy\,.\,d\delta y + dz\,.\,d\delta z}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$

welchen Ausdruck wir in diese Form bringen

$$\frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} -$$

$$- \int \left\{ \delta x\,.\,d\,\frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} + \delta y\,.\,d\,\frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} + \delta z\,.\,d\,\frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} \right\}$$

In dem Fall, wo die Linie eine kürzeste ist zwischen ihren Endpunkten, muß der Ausdruck unter dem Integralzeichen verschwinden. Insofern als die Linie auf der Fläche liegt, deren Differentialgleichung

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = o$$

ist, müssen die Variationen δx, δy, δz auch der Gleichung

$$P\,\delta x + Q\,\delta y + R\,\delta z = o$$

genügen; hieraus schließt man leicht, daß die Differentiale

$$d\frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}},\ d\frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}},\ d\frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$

beziehungsweise den Größen P, Q, R proportional sein müssen. Nun sei dr ein Element der Curve, λ der Punkt auf der Kugel, welcher der Richtung dieses Elements entspricht, und L ein zweiter Punkt auf der Kugel, entsprechend der Flächennormale; endlich seien ξ, η, ζ die Coordinaten von λ, X, Y, Z diejenigen von L, beide vom Mittelpunkt der Kugel aus gerechnet, also wird

$$dx = \xi\,dr \quad , \quad dy = \eta\,dr \quad , \quad dz = \zeta\,dr$$

sein, woraus wir schließen, daß jene Differentiale gleich $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ sind. Und da die Größen P, Q, R proportional X, Y, Z sind, so ist die kürzeste Linie durch die Gleichungen

$$\frac{d\xi}{X} = \frac{d\eta}{Y} = \frac{d\zeta}{Z}$$

charakterisirt. Übrigens ist leicht zu erkennen, daß $\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}$ dem Bogen auf der Kugel gleich ist, der den Winkel zwischen den Richtungen der Tangenten im Anfang und am Ende des Elements dr mißt, und also gleich $\frac{dr}{\varrho}$ ist, wenn ϱ den Krümmungshalbmesser in diesem Punkt der kürzesten Linie bedeutet; somit ist

$$\varrho\,d\xi = X\,dr \quad , \quad \varrho\,d\eta = Y\,dr \quad , \quad \varrho\,d\zeta = Z\,dr.$$

XV.

Wir wollen annehmen, daß auf der Fläche von einem gegebenen Punkt A aus unendlich viele kürzeste Linien gehen, welche wir durch den Winkel unterscheiden, den das erste Element einer einzelnen mit dem ersten Element von derjenigen unter diesen Linien bildet, die wir als erste betrachten; es sei φ dieser Winkel, oder allgemeiner eine Funktion desselben, ferner r die Länge einer solchen kürzesten Linie von A bis zu demjenigen Punkt, dessen Coordinaten x, y, z sind. Da den so bestimmten Werthen der Veränderlichen r, φ bestimmte Punkte der Fläche entsprechen, so können die Coordinaten x, y, z gleichfalls angesehen werden als Funktionen von r, φ. Die Buchstaben λ, L, ξ, η, ζ, X, Y, Z haben dieselbe Bedeutung, wie im vorhergehenden Artikel und beziehen sich auf einen beliebigen Punkt irgend einer kürzesten Linie.

Alle kürzesten Linien von gleicher Länge r endigen in einer andern Linie, deren von einem beliebigen Anfangspunkt aus gezählte Längen wir mit v bezeichnen wollen. Es wird also v auch als Funktion von r, φ betrachtet werden können, und wenn wir den Punkt auf der Kugel, welcher der Richtung des

Elements dv entspricht, mit λ bezeichnen, ferner durch ξ', η', ζ' die vom Mittelpunkt der Kugel aus gerechneten Coordinaten dieses Punkts, so wird

$$\frac{dx}{d\varphi} = \xi' \cdot \frac{dv}{d\varphi}, \quad \frac{dy}{d\varphi} = \eta' \cdot \frac{dv}{d\varphi}, \quad \frac{dz}{d\varphi} = \zeta' \cdot \frac{dv}{d\varphi} \text{ sein.}$$

Hieraus und aus

$$\frac{dx}{dr} = \xi, \quad \frac{dy}{dr} = \eta, \quad \frac{dz}{dr} = \zeta, \text{ folgt}$$

$$\frac{dx}{dr} \cdot \frac{dx}{d\varphi} + \frac{dy}{dr} \cdot \frac{dy}{d\varphi} + \frac{dz}{dr} \cdot \frac{dz}{d\varphi} = (\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta') \frac{dv}{d\varphi} = \cos \lambda\lambda' \cdot \frac{dv}{d\varphi}$$

Das erste Glied dieser Gleichung, welches auch eine Funktion von r, φ ist, bezeichnen wir mit S; die Differentiation nach r ergibt

$$\frac{dS}{dr} = \frac{d^2x}{dr^2} \cdot \frac{dx}{d\varphi} + \frac{d^2y}{dr^2} \cdot \frac{dy}{d\varphi} + \frac{d^2z}{dr^2} \cdot \frac{dz}{d\varphi} + \frac{1}{2} \frac{d\left\{\left(\frac{dx}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right\}}{d\varphi}$$

$$= \frac{d\xi}{dr} \cdot \frac{dx}{d\varphi} + \frac{d\eta}{dr} \cdot \frac{dy}{d\varphi} + \frac{d\zeta}{dr} \cdot \frac{dz}{d\varphi} = \frac{1}{2} \frac{d(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}{d\varphi}$$

Aber $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$, also ist das Differential = o, und zufolge des vorhergehenden Artikels ist, wenn ϱ den Krümmungshalbmesser der Linie r bedeutet,

$$\frac{d\xi}{dr} = \frac{X}{\varrho}, \quad \frac{d\eta}{dr} = \frac{Y}{\varrho}, \quad \frac{d\zeta}{dr} = \frac{Z}{\varrho} \text{ somit}$$

$$\frac{dS}{dr} = \frac{1}{\varrho}(X\xi' + Y\eta' + Z\zeta') \frac{dv}{d\varphi} = \frac{1}{\varrho} \cdot \cos L\lambda' \cdot \frac{dv}{d\varphi} = o$$

da λ' auf dem größten Kreis liegt, dessen Pol L ist. Hieraus schließen wir also, daß S unabhängig von r und somit nur eine Funktion von φ ist. Da für r = o auch v = o ist und somit auch $\frac{dv}{d\varphi} = o$, so muß S auch unabhängig von φ sein. Somit muß S = o sein und auch $\cos \lambda\lambda' = o$, das heißt $\lambda\lambda' = 90^0$. Hieraus folgern wir das Theorem: Wenn auf einer krummen Fläche von einem und demselben Anfangspunkt aus unzählig viele kürzeste Linien von gleicher Länge gezogen werden, so schneiden sie die Verbindungslinie ihrer Endpunkte rechtwinklig.

Wir halten es für unsere Hauptaufgabe, in erster Linie dieses Theorem aus der Fundamental-Eigenschaft der kürzesten Linien abzuleiten; übrigens läßt sich dasselbe auch ohne Rechnung durch folgende Betrachtung verständlich machen. Es seien AB, AB' zwei kürzeste Linien gleicher Länge, welche bei A einen unendlich kleinen Winkel einschließen; wir wollen annehmen, daß einer von den 2 Winkeln, welche das Element BB' mit den Linien BA und B'A einschließt, um eine endliche Größe von 90^0 abweicht, so wird nach dem Gesetz der Stetigkeit der Eine von diesen Winkeln größer, der Andere kleiner als ein Rechter sein. Ist der Winkel bei $B = 90^0 - \omega$, so können wir auf der Linie BA einen Punkt C annehmen, so daß $BC = BB' \cdot \operatorname{cosec} \omega$ ist; daraus folgt, da das unendlich kleine Dreieck BB'C als eben angesehen werden kann, daß $CB' = BC \cdot \cos \omega$ sein wird, und also

$AC + CB' = AC + BC \,.\, \cos\omega = AB - BC \,.\, (1 - \cos\omega) = AB' - BC\,(1 - \cos\omega)$, d. h. der Übergang vom Punkt A nach B' über den Punkt C ist kürzer als die kürzeste Linie.

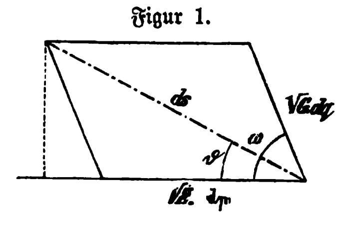
XVI.

Dem Theorem des vorhergehenden Artikels wollen wir ein anderes anschließen, das sich also fassen läßt: Wenn auf einer krummen Fläche irgend eine Linie gegeben ist, von deren einzelnen Punkten nach derselben Seite hin unzählig viele gleich lange kürzeste Linien hingezogen sind, so schneiden letztere die Verbindungslinie ihrer Endpunkte rechtwinklig. Beim Beweis darf in der vorhergehenden Analysis nur das geändert werden, daß φ die Länge der gegebenen Curve von einem beliebigen Punkt an gerechnet, oder auch eine Funktion dieser Länge bedeutet; es werden dann alle Rechnungen noch Geltung haben, nur mit der Modification, daß die Richtigkeit der Gleichung $S = o$ für $r = o$ in dieser Hypotese inbegriffen ist. Übrigens ist das zweite Theorem allgemeiner als das vorhergehende, indem Letzteres insofern ein specieller Fall des Ersten ist, wenn man an die Stelle der gegebenen Linie einen um A als Mittelpunkt beschriebenen unendlich kleinen Kreis setzt. Endlich wollen wir darauf aufmerksam machen, daß hier die Analysis auch durch geometrische Betrachtungen ersetzt werden kann, die wir jedoch als sehr nahe liegend übergehen.

XVII.

Wir kommen nun zu der Formel $\sqrt{E\,dp^2 + 2\,F\,dp\,dq + G\,dq^2}$ zurück, welche ganz allgemein die Größe des Linien-Elements auf einer krummen Fläche ausdrückt, und vor Allem wollen wir die geometrische Bedeutung der Coefficienten E, F, G untersuchen. Schon im Artikel V erinnerten wir daran, daß auf einer Fläche zwei Systeme von Linien angenommen werden können, das eine, in dessen einzelnen Punkten nur p veränderlich, aber q constant ist, das andere, bei dem q veränderlich und p constant ist. Jeder Punkt der Fläche kann betrachtet werden als der Durchschnitt einer Linie des ersten Systems mit einer Linie des zweiten, also wird das von diesem Punkt ausgehende und der Variation dp entsprechende Element der ersten Linie $= \sqrt{E}\,.\,dp$ und das Element der zweiten, welches der Variation dq entspricht $= \sqrt{G}\,.\,dq$ sein; wenn man endlich den Winkel zwischen diesen Elementen durch ω bezeichnet, so läßt sich leicht beweisen, daß man hat $\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}$. Der Inhalt hingegen des Parallelogramms, welches von zwei Linien q und q + dq des ersten Systems und von zwei andern p und p + dp des zweiten Systems gebildet wird, wird $\sqrt{EG - G^2}\,dp\,dq$ sein.

Figur 1.



Irgend eine zu keinem jener Systeme gehörende Linie auf einer Fläche wird erzeugt, wenn p und q als Funktion einer neuen Variabeln aufgefaßt werden, oder die eine als Funktion der andern. Es sei s die Länge einer solchen Curve von einem beliebigen Anfangspunkt an gerechnet und nach irgend

einer Richtung als positiv angenommen. Wir bezeichnen den Winkel, welchen das Element $ds = \sqrt{E\,dp^2 + 2\,F\,dp\,dq + G\,dq^2}$ mit einer Linie des ersten Systems bildet, welche durch den Anfangspunkt des Elements geht, durch ϑ, und damit keine Zweideutigkeit zurückbleibt, bestimmen wir, daß dieser Winkel immer mit demjenigen Ast jener Linie gebildet wird, auf welchem p wächst und nach derjenigen Seite hin als positiv angenommen wird, gegen welche die Werthe von q wachsen. Alsdann findet man ohne Mühe folgende Relationen:

$$\cos\vartheta\,. = \sqrt{E}\,.\,dp + \sqrt{G}\,.\cos\omega\,dq = \frac{E\,dp + F\,dq}{\sqrt{E}}$$

$$\sin\vartheta\,.\,ds = \sqrt{G}\,.\sin\omega\,dq = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}}\,dq\quad.$$

XVIII.

Untersuchen wir nun, welches die Bedingung ist, damit diese Linie eine kürzeste sei. Da ihre Länge s durch das Integral

$$s = \sqrt{E\,dp^2 + 2\,F\,dp\,dq + G\,dq^2}$$

gegeben ist, so erfordert die Bedingung des Minimums, daß die Variation dieses Integrals, welche von einer unendlich kleinen Veränderung der Gestalt der Linie (tractus lineae) herrührt, = o sei. Für unsern Zweck wird in diesem Fall die Rechnung bequemer ausgeführt, wenn wir p als Funktion von q selbst betrachten. Wenn wir nun die Variation durch den Buchstaben δ bezeichnen, so haben wir

$$\delta s = \int \frac{1}{2ds}\left\{\left(\frac{dE}{dp}\,dp^2 + \frac{2\,dF}{dp}\,dp\,.\,dq + \frac{dG}{dp}\,dq^2\right)\delta p + (2\,E\,dp + 2\,F\,dq)\,d\,\delta p\right\}$$

$$= \frac{Edp + Fdq}{ds}\,\delta p + \int \frac{1}{2ds}\left(\frac{dE}{dp}\,dp^2 + \frac{2dF}{dp}\,dp\,dq + \frac{dG}{dp}\,dq^2\right)\delta p - d\,\frac{Edp + Fdq}{ds}\,\delta p$$

Da nun der Ausdruck unter dem Integralzeichen unabhängig von δp verschwinden muß, so ist

$$\frac{dE}{dp}dp^2 + \frac{2\,dF}{dp}dp\,dq + \frac{dG}{dp}dq^2 = 2\,ds\,.\,d\,\frac{Edp + Fdq}{ds} = 2\,ds\,d\sqrt{E}\,\cos\vartheta$$

$$= \frac{ds\,.\,dE\,.\cos\vartheta}{\sqrt{E}} - 2\,ds\,.\,d\vartheta\,.\sqrt{E}\,.\sin\vartheta = \frac{Edp + Fdq}{E}\,dE - \sqrt{EG - F^2}\,dq\,.\,d\vartheta$$

$$= \frac{Edp + Fdq}{E}\left(\frac{dE}{dp}\,dp + \frac{dE}{dq}\,dq\right) - 2\sqrt{EG - F^2}\,dq\,.\,d\vartheta$$

Hieraus erlangen wir folgende Bedingungsgleichung für die kürzeste Linie

$$\sqrt{EG - F^2}\,d\vartheta = \frac{1}{2}\,\frac{F}{E}\,\frac{dE}{dp}\,.\,dp + \frac{1}{2}\,\frac{F}{E}\cdot\frac{dE}{dq}\,.\,dq + \frac{1}{2}\,\frac{dE}{dq}\,dp - \frac{dF}{dp}\,dp - \frac{1}{2}\,\frac{dG}{dp}\,dq\,,$$

die man auch so schreiben kann

$$\sqrt{EG - F^2}\,d\vartheta = \frac{1}{2}\,\frac{F}{E}\,dE + \frac{1}{2}\,\frac{dE}{dq}\,dp - \frac{dF}{dp}\,dp - \frac{1}{2}\,\frac{dG}{dp}\,dq\;.$$

Nimmt man nun noch die Gleichung hinzu

$$\operatorname{cotg}\vartheta\,\sqrt{EG - F^2} = E\,\frac{dp}{dq} + F$$

so läßt sich aus jener Gleichung der Winkel ϑ eliminiren, und eine Differenzialgleichung zwischen p und q herstellen, die jedoch complicirter und für die Anwendung weniger nützlich erscheint, als die vorhergehende.

XIX.

Die allgemeinen Formeln, die wir für das Krümmungsmaß und für die Variation in der Richtung der kürzesten Linie in Art. XI und XVIII aufgefunden haben, werden um Vieles einfacher, wenn die Größen p und q so gewählt werden, daß die Linien des ersten Systems diejenigen des zweiten überall rechtwinklig schneiden, d. h. so, daß allgemein $\omega = 90^0$ oder $F = o$ sei. Alsdann erhält man nämlich für das Krümmungsmaß

$$4\,E^2G^2k = E.\frac{dE}{dq}.\frac{dG}{dq} + E\left(\frac{dE}{dp}\right)^2 + G\frac{dE}{dp}.\frac{dG}{dp} + G\left(\frac{dE}{dq}\right)^2 - 2EG.\left(\frac{d^2E}{dq^2} + \frac{d^2G}{dp^2}\right)$$

und für die Variation des Winkels ϑ

$$\sqrt{EG}\,.\,d\vartheta = \frac{1}{2}\frac{dE}{dq}dp - \frac{1}{2}\frac{dG}{dp}dq$$

Unter den verschiedenen Fällen, wo diese Bedingung der Orthogonalität stattfindet, nimmt derjenige die erste Stelle ein, wo alle Linien des einen Systems, z. B. des ersten, kürzeste sind. Denn hier wird für einen constanten Werth von q der Winkel $\vartheta = o$, also folgt aus obiger Gleichung für die Variation des Winkels ϑ, daß $\frac{dE}{dq} = o$ oder der Coefficient E von q unabhängig sein muß, d. h. E ist entweder constant, oder nur eine Funktion von p. Am einfachsten wird es sein, für p die Länge selbst irgend einer Linie des ersten Systems anzunehmen, und zwar, wenn alle Linien des ersten Systems in einen Punkt zusammenlaufen, von diesem aus gerechnet, oder, wenn kein gemeinsamer Durchschnitt vorhanden ist von irgend einer Linie des ersten Systems an. Dann bezeichnet p und q dasselbe, was wir in Art. XV und XVI mit r und φ ausdrückten, und E wird $= 1$. Somit gehen die zwei vorhergehenden Formeln über in diese

$$4\,G^2k = \left(\frac{dG}{dp}\right)^2 - 2\,G\,\frac{d^2G}{dp^2}$$

$$\sqrt{G}\,.\,d\vartheta = -\frac{1}{2}\frac{dG}{dp}dq$$

und wenn $\sqrt{g} = m$ gesetzt wird,

$$k = -\frac{1}{m}.\frac{d^2m}{dp^2}\quad,\quad d\vartheta = -\frac{dm}{dp}.dq$$

Allgemein ausgedrückt, m wird eine Funktion von p, q selbst sein und m dq der Ausdruck für das Element irgend einer Linie des zweiten Systems. In dem speciellen Fall übrigens, wo alle Linien p von demselben Punkt ausgehen, muß für $p = o$ $m = o$ sein, wenn wir ferner alsdann für q den Winkel selbst annehmen, den das Element irgend einer Linie des ersten Systems mit demjenigen von irgend einer dieser Linien, welche man beliebig wählt, bildet, da für einen unendlich kleinen Werth von p das Element der Linie des zweiten Systems (welche gleichsam als ein mit dem Halbmesser p beschriebener Kreis betrachtet

werden kann) $= pdq$ ist, so wird für einen unendlich kleinen Werth von p $m = p$, somit für $p = o$, zugleich $m = o$ und $\frac{dm}{dp} = 1$ sein.

XX.

Wir wollen dieselbe Annahme beibehalten, nämlich daß p unbestimmt die Länge der kürzesten Linie, welche von einem gegebenen Punkt A nach irgend einem Punkt der Fläche gezogen wird, und q den Winkel bedeutet, den das erste Element dieser Linie mit dem ersten Element irgend einer kürzesten von A ausgehenden Linie macht. Nun sei B derjenige Punkt auf dieser Linie, für welchen $q = o$ ist, und C ein anderer bestimmter Punkt der Fläche, für den wir den Werth von q einfach durch A bezeichnen wollen. B und C seien durch eine kürzeste Linie verbunden, deren von B aus gerechnete Theile wir unbestimmt, wie im Art. XVIII durch s bezeichnen, und ebenso wie dort durch ϑ den Winkel, welchen irgend ein Element ds mit dem Element dp macht: endlich sind ϑ^0, ϑ' die Werthe von ϑ in den Punkten B, C. Also erhalten wir auf der Fläche ein von kürzesten Linien eingeschlossenes Dreieck, dessen Winkel bei B und C, die wir einfach mit diesen Buchstaben bezeichnen, jener $= 180 - \vartheta^0$, dieser $= \vartheta'$ sein werden. Da es aber unsere Rechnung mitbringt, daß alle Winkel nicht durch Grade sondern durch Zahlen auszudrücken sind, so daß der Winkel 57° 17′ 45″, dem ein Bogen gleich dem Halbmesser entspricht, als Einheit angenommen wird, so wird man, wenn 2π der Umfang ist,

$$\vartheta^0 = \pi - B \quad , \quad \vartheta' = C$$

setzen müssen. Wir wollen nun die curvatura integra dieses Dreiecks angebend, welche $= \int k\, d\sigma$ ist, wo $d\sigma$ das Element der Fläche des Dreiecks bedeutet, so daß, da dieses Element $= mdp \,.\, dq$, man den Werth des sich auf die ganze Fläche beziehenden Integrals $\int\int k\, m\, dp \,.\, dq$ aufsuchen muß. Beginnen wir mit der Integration nach p, die wegen $k = -\frac{1}{m}\frac{d^2m}{dp^2}$, $dq \,.\, \left(\text{const.} - \frac{dm}{dp}\right)$ ergibt für die curvatura integra desjenigen Flächenstücks, welches zwischen zwei Linien des ersten Systems liegt, welchen die Werthe q und $q + dq$ vom zweiten entsprechen: da diese curvatura für $p = o$ verschwinden muß, so ist die Integrations-Constante gleich dem Werth von $\frac{dm}{dp}$ für $p = o$, d. h. gleich der Einheit. Wir bekommen also $dq\left(1 - \frac{dm}{dp}\right)$, wo man für $\frac{dm}{dp}$ die Grenzlinien jener Fläche auf CB anzunehmen hat. In dieser Linie aber ist nach dem vorhergehenden Artikel $\frac{dm}{dp}\, dq = -\, d\vartheta$, wodurch unser Ausdruck in $dq + d\vartheta$ sich verwandelt. Wenn nun die zweite Integration innerhalb der Grenzen $q = o$

Figur 2.

und $q = A$ hinzukommt, so erhalten wir für die curvatura integra des Dreiecks

$$A + \vartheta' - \vartheta^0 = A + B + C - \pi^{*)}$$

Die curvatura integra ist gleich dem Inhalt desjenigen Theils der Kugeloberfläche, welcher dem Dreieck auf der gegebenen Fläche entspricht, und zwar mit dem positiven oder negativen Vorzeichen, je nachdem Letztere concav concav oder concav convex ist: als Flächeneinheit ist das Quadrat zu nehmen, dessen Seite die Einheit (der Kugelhalbmesser), somit wird die ganze Kugeloberfläche $= 4\pi$ sein. Es verhält sich also der dem Dreieck entsprechende Theil der Kugel zur ganzen Kugeloberfläche wie $\pm (A + B + C - \pi) : 4\pi$. Dieses Theorem, welches, wenn wir nicht irren, zu den elegantesten in der Theorie der krummen Flächen gehört, kann auch so ausgesprochen werden: **Der Überschuß der Winkelsumme eines aus kürzesten Linien gebildeten Dreiecks auf einer concav concaven Fläche über 180°, oder der Überschuß von 180° über die Winkelsumme in einem Dreieck aus kürzesten Linien auf einer concav convexen Fläche, wird durch den Inhalt desjenigen Theils der Kugelfläche gemessen, welcher jenem Dreieck durch die Richtung der Normalen entspricht, wenn die ganze Kugelfläche zu 720° gerechnet wird.**

Allgemeiner: in irgend einem aus n kürzesten Linien gebildeten Polygon ist der Überschuß der Winkel über $2n - 4$ Rechte oder der Überschuß von $2 - 4$ Rechten über die Winkelsumme (je nach der Beschaffenheit der Fläche) gleich dem Inhalt des entsprechenden sphärischen Polygons, wenn die ganze Kugelfläche gleich 720 Grad gesetzt wird, wie aus der Zerlegung des Polygons in Dreiecke aus dem vorhergehenden Theorem sofort erhellt.

XXI.

Wir wollen den Buchstaben p, q, E, F, G, ω allgemeine Bedeutungen, wie die obigen, beilegen und annehmen, daß die krumme Fläche auch noch auf eine andere ähnliche Art durch zwei andere Variabeln, p', q' bestimmt werden könne, wo das Linien-Element in unbestimmter Weise durch

$$\sqrt{E'\,dp'^2 + 2\,F'\,dp' \,.\, dq' + G' \,.\, dq'^2}$$

ausgedrückt wird. Also werden jedem durch gewisse Werthe der Veränderlichen p, q bestimmten Punkt der Fläche andere bestimmte Werthe der Veränderlichen p', q' entsprechen, und da diese Funktionen von p, q sind, so nehmen wir an, daß man durch Differenziation erhält

$$dp' = \alpha\,dp + \beta\,dq$$
$$dq' = \gamma\,dp + \delta\,dq$$

und wollen die geometrische Bedeutung der Coefficienten α, β, γ, δ zu erforschen suchen.

---

*)
$$DD'''_2 = dp \quad D''D''' = m\,dq$$
$$DD'D''D''' = d\varsigma \quad = m\,dp\,dq$$

Wenn nun das correspondirende Dreieck auf der Kugel, dessen Inhalt gefunden werden soll, mit kleinen Buchstaben bezeichnet wird, so ist

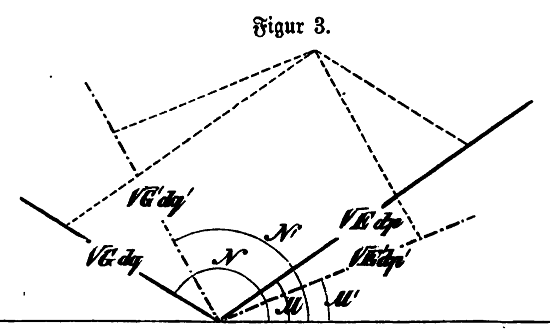
$$dd'd''d''' = km\,dp\,dq$$
$$a\,dd' = dq\left(1 - \frac{dm}{dp}\right)$$
$$abc = A + B + C - \pi$$

Wir haben nun 4 Liniensysteme auf der Fläche, für welche beziehungsweise p, q, q', p' constant sind. Wenn durch einen gewissen Punkt, dem die Werthe p, q, p', q' der Veränderlichen entsprechen, die 4 zu den einzelnen Systemen gehörenden Linien gezogen werden, so werden deren Elemente, zu welchen die positiven Variationen dp, dq, dp', dq' gehören,

$$\sqrt{E}\,.\,dp\quad,\quad\sqrt{G}\,.\,dq\quad,\quad\sqrt{E'}\,.\,dp'\quad,\quad\sqrt{G'}\,.\,dq'$$

sein. Die Winkel, welche die Richtungen dieser Elemente mit einer willkührlichen aber festen Richtung bilden, werden wir durch M, N, M', N' bezeichnen, welche Winkel in dem Sinn zu zählen sind, wie die zweite Richtung gegenüber von der ersten liegt, so daß sin (N — M) eine positive Größe ist; auch nehmen wir an, was erlaubt ist, daß die vierte hinsichtlich der dritten auf gleiche Art liege, so daß sin (N' — M') auch positiv ist. Unter solchen Voraussetzungen, wenn wir einen andern Punkt betrachten, der dem ersten unendlich nahe ist, und zu dem die Veränderlichen p + dp, q + dq, p' + dp', q' + dq' gehören, erkennen wir bei einiger Aufmerksamkeit, daß im Allgemeinen, d. h. unabhängig von den Werthen der Variationen dp, dq, dp', dq'

Figur 3.



$$\sqrt{E}\,.\,dp\,.\sin M+\sqrt{G}\,.\,dq\,.\sin N=\sqrt{E'}\,.\,dp'\,.\sin M'+\sqrt{G'}\,.\,dq'\,.\sin N'$$

ist, da beide Ausdrücke nichts Anderes sind, als die Entfernung eines neuen Punktes von der Linie, von welcher die Richtungen der Winkel beginnen. Aber nach der schon oben eingeführten Bezeichnung ist N — M = ω, und analog setzen wir N' — M' = ω', endlich noch N — M' = ψ; somit kann die zuletzt angeführte Gleichung auch in der Form gegeben werden:

$$\sqrt{E}.dp.\sin(M'-\omega+\psi)+\sqrt{G}.dq\sin(M'+\psi)=\sqrt{E'}.dp'.\sin M'+\sqrt{G'}.dq'.\sin(M'+\omega')$$

oder auch

$$\sqrt{E}\,.\,dp\sin(N'-\omega-\omega'+\psi)+\sqrt{G}\,.\,dq\sin(N'-\omega'+\psi)=\sqrt{E'}\,.\,dp'\sin(N'-\omega')$$
$$+\sqrt{G'}\,.\,dq'\,.\sin N'$$

und da die Gleichung von der Anfangsrichtung unabhängig sein muß, so kann diese beliebig angenommen werden. Setzt man also in der zweiten Formel N' = o, oder in der ersten M' = o, so ergeben sich folgende Formeln:

$$\sqrt{E'}\,.\sin\omega'\,.\,dp'=\sqrt{E}\,.\sin(\omega+\omega'-\psi)\,.\,dp+\sqrt{G}\,.\sin(\omega'-\psi)\,.\,dq$$

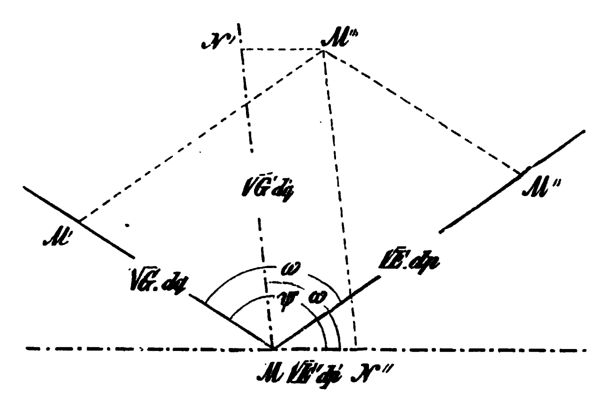
$$\sqrt{G'}\,.\sin\omega'\,.\,dq'=\sqrt{E}\,.\sin(\psi-\omega)\,.\,dp+\sqrt{G}\,.\sin\psi\,.\,dq$$

und da diese Gleichungen identisch sein müssen, mit

$$dp'=\alpha dp+\beta dq$$
$$dq'=\gamma dp+\delta dq$$

so dienen sie zur Bestimmung der Coefficienten $\alpha,\beta,\gamma,\delta$. Es wird nämlich

Figur 4.



$$\alpha = \sqrt{\frac{E}{E'}} \cdot \frac{\sin(\omega + \omega' - \psi)}{\sin \omega'}, \beta = \sqrt{\frac{G}{E'}} \frac{\sin(\omega' - \psi)}{\sin \omega'}$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{E}{G'}} \cdot \frac{\sin(\psi - \omega)}{\sin \omega'}, \delta = \sqrt{\frac{G}{G'}} \cdot \frac{\sin \psi}{\sin \omega'} \text{ sein.}$$

Hiezu kommen die Gleichungen

$$\cos \omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \cos \omega' = \frac{F'}{\sqrt{E'G'}}, \sin \omega = \sqrt{\frac{EG - F^2}{EG}}, \sin \omega' = \sqrt{\frac{E'G' - F'^2}{E'G'}}$$

woraus die 4 folgenden Gleichungen hervorgehen:

$$\alpha \sqrt{E'G' - F'^2} = \sqrt{EG'} \cdot \sin(\omega + \omega' - \psi)$$
$$\beta \sqrt{E'G' - F'^2} = \sqrt{GG'} \cdot \sin(\omega' - \psi)$$
$$\gamma \sqrt{E'G' - F'^2} = \sqrt{EE'} \cdot \sin(\psi - \omega)$$
$$\delta \sqrt{E'G' - F'^2} = \sqrt{E'G} \cdot \sin \psi$$

Da durch die Substitutionen $dp' = \alpha dp + \beta dq$, $dq' = \gamma dp + \delta dq$ das Trinom

$$E'dp'^2 + 2F'dp' \cdot dq' + G' \cdot dq'^2 \text{ übergehen muß in}$$
$$Edp^2 + 2F \cdot dpdq + Gdq^2,$$

so erhalten wir leicht

$$EG - F^2 = (E'G' - F'^2)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2;$$

und da umgekehrt das letzte Trinom in das erste übergehen muß durch die Substitution

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)\, dp = \delta dp' - \beta dq', \ (\alpha\delta - \beta\gamma)\, dq = -\gamma dp' + \alpha dq',$$

so finden wir:

$$E\delta^2 - 2F\gamma\delta + G\gamma^2 = \frac{EG - F^2}{E'G' - F'^2} \cdot E'$$

$$E\beta\delta - F(\alpha\delta + \beta\gamma) + G\alpha\gamma = \frac{EG - F^2}{E'G' - F'^2} \cdot F'$$

$$E\beta^2 - 2F\alpha\beta + G\alpha^2 = \frac{EG - F^2}{E'G' - F'^2} \cdot G'$$

XXII.

Von der allgemeinen Ausführung des vorhergehenden Artikels steigen wir zu einer einfacheren und gangbaren Anwendung herab, wobei wir zwar auch für p und q die allgemeinste Bedeutung vorbehalten, dagegen statt p′, q′ die in Art. XV mit r, φ bezeichneten Größen setzen, welche Buchstaben wir auch hier beibehalten wollen, also daß für jeden Punkt der Fläche r die kleinste Entfernung von einem gegebenen Punkt und φ den Winkel bezeichnet zwischen dem ersten Element von r in diesem Punkt und einer festen Richtung. Also ist $E' = 1$, $F' = 0$, $\omega' = 90^0$; setzen wir außerdem $\sqrt{G'} = m$, so daß ein Linienelement $= \sqrt{dr^2 + m^2 d\varphi^2}$ wird, so verwandeln sich die vier Gleichungen im vorhergehenden Artikel für α, β, γ δ in diese:

$$(1) \qquad \sqrt{E}\,.\cos(\omega - \psi) = \frac{dr}{dp}$$

$$(2) \qquad \sqrt{G}\,.\cos\psi = \frac{dr}{dq}$$

$$(3) \qquad \sqrt{E}\,.\sin(\psi - \omega) = m\,.\frac{d\varphi}{dp}$$

$$(4) \qquad \sqrt{G}\,.\sin\psi = m\,.\frac{d\varphi}{dq}$$

Aus der letzten und vorletzten dagegen erhält man

$$(5) \qquad EG - F^2 = E\left(\frac{dr}{dq}\right)^2 - 2F\,.\frac{dr}{dp}\cdot\frac{dr}{dq} + G\,.\left(\frac{dr}{dp}\right)^2$$

$$(6) \qquad \left(E\frac{dr}{dq} - F\frac{dr}{dp}\right)\cdot\frac{d\varphi}{dq} = \left(F\,.\frac{dr}{dq} - G\,.\frac{dr}{dp}\right)\cdot\frac{d\varphi}{dp}\ *)$$

Aus diesen Gleichungen ist die Bestimmung der Größen r, φ, ψ und (wenn es nöthig erscheint) von m durch p, q abzuleiten: es wird nämlich die Integration der Gleichung (5) r geben, und mittelst des so gefundenen Werths wird man durch Integration von (6) φ erhalten, dann aus einer von den beiden Gleichungen (1) und (2) ψ: endlich m entweder aus (3) oder (4). Das allgemeine Integral der Gleichungen (5), (6) wird nothwendigerweise zwei willkührliche Funktionen einführen, deren Bedeutung zwar leicht erklärlich ist, wenn wir erwägen, daß jene Gleichungen sich nicht auf den hier betrachteten Fall beschränken, sondern auch dann gelten, wenn r und φ die allgemeinere Bedeutung des Art. XVI haben, so daß r die Länge der kürzesten Linie bis zu einer willkührlich angenommenen bedeutet, welche sie normal scheidet, und φ irgend eine Funktion der Länge von demjenigen Theil dieser Linie, welcher zwischen der kürzesten Linie und einem willkührlich angenommenen Punkt enthalten ist. Die allgemeine Auflösung muß Alles dieß in unbestimmter Weise enthalten, und die willkührlichen Funktionen werden erst dann in bestimmte übergehen, wenn jene beliebig angenommene Linie

---

*) Diese Gleichung enthält in der Application de l'analyse à la géometrie v. Monge. 5. Aufl. von Liouville zwei Fehler, indem links

$$F\frac{dr}{dq} \text{ (wie auch im Original) und rechts } \frac{d\varphi}{dq} \text{ steht.}$$

(Siehe auch die entsprechende Formel im Anfang von Art. XXIV.)

sowie die Funktion φ speciell bestimmt sind. In unserem Fall kann ein unendlich kleiner Kreis angenommen werden, von dessen Mittelpunkt aus die Entfernungen r gerechnet werden, und φ wird Theile dieses Kreises durch den Radius gemessen vorstellen; hieraus schließen wir leicht, daß die Gleichungen (5) (6) für unsern Fall vollständig ausreichen, wenn nur die unbestimmt bleibenden Größen der Bedingung unterworfen werden, daß r und φ von jenem Anfangspunkt an und von solchen Punkten, die von ihm gleich weit abstehen, gerechnet werden.

Was übrigens die Integration selbst der Gleichungen (5), (6) betrifft, so läßt sie sich ohne Anstand auf die Integration von gewöhnlichen Differenzialgleichungen zurückführen, welche übrigens meist so verwickelt sind, daß sie wenig Vortheil bieten. Dagegen ist die Entwicklung in Reihen, welche zu praktischen Zwecken, so oft es sich um nicht zu große Flächentheile handelt, vollständig genügen, keinen Schwierigkeiten unterworfen, und die angeführten Formeln eröffnen eine reiche Quelle, die zur Lösung vieler, höchst wichtiger Probleme führt. Hier aber wollen wir nur ein Beispiel ausführen, um die Eigenthümlichkeit der Methode darzulegen.

XXIII.

Wir werden den Fall betrachten, wo alle Linien, für die p constant ist, kürzeste sind, welche die Curven, für die $\varphi = 0$, senkrecht scheiden, und die wir also gleichsam als Abscissenaxe betrachten können. A sei der Punkt, für den $r = 0$ ist, D irgend ein Punkt auf der Abscissenaxe, $AD = p$, B ein anderer Punkt auf der kürzesten Linie, welche in D senkrecht zu AD gezogen ist, und $BD = q$, so daß p gleichsam als Abscisse und q als Ordinate von B betrachtet werden kann: die positiven Abscissen nehmen wir auf demjenigen Theil der Abscissenaxe an, welchem $\varphi = 0$ entspricht, während wir r stets als eine positive Größe betrachten; die positiven Ordinaten nehmen wir in dem Raum an, wo φ zwischen 0 und 180^0 enthalten ist.

Nach dem Theorem des Art. XVI werden wir $\omega = 90^0$, $F = 0$, sowie auch $G = 1$ haben; setzen wir ferner $\sqrt{E} = n$. Alsdann ist n eine Funktion von p, q, welche für $q = 0$ gleich 1 wird. Die Anwendung der in Art. XVIII angeführten Formel auf unsern Fall lehrt, daß bei jeder kürzesten Linie $d\vartheta = -\frac{dn}{dq} \cdot dp$ sein muß, wo ϑ den Winkel zwischen dem Element dieser Linie und dem Element derjenigen, für welche q constant ist, bedeutet; da nun die Abscissenaxe selbst eine kürzeste Linie ist, und bei derselben überall $\vartheta = 0$, so leuchtet ein, daß für $q = 0$ überall $\frac{dn}{dq} = 0$ sein muß. Hieraus schließen wir also, daß wenn n in eine Reihe, die nach Potenzen von q fortschreitet, entwickelt werden soll, diese folgende Form haben muß:

$$n = 1 + fq^2 + gq^3 + hq^4 + \ldots$$

wo f, g, h Funktionen von p sein werden, und zwar wollen wir

$$f = f^0 + f'p + f''p^2 + \ldots$$
$$g = g^0 + g'p + g''p^2 + \ldots$$
$$h = h^0 + h'p + h''p^2 + \ldots$$

setzen, oder

$$n = 1 + f^0 q^2 + f' pq^2 + f'' p^2 q^2 + \dots$$
$$+ g^0 q^3 + g' pq^3 + \dots$$
$$+ h^0 q^4 + \dots$$

XXIV.

Aus den Gleichungen des Art. XXII folgt für unsern Fall

$$n \sin \psi = \frac{dr}{dp}, \ \cos \psi = \frac{dr}{dq}, \ -n \cos \psi = m \,.\, \frac{d\varphi}{dp}{}^{*)}, \ \sin \psi = m \frac{d\varphi}{dq},$$

$$n^2 = n^2 \left(\frac{dr}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dp}\right)^2, \ n^2 \frac{dr}{dq} \cdot \frac{d\varphi}{dq} + \frac{dr}{dp} \cdot \frac{d\varphi}{dp} = 0$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen, von welchen die fünfte und sechste schon in den übrigen enthalten sind, können r, φ, ψ, m in Reihen entwickelt werden, und zwar für irgend welche Funktionen dieser Größen, aus welchen wir diejenigen auswählen, die besonderer Aufmerksamkeit würdig sind.

Da für unendlich kleine Werthe von p, q $r^2 = p^2 + q^2$ sein muß, so fängt die Reihe für r^2 mit den Ausdrücken $p^2 + q^2$ an; diejenigen von höherer Ordnung erhalten wir durch die Methode der unbestimmten Coefficienten, mit Benützung der Gleichung

$$\left(\frac{1}{n} \frac{dr^2}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dr^2}{dq}\right)^2 = 4r^2 \, {}^{**)}$$

nämlich

$$[1] \quad r^2 = p^2 + \frac{2}{3} f^0 p^2 q^2 + \frac{1}{2} f' p^3 q^2 + \left(\frac{2}{5} f'' - \frac{4}{45} f^0 f^0\right) p^4 q^2 + \dots$$
$$+ q^2 + \frac{1}{2} g^0 p^2 q^3 + \frac{2}{5} g' p^3 q^3$$
$$+ \left(\frac{2}{5} h^0 - \frac{7}{45} f^0 f^0\right) p^2 q^4.$$

weiterhin haben wir, nach der Formel $r \sin \psi = \frac{1}{2n} \cdot \frac{dr^2}{dp}$,

$$[2] \quad r \sin \psi = p - \frac{1}{3} f^0 pq^2 - \frac{1}{4} f' p^2 q^2 - \left(\frac{1}{5} f'' + \frac{8}{45} f^0 f^0\right) p^3 q^2 + \dots$$
$$- \frac{1}{2} g^0 pq^3 - \frac{2}{5} g' p^2 q^3$$
$$- \left(\frac{3}{5} h^0 - \frac{8}{45} f^0 f^0\right) pq^4,$$

und gemäß der Gleichung $r \cos \psi = \frac{1}{2} \frac{dr^2}{dq}$,

---

*) Hier ist sowohl im Original als auch in der Ausgabe von Liouville $\frac{d\varphi}{dq}$ statt $\frac{d\varphi}{dp}$ gesetzt.

**) Es ist nämlich $\frac{dr^2}{dp} = 2r \frac{dr}{dp}$, $\frac{dr^2}{dq} = 2r \frac{dr}{dq}$, also stimmt diese Gleichung mit der fünften im Anfang des Artikels überein.

$$[3]\quad r\cos\psi = q + \frac{2}{3} f^0 p^2 q + \frac{1}{2} f' p^3 q + \left(\frac{2}{5} f'' - \frac{4}{45} f^0 f^0\right) p^4 q + \ldots$$
$$+ \frac{3}{4} g^0 p^2 q^2 + \frac{3}{5} g' p^3 q^2$$
$$+ \left(\frac{4}{5} h^0 - \frac{14}{45} f^0 f^0\right) p^2 q^3 .$$

Hieraus ergibt sich der Werth des Winkels ψ. Ebenso werden zur Berechnung von φ zweckmäßig die Reihen für $r\cos\varphi$ und $r\sin\varphi$ entwickelt, mit Benützung der partiellen Differenzial-Gleichungen

$$\frac{d \,.\, r\cos\varphi}{dp} = n\cos\varphi \,.\, \sin\psi - r\sin\varphi \,.\, \frac{d\varphi}{dp}$$
$$\frac{d \,.\, r\cos\varphi}{dq} = \cos\varphi \,.\, \cos\psi \quad - r\sin\varphi \,.\, \frac{d\varphi}{dq}$$
$$\frac{d \,.\, r\sin\varphi}{dp} = n\sin\varphi \,.\, \sin\psi - r\cos\varphi \,.\, \frac{d\varphi}{dp}$$
$$\frac{d \,.\, r\sin\varphi}{dq} = \sin\varphi \,.\, \cos\psi \quad - r\cos\varphi \,.\, \frac{d\varphi}{dq}$$

aus deren Combination die Gleichungen

$$\frac{r\sin\psi}{n} \,.\, \frac{d \,.\, r\cos\varphi}{dp} + r\cos\psi \,.\, \frac{d \,.\, r\cos\varphi}{dq} = r\cos\varphi ,$$
$$\frac{r\sin\psi}{n} \,.\, \frac{d \,.\, r\sin\varphi}{dp} + r\cos\psi \,.\, \frac{d \,.\, r\sin\varphi}{dq} = r\sin\varphi$$

hervorgehen. Hieraus lassen sich die Reihen für $r\cos\varphi$ und $r\sin\varphi$, deren erste Glieder p und q sein müssen, leicht entwickeln, nämlich

$$[4]\quad r\cos\varphi = p + \frac{2}{3} f^0 p q^2 + \frac{5}{12} f' p^2 q^2 + \left(\frac{3}{10} f'' - \frac{8}{45} f^0 f^0\right) p^3 q^2 + \ldots$$
$$+ \frac{1}{2} g^0 p q^3 + \frac{7}{20} g' p^2 q^3$$
$$+ \left(\frac{2}{5} h^0 - \frac{7}{45} f^0 f^0\right) p q^4 ,$$

$$[5]\quad r\sin\varphi = q - \frac{1}{3} f^0 p^2 q - \frac{1}{6} f' p^3 q - \left(\frac{1}{10} f'' - \frac{7}{90} f^0 f^0\right) p^4 q - \ldots$$
$$- \frac{1}{4} g^0 p^2 q^2 - \frac{3}{20} g' p^3 q^2$$
$$- \left(\frac{1}{5} h^0 + \frac{13}{90} f^0 f^0\right) p^2 q^3 .$$

Durch Combination der Gleichungen [2], [3], [4], [5] muß sich eine Reihe für $r^2 \cos(\psi + \varphi)$ ableiten lassen, welche, durch die Reihe [1] dividirt, einen Ausdruck für $\cos(\psi + \varphi)$ gibt, von der aus man zu einer Reihe für den Winkel $\psi + \varphi$ selbst übergehen kann. Doch kann der gleiche Zweck eleganter auf folgende Art erreicht werden. Durch Differenziation der ersten und zweiten von den am Anfang dieses Artikels stehenden Gleichungen erhält man

$$\sin\psi \cdot \frac{dn}{dq} + n\cos\psi \cdot \frac{d\psi}{dq} + \sin\psi \cdot \frac{d\psi}{dq} = o\,,$$

durch Combination mit

$$n\cos\psi \cdot \frac{d\varphi}{dq} + \sin\psi \cdot \frac{d\varphi}{dp} = o$$

findet man

$$\frac{r\sin\psi}{n} \cdot \frac{dn}{dq} + \frac{r\sin\psi}{n}\,\frac{d(\psi+\varphi)}{dp} + r\cos\psi \cdot \frac{d(\psi+\varphi)}{dq} = o$$

Aus dieser Gleichung können wir mit Hülfe der Methode der unbestimmten Coefficienten leicht eine Reihe für $\psi + \varphi$ ableiten, wenn wir erwägen, daß das erste Glied $= \frac{1}{2}\pi$ sein muß, indem man den Radius $= 1$ setzt, und den ganzen Umkreis also $= 2\pi$,

$$[6]\quad \psi + \varphi = \frac{1}{2}\pi - f^0 pq - \frac{2}{3} f' p^2q - \left(\frac{1}{2}f'' - \frac{1}{6} f^0 f^0\right) p^3q - \ldots$$
$$- g^0 pq^2 - \frac{3}{4} g' p^2q^2$$
$$- \left(h^0 - \frac{1}{3} f^0 f^0\right) pq^3$$

Es erscheint als eine wichtige Aufgabe, auch den Inhalt des Dreiecks ABD in einer Reihe auszudrücken. Hiezu dient die nachfolgende Bedingungsgleichung, welche sich auch leicht aus geometrischen Betrachtungen ableiten läßt, und in der S den fraglichen Inhalt bedeutet

$$\frac{r\sin\psi}{n} \cdot \frac{dS}{dp}{}^{*)} + r\cos\psi \cdot \frac{dS}{dq} = \frac{r\sin\psi}{n} \cdot \int n\,dq$$

wo die Integration von $q = o$ beginnt. Hieraus erhalten wir nämlich durch die Methode der unbestimmten Coefficienten

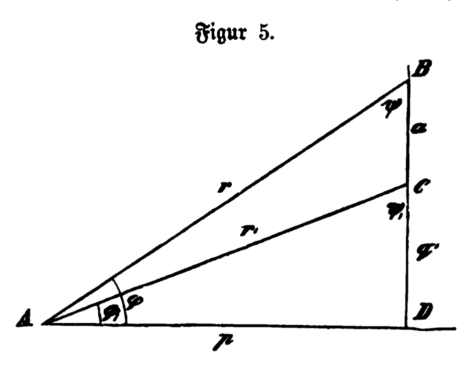
$$[7]\quad S = \frac{1}{2}pq - \frac{1}{12} f^0 p^3q - \frac{1}{20} f' p^4q - \left(\frac{1}{30} f'' - \frac{1}{60} f^0 f^0\right) p^5q - \ldots$$
$$- \frac{1}{12} f^0 pq^3 - \frac{3}{40} g^0 p^3q^2 - \frac{1}{20} g' p^4q^2$$
$$- \frac{7}{120} f' p^2q^3 - \left(\frac{1}{15} h^0 + \frac{2}{45} f'' + \frac{1}{60} f^0 f^0\right) p^3q^3$$
$$- \frac{1}{10} g^0 pq^4 - \frac{3}{40} g' p^2q^4$$
$$- \left(\frac{1}{10} h^0 \;\; \frac{1}{30} f^0 f^0\right) pq^5.$$

XXV.

Von den Formeln des vorhergehenden Artikels, welche sich auf das aus kürzesten Linien gebildete rechtwinklige Dreieck beziehen, wollen wir zu allgemeineren

*) Hier steht bei Liouville $\frac{dS}{dq}$ statt $\frac{dS}{dp}$.

übergehen. Wenn C ein anderer Punkt auf der nämlichen kürzesten Linie DB ist für den, bei gleichem p, die Buchstaben q', r', φ', ψ', S' dasselbe bedeuten mögen, wie q, r, φ, ψ, S für B, so erhalten wir ein Dreieck A, B, C, dessen Winkel wir durch A, B, C und deren Gegenseiten durch a, b, c bezeichnen; ς sei der Inhalt des Dreiecks; das Krümmungsmaß in den Punkten A, B, C drücken wir beziehungsweise durch α, β, γ aus. Indem wir weiter festsetzen, was gestattet ist, daß die Größen p, q, $q-q'$ positiv sind, so haben wir $A = \varphi - \varphi'$, $B = \psi$, $C = \pi - \psi'$, $a = q-q'$, $b = r'$, $c = r$, $\varsigma = S - S'$.



Figur 5.

Zunächst wollen wir die Fläche ς durch eine Reihe ausdrücken. Indem wir in [7] die einzelnen auf B sich beziehenden Größen in solche verwandeln, die sich auf C beziehen, so erhalten wir eine Formel für S', welche nachstehende Gleichung liefert

$$\varsigma = \frac{1}{2} p (q-q') \Big\{ 1 - \frac{1}{6} f^0 (p^2 + q^2 + qq' + q'^2) - \frac{1}{60} f' p (6p^2 + 7q^2 + 7qq' + 7q'^2) - \frac{1}{20} g^0 (q + q') (3p^2 + 4q^2 + 4qq' + 4q'^2) \Big\}$$

die bis zur sechsten Ordnung geht. Diese Formel geht, mit Benützung der Reihe [2], nämlich

$$c \sin B = p \left(1 - \frac{1}{3} f^0 q^2 - \frac{1}{4} f' pq^2 - \frac{1}{2} g^0 q^3 - \ldots\right)$$

über in

$$\varsigma = \frac{1}{2} ac \sin B \Big\{ 1 - \frac{1}{6} f^0 (p^2 - q^2 + qq' + q'^2) - \frac{1}{60} f' p (6p^2 - 8q^2 + 7qq' + 7q'^2) - \frac{1}{20} g^0 (3p^2 q + 3p^2 q' - 6q^3 + 4q^2 q' + 4qq'^2 + 4q'^3) \Big\}.$$

Das Krümmungsmaß für irgend einen Punkt der Fläche ist (nach Art. XIX, wo m, p, q das gleiche bedeutet, was jetzt n, q, p)

$$= -\frac{1}{n} \cdot \frac{d^2 n}{dq^2} = -\frac{2f + 6gq + 12hq^2 + \ldots}{1 + fq^2 + \ldots}$$
$$= -2f - 6gq - (12h - 2f^2) q^2 - \ldots$$

Hieraus folgt, wenn p, q auf den Punkt B bezogen werden,

$$\beta = -2f^0 - 2f'p - 6g^0 q - 2f'' p^2 - 6g' pq - (12h^0 - 2f^{0\,2}) q^2 - \ldots$$

ferner

$$\gamma = -2f^0 - 2f'p - 6g^0 q' - 2f'' p^2 - 6g' pq' - (12h^0 - 2f^{0\,2}) q'^2 - \ldots$$
$$\alpha = -2f^0$$

Führen wir diese Krümmungsmaße in die Reihe für σ ein, so erhalten wir folgenden Ausdruck, der bis auf die Größen sechster Ordnung (excl.) genau ist

$$\sigma = \frac{1}{2} ac \sin B \left\{ 1 + \frac{1}{120} \alpha (4p^2 - 2q^2 + 3qq' + 3q'^2) + \frac{1}{120} \beta (3p^2 - 6q^2 + 6qq' + 3q'^2)^{*)} + \frac{1}{120} \gamma (3p^2 - 2q^2 + qq' + 4q'^2) \right\}.^{**)}$$

Derselbe Grad von Genauigkeit wird erreicht, wenn wir für p, q, q' c sin B, c cos B, c cos B — a setzen, wodurch man erhält

$$[8]\quad \sigma = \frac{1}{2} ac \sin B \left\{ 1 + \frac{1}{120} \alpha (3a^2 + 4c^2 - 9ac \cos B) + \frac{1}{120} \beta (3a^2 + 3c^2 - 12\, ac \cos B) + \frac{1}{120} \gamma (4a^2 + 3c^2 - 9ac \cos B) \right\}.$$

Da aus dieser Gleichung alles verschwindet, was zu der normal auf BC gezogenen Linie AD in Beziehung ist, so können auch die Punkte A, B, C mit ihren Correlaten unter sich vertauscht werden, weshalb die folgenden Gleichungen ebenso genau sind

$$[9]\quad \sigma = \frac{1}{2} bc \sin A \left\{ 1 + \frac{1}{120} \alpha (3b^2 + 3c^2 - 12bc \cos A) + \frac{1}{120} \beta (3b^2 + 4c^2 - 9bc \cos A) + \frac{1}{120} \gamma (4b^2 + 3c^2 - 9bc \cos A) \right\},$$

$$[10]\quad \sigma = \frac{1}{2} ab \sin C \left\{ 1 + \frac{1}{120} \alpha (3a^2 + 4b^2 - 9ab \cos C) + \frac{1}{120} \beta (4a^2 + 3b^2 - 9ab \cos C) + \frac{1}{120} \gamma (3a^2 + 3b^2 - 12ab \cos C) \right\}.$$

XXVI.

Großen Vortheil gewährt die Betrachtung des ebenen geradlinigen Dreiecks, dessen Seiten gleich sind a, b, c; die Winkel desselben, die wir mit A*, B*, C* bezeichnen wollen, unterscheiden sich von den Winkeln des Dreiecks auf der krummen Fläche, nämlich von A, B, C um Größen zweiter Ordnung, und wir betrachten es als eine wichtige Aufgabe, auch diese Unterschiede genau auszuwerthen. Doch wird es genügen, wenn von den ebenso weitläufigen als schwierigen Rechnungen nur die Hauptmomente angeführt werden.

Indem in den Formeln [1], [4], [5] die auf B bezüglichen Größen in solche umgeändert werden, die sich auf C beziehen, werden wir Formeln für r'^2,

---

*) Hier steht bei Liouville $6q'^2$ statt $3q'^2$.
**) Hier steht im Original und in den gesammelten Werken (Göttingen 1873) $4qq'$ statt $4q'^2$.

$r' \cos \varphi'$, $r' \sin \varphi'$ erhalten. Alsdann führt der Ausdruck $r^2 + r'^2 - (q - q')^2 - 2r \cos \varphi \,.\, r' \cos \varphi' - 2r \sin \varphi \,.\, r' \sin \varphi' = b^2 + c^2 - a^2 - 2bc \cos A = 2bc\,(\cos A^* - \cos A)$ combinirt mit der Entwicklung von $r \sin \varphi \,.\, r' \cos \varphi'$, der $= bc \sin A$ wird, zu nachstehender Formel:

$$\cos A^* - \cos A = -(q - q')\, p \sin A \left\{ \left(\frac{1}{3} f^0 - \frac{1}{6} f'p + \frac{1}{4} g^0 (q + q') \right) + \left(\frac{1}{10} f'' - \frac{1}{45} f^0 f^0 \right) p^2 + \frac{3^{*)}}{20} g'p(q+q') + \left(\frac{1}{5} h^0 - \frac{7^{**)}}{90} f^0 f^0 \right) (q^2 + qq' + q'^2) + \ldots \right\}$$

Hieraus folgt weiter, bis zu Größen fünfter Ordnung

$$A^* - A = -(q - q')\, p \left\{ \frac{1}{3} f^0 + \frac{1}{6} f'p + \frac{1}{4} g^0 (q + q') + \frac{1}{10} f'' p^2 + \frac{3}{20} g'p\,(q + q') + \frac{1}{5} h^0 (q^2 + qq' + q'^2) - \frac{1}{90} f^0 f^0 (7p^2 + 7q^2 + 12qq' + 7q'^2) \right\}.$$

Combinirt man diese Formel mit

$$2\,\varsigma = ap \left[1 - \frac{1}{6} f^0 (p^2 + q^2 + qq' + q'^2 - \ldots) \right]$$

und mit den im vorhergehenden Artikel angegebenen Werthen der Größen α, β, γ, so findet man, bis zu den Größen fünfter Ordnung genau,

$$[11]\quad A^* = A - \varsigma \left\{ \frac{1}{6} \alpha + \frac{1}{12} \beta + \frac{1}{12} \gamma + \frac{2}{15} f''p^2 + \frac{1}{5} g'p\,(q + q') + \frac{1}{5} h^0 (3q^2 - 2qq' + 3q'^2) + \frac{1}{90} f^0 f^0 (4p^2 - 11q^2 + 14qq' - 11q'^2) \right\}.$$

Aus ganz analogen Operationen folgt

$$[12]\quad B^* = B - \varsigma \left\{ \frac{1}{12} \alpha + \frac{1}{6} \beta + \frac{1}{12} \gamma + \frac{1}{10} f''p^2 + \frac{1}{10} g'p\,(2q + q') + \frac{1}{5} h^0 (4q^2 - 4qq' + 3q'^2) - \frac{1}{90} f^0 f^0 (2p^2 + 8q^2 - 8qq' - 11q'^2) \right\},$$

$$[13]\quad C^* = C - \varsigma \left\{ \frac{1}{12} \alpha + \frac{1}{12} \beta + \frac{1}{6} \gamma + \frac{1}{10} f''p^2 + \frac{1}{10} g'p\,(q + 2q') + \frac{1}{5} h^0 (3q^2 - 4qq' + 4q'^2) + \frac{1}{90} f^0 f^0 (2p^2 + 11q^2 - 8qq' + 8q'^2) \right\}.$$

---

*) Hier steht bei Liouville $\frac{3}{30}$ statt $\frac{3}{20}$ **) und hier $\frac{1}{90}$ statt $\frac{7}{90}$.

Hieraus schließen wir, da die Summe $A^* + B^* + C^*$ gleich zwei Rechten ist, daß der Überschuß von $A + B + C$ über zwei Rechte, oder

$$[14]\quad A + B + C = \pi + \varsigma \left\{ \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{3} + \frac{\gamma}{3} + \frac{1}{3} f'' p^2 + \frac{1}{2} g p' (q + q') + (2h^0 - \frac{1}{3} f^0 f^0)(q^2 - qq' - q'^2) \right\}$$

ist. Diese Gleichung hätte übrigens auch aus der Formel [6] abgeleitet werden können.

XXVII.

Wenn die Fläche eine Kugel ist, deren Halbmesser $= R$, so ist $\alpha = \beta = \gamma = -2f^0 = \frac{1}{R^2}$, $f'' = 0$, $g' = 0$, $6h^0 - f^0 f^0 = 0$ oder h^0*) $= \frac{1}{24R^4}$, also verwandelt sich [14] in

$$A + B + C = \pi + \frac{\varsigma}{R^2},$$

welche Gleichung vollkommen genau ist. Aus den Formeln [11], [12], [13] aber findet man

$$A^* = A - \frac{\varsigma}{3R^2} - \frac{\varsigma}{180R^4}(2p^2 - q^2 + 4qq' - q'^2),$$

$$B^* = B - \frac{\varsigma}{3R^2} + \frac{\varsigma}{180R^4}(p^2 - 2q^2 + 2qq' + q'^2)\text{**}),$$

$$C^* = C - \frac{\varsigma}{3R^2} + \frac{\varsigma}{180R^4}(p^2 + q^2 + 2qq' - 2q'^2),$$

oder ebenso genau

$$A^* = A - \frac{\varsigma}{3R^2} - \frac{\varsigma}{180R^4}(b^2 + c^2 - 2a^2),$$

$$B^* = B - \frac{\varsigma}{3R^2} - \frac{\varsigma}{180R^4}(a^2 + c^2 - 2b^2),$$

$$C^* = C - \frac{\varsigma}{3R^4} - \frac{\varsigma}{180R^2}(a^2 + b^2 - 2c^2).$$

Mit Vernachlässigung der Größen vierter Ordnung erhält man hieraus den bekannten, von Legendre zuerst veröffentlichten Satz.

XXVIII.

Unsere allgemeinen Formeln vereinfachen sich bedeutend, wenn in denselben die Ausdrücke vierter Ordnung unterdrückt:

$$A^* = A - \frac{1}{12}\varsigma(2\alpha + \beta + \gamma)$$

$$B^* = B - \frac{1}{12}\varsigma(\alpha + 2\beta + \gamma)$$

$$C^* = C - \frac{1}{12}\varsigma(\alpha + \beta + 2\gamma)$$

---

*) Hier steht in den ges. Werken k^0 statt h^0.
**) Hier steht bei Liouville $2q'^2$ statt q'^2.

Es sind also mit den Winkeln A, B, C auf einer nicht sphärischen Fläche ungleiche Reductionen vorzunehmen, damit ihre Sinus den Gegenseiten beziehungsweise proportional werden. Die Ungleichheit wird im Allgemeinen dritter Ordnung sein; und wenn die Fläche wenig von einer Kugel abweicht, ist sie von noch höherer Ordnung: in den größten Dreiecken sogar auf der Erdoberfläche, deren Winkel nachgemessen werden können. wird der Unterschied immer unmerklich sein. So ist z. B. in dem größten Dreieck unter denjenigen, welche wir in den letzten Jahren vermessen haben, nämlich zwischen den Punkten Hohehagen, Brocken, Inselsberg, der Überschuß der Winkelsumme = 14", 85348, und nach der Rechnung sind bei den einzelnen Winkeln folgende Reductionen vorzunehmen:

Hohehagen 4", 95113
Brocken 4, 95104
Inselsberg 4, 95131.

XXIX.

Um unsere Arbeit zu krönen, wollen wir noch den Inhalt eines Dreiecks auf der krummen Fläche mit demjenigen eines geradlinigen Dreiecks, dessen Seiten a, b, c sind, vergleichen. Diesen letzteren Inhalt bezeichnen wir mit σ^*, also daß

$$\sigma^* = \frac{1}{2} bc \sin A^* = \frac{1}{2} ac \sin B^* = \frac{1}{2} ab \sin C^* \text{ ist.}$$

Dann ist bis zu den Größen vierter Ordnung genau,

$$\sin A^* = \sin A - \frac{1}{12} \sigma \cos A \,.\, (2\alpha + \beta + \gamma),$$

oder ebenso genau

$$\sin A = \sin A^* \left[1 + \frac{1}{24} bc \cos A \,(2\alpha + \beta + \gamma)\right].$$

Wenn dieser Werth in die Formel [9] substituirt wird, so erhält man mit einer Genauigkeit bis zur sechsten Ordnung,

$$\begin{aligned} \sigma = \frac{1}{2} bc \sin A^* \,.\, \Big\{ 1 &+ \frac{1}{120} \alpha \,(3b^2 + 3c^2 - 2bc \cos A) \\ &+ \frac{1}{120} \beta \,(3b^2 + 4c^2 - 4bc \cos A) \\ &+ \frac{1}{120} \gamma \,(4b^2 + 3c^2 - 4bc \cos A) \Big\}, \end{aligned}$$

oder gleich genau

$$\sigma = \sigma^* \left\{ 1 + \frac{1}{120} \alpha \,(a^2 + 2b^2 + 2c^2) + \frac{1}{120} \beta \,(2a^2 + b^2 + 2c^2) + \frac{1}{120} \gamma \,(2a^2 + 2b^2 + c^2) \right\}$$

Bei der Kugel nimmt diese Formel nachstehende Form an

$$\sigma = \sigma^* \left[1 + \frac{1}{24} \alpha \,(a^2 + b^2 + c^2)\right],$$

für welche auch die folgende mit demselben Grad von Genauigkeit, wie sich leicht beweisen läßt, gesetzt werden kann

$$\sigma = \sigma^* \sqrt{\frac{\sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C}{\sin A^* \,.\, \sin B^* \,.\, \sin C^*}}$$

Wenn dieselbe Formel auf Dreiecke in einer nicht sphärischen Fläche Anwendung findet, so wird der Irrthum im Allgemeinen fünfter Ordnung sein, aber unmerklich bei allen Dreiecken, die sich auf der Erdoberfläche vermessen lassen.

II. Erläuterungen.

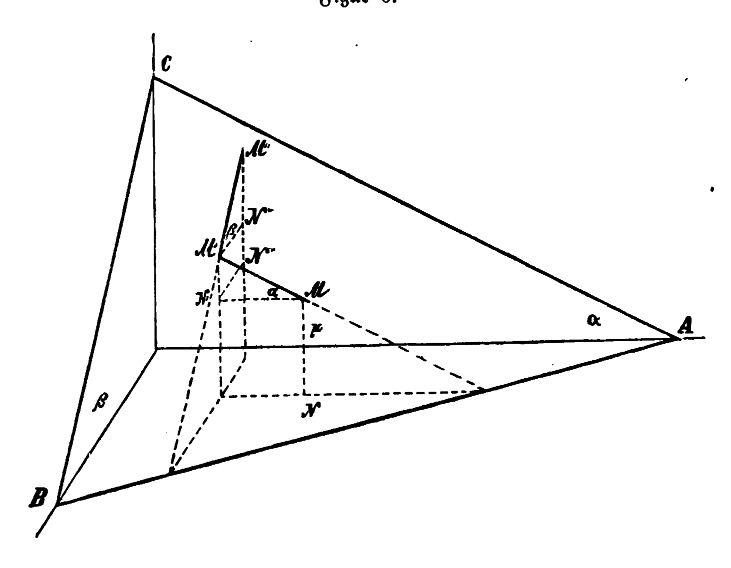
Im ersten Theil der analytischen Geometrie sind nach Monge die Differenzialquotienten erster Ordnung mit p, q, und diejenigen zweiter Ordnung mit r, s, t bezeichnet. Da nun diese Größen die Grundlage der Wissenschaft in dem Umfang bilden, wie sie in Theil I sowohl (mit Ausnahme von §. 9, wo auch ein Beispiel für die Differentialquotienten dritter Ordnung gegeben ist), als auch in den disquisitiones dargestellt ist, so wird es zweckmäßig sein, über die Ableitung und geometrische Bedeutung derselben Einiges zu sagen. Zu diesem Behuf muß man sich die Gleichung der Fläche in der einfachsten Form $z = f(x, y)$ gegeben denken, dann ist $p = \frac{dz}{dx}$ und $q = \frac{dz}{dy}$, d. h. p entsteht durch partielle Ableitung von z oder f (x, y) nach x und q durch partielle Ableitung nach y. Z. B. $z = \sqrt{\varrho^2 - x^2 - y^2}$ ist die Gleichung der Kugel, also $p = -\frac{x}{z}$ und $q = -\frac{y}{z}$.

Durch weitere partielle Ableitung von p nach x erhält man r, von p nach y oder von q nach x s und von q nach y t, es ist also $\frac{dp}{dx} = \frac{d^2z}{dx^2} = r$, $\frac{dp}{dy} = \frac{d^2z}{dxdy} = \frac{dq}{dx} = s$, $\frac{dq}{dy} = \frac{d^2z}{dy^2} = t$, oder bei der Kugel $r = -\frac{\varrho^2 - y^2}{z^3}$, $s = -\frac{xy}{z^3}$, $t = -\frac{\varrho^2 - x^2}{z^3}$; weitere Beispiele für die Flächen zweiten Grads findet man in §. 18—20.

§. 1. Die Differenzialquotienten erster Ordnung.

Der geometrische Nachweis ist in §. 2 gegeben und soll hier noch näher ausgeführt werden. Die Punkte M, M′, M″ liegen in der Ebene, welche die

Figur 6.



Fläche in M berührt. Um von M (x, y, z) nach M'' (x', y', z') zu gelangen, geht man auf dem gebrochenen Weg über M'. Nun ist $M'N' = MN' \,.\, tg\,\alpha = - tg\alpha\,(x' - x)$ und $M''N''' = M'N''' \,.\, tg\beta = - tg\beta\,(y' - y)$, somit $M''N'' = z' - z = - tg\alpha\,(x' - x) - tg\beta\,(y' - y)$. Denkt man sich durch MM' eine Ebene gelegt senkrecht zur xy Ebene, so schneidet sie die Fläche in einer Curve, deren Gleichung $z = f(x, y)$, wenn y constant ist. Diese Gleichung kann also als diejenige der Fläche angesehen werden, wenn man x und y als veränderlich annimmt, oder als diejenige einer Curve, nämlich des Durchschnitts der Ebene MM'N' mit der Fläche, wenn eine von diesen Coordinaten constant ist, z. B. y. Aus der analytischen Geometrie der Ebene ist bekannt, daß $\frac{dz}{dx} = \frac{d\,f(x, y)}{dx} = - tg\alpha$. Da f (x, y) zwar 2 Variable enthält, aber Eine davon, nämlich y, als constant angesehen wird, so heißt diese Ableitung partiell. Die Ebene M'M''N''' schneidet die Fläche in einer zweiten Curve, deren Gleichung ebenfalls $z = f(x, y)$ ist, wenn man x als constant ansieht, und es wird ebenso bewiesen, daß $\frac{dz}{dy} = - tg\beta$ ist, somit kann man sich an der Figur die Entstehung der Grundformel in der Theorie der Flächen 1) $z' - z = p\,(x' - x) + q\,(y' - y)$, auf welche Monge z. B. den größten Theil seiner Analyse appliquée à la géometrie gründete, erklären. Betrachtet man x', y', z' als constant, d. h. den Punkt M'' als fest, so stellt 1) einen Kegel vor, dessen Spitze M'' ist, oder mit andern Worten, man hat die Differenzialgleichung sämmtlicher Kegelflächen gefunden. Bringt man aber 1) unter die Form $1 = p\,\frac{x' - x}{z' - z} + q\,\frac{y' - y}{z' - z}$ und setzt 2) $\frac{x' - x}{z' - z} = a \;\; \frac{y' - y}{z' - z} = b$, wo a und b 2 Constante sind, so ist $1 = pa + qb$ die allgemeine Differenzialgleichung der Cylinderflächen, deren Mantellinien parallel mit der Geraden 2) sind.

In Theil I §. 1. sind die Gleichungen einer durch den Ursprung gehenden Geraden unter der Form

3) $x + pz = o \quad y + qz = o$ angegeben, ihre Richtungscosinus sind

4) $\cos\alpha = -\frac{p}{k}$, $\cos\beta = -\frac{q}{k}$, $\cos\gamma = \frac{1}{k}$, $(k^2 = 1 + p^2 + q^2)$

Eine auf ihr senkrechte Ebene, welche durch den Ursprung geht, ist

5) $z = px + qy$ (denn die Spur dieser Ebene in der xz Ebene $z = px$ ist senkrecht auf der Projection $x + pz = o$ und in der yz Ebene $z = qy$ auf der Projection $y + qz = o$.)

Sind nun p und q Differenzialquotienten einer Fläche, so ist die Ebene 5) parallel mit der Tangenten-Ebene und 4) sind die Richtungscosinus der Normale. Setzt man z. B. 6) $k = 1 + p^2 + q^2 =$ constant, so erhält man die Differenzialgleichung der Flächen, deren Tangential-Ebene mit der xy Ebene einen constanten Winkel bildet. Wenn außerdem die Gleichung einer bestimmten Fläche gegeben ist, und man eliminirt aus ihr und aus 6) irgend eine der 3 Coordinaten x, y, z, so findet man die Projektionen der isoklinen Curven, d. h. derjenigen Linien auf der Fläche, deren Normalen mit einer Hauptebene einen constanten Winkel bilden. Eine zweite Gerade sei 7) $x + p'z = o$

$y + q' z = o$, sie bilde mit der Ebene 5) den Winkel ω, so ist nach §. 1. $\sin \omega = \frac{pp' + qq' + 1}{kk'}$, $(k'^2 = p'^2 + q'^2 + 1)$; ist ω constant, und wird hieraus und aus der Gleichung der Flächen entweder x, oder y oder z eliminirt, so erhält man die Projectionen der Linien gleicher Helle auf den Flächen, d. h. derjenigen Linien, deren Tangential-Ebene mit 7), wenn man sich diese Gerade als Lichtstrahl vorstellt, den constanten Winkel ω bilden.

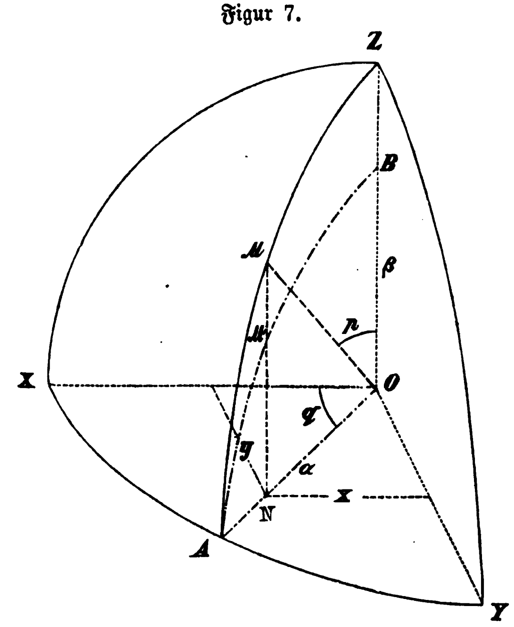
In Art. IV der disq. sind außer der obigen Form 4) noch 2 andere für die Richtungscosinus der Normalen einer Fläche gegeben, welche Gauß mit X, Y, Z bezeichnet. Um Verwechslungen zu verhüten, ist zu bemerken, daß denselben Differenzialquotienten, welche Monge p, q, r, s, t nennt, Gauß die Buchstaben t, u, T, U, V gibt. Es ist nun in Art. IV

$$X = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}} \ldots \quad X = \frac{bc' - cb'}{\triangle} \ldots \quad X = \frac{-t}{\sqrt{1 + t^2 + u^2}}$$

gesetzt.

Die dritte Form stimmt mit 4) überein, wo $z = f(x, y)$ als Gleichung der Fläche vorausgesetzt wird. Bei der ersten und zweiten Form dagegen ist diese Gleichung $f(x, y, z) = o$ und die Differenzialquotienten, welche durch partielle Ableitung zuerst nach x, dann nach y und z gewonnen werden, heißt Gauß P, Q, R. Bei der Kugel z. B., wo $x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2$ ist, hat man $P = x$, $Q = y$, $R = z$ also $X = \frac{x}{\varrho}$ und nach 4), wenn $p = -\frac{x}{z}$ $q = -\frac{y}{z}$ gesetzt wird, ebenfalls $\cos \alpha = \frac{x}{\varrho}$. Beide Formen sind also im Wesentlichen gleich, die allgemeine $f(x, y, z) = o$ hat den Vorzug, daß die Gleichungen der Flächen gewöhnlich in dieser Weise und nur ausnahmsweise in der Form $z = f(x, y)$ gegeben sind; dagegen sind die Ausdrücke, welche im Verlauf der Rechnung erhalten werden, complicirter.

Figur 7.



Bei der zweiten Methode nach Gauß werden zwei neue Veränderliche p und q eingeführt, die zunächst ganz unbestimmt sind, und x, y, z als Funktionen derselben betrachtet. Wir setzen demgemäß

$$8) \quad x = f_1(p, q)$$
$$y = f_2(p, q)$$
$$z = f_3(p, q)$$

und wählen wieder als einfachstes Beispiel die Kugel, deren Halbmesser wir $= \varrho$ setzen. Die Lage eines Punkts M auf derselben kann entweder durch die Cartesischen Coordinaten x, y, z oder durch

die Polarcoordinaten p und q bestimmt werden, p = W. MOZ und q = W. AOX. Nun ist

9) $x = \varrho \sin p \cos q \qquad y = \varrho \sin p \sin q \qquad z = \varrho \cos p$

8) gibt 3 neue Formen für die Gleichung der allgemeinen Fläche und 9) speziell für die Kugel. Verfährt man mit denselben wie oben mit $z = f(x, y)$, d. h. sucht man die Differenzialquotienten durch partielle Ableitung nach p und q, welche Gauß der Reihe nach a, a'; b, b'; c, c' nennt, so erhält man aus 8) $dx = a\,dp + a'\,dq \ldots\ldots$ (Art. IV) und aus 9)

10) $dx = \varrho \cos p \cos q\, dp - \varrho \sin p \sin q\, dq \quad dy = \varrho \cos p \sin q\, dp + \varrho \sin p \cos q\, dq \qquad dz = - \varrho \sin p\, dp$

also $a = \varrho \cos p \cos q \quad a' = - \varrho \sin p \sin q \quad b = \varrho \cos p \sin q$ u. s. f.

Bildet man die Ausdrücke $bc' - cb' = \varrho^2 \sin^2 p \cos q \ldots\ldots \triangle = \varrho^2 \sin p$, so findet man

$$X = \sin p \cos q \qquad X - \sin p \sin q \qquad Z = \cos p$$

Soll der Punkt M eine gewisse Linie auf der Fläche beschreiben, so muß eine Relation zwischen p und q stattfinden, oder die Gleichung $p = f(q)$ muß specialisirt sein. Setzt man z. B. $p = q$, so findet man aus 9) $y = \varrho \frac{x^2}{z^2}$ und durch Combination mit der Gleichung der Kugel die Projectionen der Linie, welche der Punkt beschreibt, wenn $p = q$ ist, oder wenn man sich die Erde als Kugel denkt, wenn die geographische Breite gleich der Länge ist.

Da die Wahl der Variabeln p und q ganz beliebig ist; so erkennt man sofort, daß in der zweiten Methode von Gauß die allgemeinste Auffassung des Problems von der Coordinaten-Veränderung liegt, welche nicht etwa bloß den Übergang von einem rechtwinkligen zu einem schiefwinkligen System, sondern von Cartesischen Coordinaten überhaupt zu irgend einem auf die ganz unbestimmt gelassenen Variabeln p und q gegründeten System vermittelt. Diese Methode ist in ihren Anwendungen ungemein fruchtbar; denn jede Gattung von Linien auf einer Fläche hat besondere ihr eigenthümliche charakteristische Eigenschaften, zu deren Darstellung zwar in manchen Fällen die Cartesischen Coordinaten sich eignen; dagegen führen sie häufig zu Formeln, die wegen ihrer Complicirtheit unbrauchbar sind, während andererseits eine passende Wahl der Coordinaten diese Eigenschaften sofort erkennen läßt. Hier sind vor Allem die elliptischen Coordinaten zu nennen, welche in Theil I von §. 21 an bis zum Schluß auf die Flächen II. Grads durchaus und in der Abhandlung über die Wellenfläche, namentlich in den Anwendungen auf die Theorie der Trägheitsmomente, vielfach gebraucht sind.

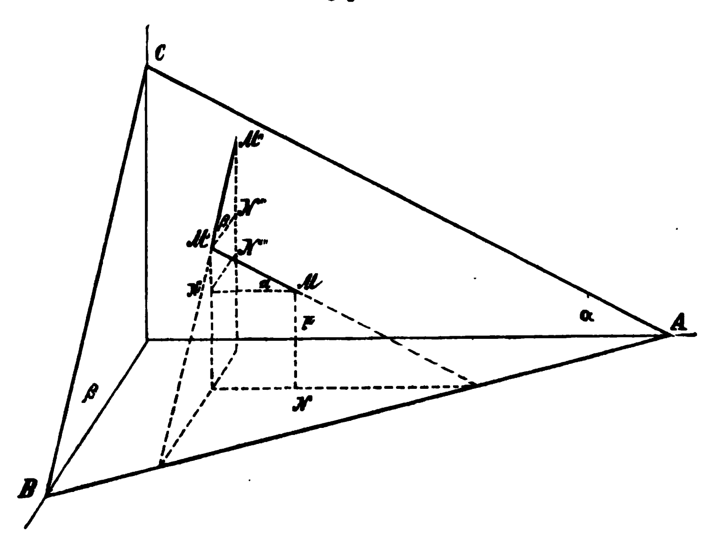
Die Gleichungen 7), 8), 9) in §. 21 sind die Grundlage für die Theorie der elliptischen Coordinaten; sie sind ein specieller Fall der Gauß'schen Gleichungen 8), deren Variable p und q hier μ und ν sind. Betrachtet man nämlich das Ellipsoid (ϱ) §. 21 2) als gegeben, so sind μ und ν die Halbaxen in der Richtung der xAxe von 2 homofocalen oder confocalen Hyperboloiden, welche (ϱ) in den Krümmungslinien schneiden. Wie die Lage des Punkts M im obigen Beispiel auf der Kugel in zweierlei Weise bestimmt werden kann, entweder durch x, y, z oder durch p und q, so läßt sich auch die Lage eines Punkts M auf dem Ellipsoid entweder durch seine Cartesischen Coordinaten x, y, z oder durch die elliptischen μ und ν bestimmen. Der Übergang vom Einen System zum

andern wird durch die Gleichungen 7), 8), 9) in §. 21 vermittelt, und wie fruchtbar sich diese doppelte Bestimmungsweise für die Flächen II. Grads erweist, kann man in der großen Zahl von Sätzen von §. 21—29 sehen.

§. 2. Die Differenzialquotienten zweiter Ordnung.

Während die geometrische Bedeutung der Differenzialquotienten I. Ordnung, p und q nach Monge, t und u nach Gauß sich leicht nachweisen läßt, so ist eine solche Veranschaulichung bei denjenigen II. Ordnung, r, s, t nach Monge, T, U, V nach Gauß weniger leicht. p und q sind nach dem Obigen die Tangenten der Winkel, welche die Spuren der Tangential-Ebene in der xz Ebene mit der x Axe und in der yz Ebene mit der y Axe machen, also $p = - tg\alpha$, $q = - tg\beta$. Für die Gleichung der Ebene A, B, C, welche die Flächen in

Figur 8.



M berührt, hat man gefunden $z' - z = p(x' - x) + q(y' - y)$, die Lage des Punkts M'' (x', y', z') auf der Tangential-Ebene ist zunächst beliebig; nehmen wir aber an, er liege unendlich nahe bei M, aber immer noch in beliebiger Richtung von M aus, so wird $z' - z = dz$, $x' - x = dx$ und $y' - y = dy$, somit wird die Gleichung der Tangential-Ebene

$$11) \quad dz = p\,dx + q\,dy$$

oder, was dasselbe ist, $dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy$; denkt man sich nun auf MN einen Punkt μ und setzt $N\mu = p$, wo man sich die Zahl p mit der Linien-Einheit multiplizirt denken muß, so wird der Punkt μ eine Hülfsfläche beschreiben, deren Tangential-Ebene die Gleichung $dp = \frac{dp}{dx} dx + \frac{dp}{dy} dy$ hat, wo $\frac{dp}{dx}$ und $\frac{dq}{dy}$ ebenfalls partielle Ableitungen von p nach x und y sind. Aber nach dem Obigen ist $\frac{dp}{dx}$

$= \frac{d^2z}{dx^2} = r$ und $\frac{dp}{dy} = \frac{d^2z}{dy^2} = s$, also $dp = r\,dx + s\,dy$. Hieraus folgt, daß r und s die Tangenten der Winkel sind, welche die Spuren der Tangential-Ebene von der Hülfsfläche in den xz und yz Ebenen mit der x und y Axe machen*). Durch eine zweite Hülfsfläche erhält man, wie es in §. 2 I. Theil angedeutet ist, die geometrische Bedeutung von t in der Gleichung $dq = s dx + t dy$. Da nun die Gleichung 11) unter den verschiedensten Formen in der analytischen Geometrie vorkommt, so geht aus dem Gesagten hervor, daß sie stets, wenn es sich um geometrische Veranschaulichung handelt, als die Gleichung der Tangential-Ebene irgend einer Fläche aufgefaßt werden kann, in welcher die Coefficienten der Differenziale Tangenten von Winkeln sind. Für die Erklärung der Differenzialquotienten höherer Ordnung kann man sich ganz analog weiterer Hülfsflächen bedienen, wie l. c. ebenfalls angedeutet ist.

Ein anderes Mittel, um die geometrische Bedeutung von r, s, t ausfindig zu machen, und zwar ohne Hülfsflächen, geben die asymptotischen Linien der Fläche an die Hand. M' sei ein zweiter Punkt der Fläche, welcher unendlich nahe bei M liegt, und dessen Tangential-Ebene also der Gleichung

12) $dz = (p + dp)\,dx + (q + dq)\,dy$

entspricht. Combinirt man 11) und 12), so erhält man die Gleichung der Durchschnittslinie beider Tangential-Ebenen

13) $o = dp\,dx + dq\,dy$ oder

14) $o = (r\,dx + s\,dy)\,dx + (s\,dx + t\,dy)\,dy$

Ist hier $r\,dx + s\,dy = o$ also $\frac{dy}{dx} = -\frac{r}{s}$, so muß auch $s\,dx + t\,dy = o$ sein, oder $\frac{dy}{dx} = -\frac{s}{t}$. Unter den verschiedenen Lagen, welche der Punkt M' um M herum haben kann, gibt es also 2 spezielle, M' und M'', wo diese Gleichungen stattfinden, dann sind MM' und MM'' die Tangenten der zwei asymptotischen Linien, welche durch M gehen (Theil I, §. 10) ihre Projectionen auf der xy Ebene machen mit der x Axe Winkel, deren Tangenten $\frac{dy}{dx}$ oder $-\frac{r}{s}$ und $-\frac{s}{t}$ sind. Die Differenzialgleichung der Projection auf der xy Ebene von den asymptotischen Linien ist in §. 10, Gleichung 5) angegeben, es sind diejenigen Linien auf den Flächen, deren Tangenten mit ihren conjugirten Tangenten zusammenfallen. Man hat also nach §. 1 und §. 2 den Satz:

Die Differenzialquotienten erster Ordnung einer Fläche sind die Tangenten der Winkel, welche die Spuren der Tangential-Ebene in der xz und yz Ebene mit der x Axe machen; die Verhältnisse von je 2 Differentialquotienten zweiter Ordnung sind die Tangenten der Winkel, welche die Projectionen der Tan-

*) Wenn man die Tangential-Ebene der Hülfsfläche in μ sich construirt denkt, und die lateinischen Buchstaben durch griechische ersetzt, so hat man ebenfalls 3 unendlich nahe Punkte μ, μ', μ'', und es ist

$$\mu'\,\nu' = \mu\nu' \,.\, r = r\,dx$$
$$\mu''\,\nu''' = \mu'\nu''' \,.\, s = s\,dy \quad \text{also}$$
$$\mu''\,\nu'' = dp = r\,dx + s\,dy.$$

genten von den asymptotischen Linien auf der x y Ebene mit der x Axe bilden.

Die Anwendung der Differenzialquotienten zweiter Ordnung bezieht sich zunächst auf die Untersuchung der Krümmungsverhältnisse in einem Punkt M einer Fläche und auf die Stellung der unendlich nahen Normalen in der Nähe desselben Theil I, §. 2—8. Aus der Gleichung $dz = pdx + qdy$ und aus 13) wird sowohl der Winkel zwischen den Tangentialebenen von M und M' bestimmt, als auch zwischen dem Element MM' und dem Durchschnitt MM'' von den beiden Tangentialebenen oder der conjugirten Tangente von MM'. Mit Hülfe dieser beiden Winkel erhält man die Sätze von Euler und Meunier über die Krümmungshalbmesser der Normal- und der schiefen Schritte, von Dupin über die conjugirten Tangenten und die Indicatrix, von Sturm über das Normalen Conoid §. 5 (Compt. condus 1845, I. Semester S. 1239) von J. Bertrand und Joachimsthal über die Winkel und Poldistanzen der unendlich nahen Normalen.

§. 3. Die Größen E, F, G.

Von der größten Wichtigkeit ist es beim Studium der disquisitiones, sich über die Bedeutung dieser Größen klar zu werden, denn in ihnen liegt das Charakteristische der Gauß'schen Auffassung der analytischen Geometrie, wodurch sie sich wesentlich von der älteren von Monge unterscheidet. Man überzeugt sich hievon leicht schon bei einer oberflächlichen Durchsicht. Die Fundamentalformen von Gauß

1. Der allgemeine Ausdruck für das Krümmungsmaß k, Art. XI Schluß.
2. Für das Element ds einer beliebigen Linie auf den Flächen, Art. XII.
3. Für die unendlich kleine Veränderung $d\vartheta$ des Winkels ϑ, unter welchem eine geodätische Linie auf der Fläche die Linien des ersten Systems (p) schneidet, beim Übergang zur nächstfolgenden Systemlinie, Art. XVIII Schluß.
4. Für die Coordinatenveränderung in einer von der vorhergehenden verschiedenen Auffassung, indem, unabhängig von Cartesischen Coordinaten, der Übergang von einem Liniensystem (p, q) der Fläche zunächst auf ein beliebiges zweites (p', q') vermittelt werden soll, Art. XXI,

bestehen nur aus den Größen E, F, G und ihren ersten und zweiten Ableitungen nach p und q. Es mag hier bemerkt werden, daß zwar E, F, G durch Differenziation der Gleichungen

$$x = f_1 (p, q) \qquad y = f_2 (p, q) \qquad z = f_3 (p, q)$$

erhalten werden, aber dessen ungeachtet nicht in dem Sinn wie bei Monge als Differenzialcoefficienten erster Ordnung zu betrachten sind; man erkennt dieß an der Formel für das Krümmungsmaß, welches sich (Theil I, §. 4, 29) durch p, q, r, s, t nach Monge, also durch Differenzialcoeffizienten erster und zweiter Ordnung ausdrücken läßt, während bei Gauß nicht bloß die ersten, sondern auch die zweiten Ableitungen von E, F, G hiezu nothwendig sind. Bei einer Vergleichung der disq. mit den Arbeiten von Monge ist also zu bemerken, daß die ersteren sich im Gebiet der ersten und zweiten Differenzialcoefficienten bewegen und hienach ihre Grenzen gesteckt sind, während der Letztere eine Reihe von Aufgaben in Angriff nahm, die sich nur mit Beiziehung der Differenzialcoefficienten dritter Ordnung lösen lassen.

Aus den obigen Gleichungen erhält man durch Differenziation (Art. IV)

$$dx = adp + a'dq \qquad dy = bdp + b'dq \qquad dz = cdp + c'dq \quad \text{also}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2$$

wenn $E = a^2 + b^2 + c^2 \quad F = aa' + bb' + cc' \quad G = a'^2 + b'^2 + c'^2$ gesetzt wird.

Mit Hülfe dieses Werths des Linienelements ds ist zwar in Art. XVII die geometrische Bedeutung von E, F und G abgeleitet, da jedoch specielle Beispiele viel zur Erleichterung des Verständnisses beitragen, so sind im Folgenden die Beziehungen angegeben, welche zwischen den Cartesischen Coordinaten eines Punkts auf der Kugel, dem Sphäroid, dem Ellipsoid und zwischen den Polar beziehungsweise elliptischen Coordinaten desselben Punkts stattfinden. Für die ersteren sind die Buchstaben p und q beibehalten, dagegen sind die letzteren wie in Theil I mit μ und ν bezeichnet. In allen 3 Fällen ist $F = o$, da die betreffenden Liniensysteme auf den 3 Flächen rectangulär sind.

Figur 9.

M ist ein Punkt der Kugel vom Halbmesser α, durch welchen der größte Kreis ZMA geht. Der Winkel ZOM ist $= p$ und XOA $= q$; die rechtwinkligen Coordinaten von M sind x, y, z, von welchen jede als Funktion von p und q betrachtet wird; man hat also die Gleichungen

$$x = \alpha \sin p \cos q$$
$$y = \alpha \sin p \sin q$$
$$z = \alpha \cos p$$

mittelst dieser Formeln kann jede Relation z. B. zwischen x und y, die sich auf eine bestimmte sphärische Curve bezieht, in eine andere zwischen p und q umgesetzt werden. Durch Differenziation hat man

$$dx = adp + a'dq$$
$$dy = bdp + b'dq$$
$$dz = cdp + c'dq$$

also

$$dx = \alpha \cos p \cos q \, dp - \alpha \sin p \sin q \, dq$$
$$dy = \alpha \cos p \sin q \, dp + \alpha \sin p \cos q \, dq$$
$$dz = - \alpha \sin p \, dp$$

$$a = \alpha \cos p \cos q \qquad a' = - \alpha \sin p \sin q$$
$$b = \alpha \cos p \sin q \qquad b' = \alpha \sin p \cos q$$
$$c = - \alpha \sin p \qquad c' = o$$

$$E = a^2 + b^2 + c^2 = \alpha^2 \qquad F = aa' + bb' + cc' = o$$
$$G = a'^2 + b'^2 + c'^2 = \alpha^2 \sin^2 p$$

$$ds = \sqrt{Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2} \qquad = \alpha \sqrt{dp^2 + \sin^2 p dq^2}$$

M' ist ein Punkt des abgeplatteten Rotationsellipsoids, durch welchen die Meridiancurve AM'B geht; diese ist eine Ellipse, deren Halbaxen $OA = \alpha$ und $OB = \beta$ sind. Die Coordinaten von M' sind x, y, z; $z = M'N = \frac{\beta}{\alpha} MN$; somit ist

$$\begin{array}{lll} x = \alpha \sin p \cos q & y = \alpha \sin p \sin q & z = \beta \cos p \\ a = \alpha \cos p \cos q & b = \alpha \cos p \sin q & c = -\beta \sin p \\ a' = -\alpha \sin p \sin q & b' = \alpha \sin p \cos q & c' = o \\ E = \alpha^2 \cos^2 p + \beta^2 \sin^2 p & F = o & G = \alpha^2 \sin^2 p \end{array}$$

$$ds = \sqrt{Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2}$$

$$= \alpha \sqrt{\sin^2 pdq^2 + (1 \frac{\alpha - \beta^2}{\alpha^2} \sin^2 p)\, dp^2}$$

Nehmen wir nun an, nach Art. XIX, daß p die Länge einer Linie des ersten Systems ist, also gleich dem elliptischen Bogen M'B, und daß alle Linien dieses Systems in B zusammenlaufen, so bedeuten p und q dasselbe, was in Art. XV und XVI mit r und φ bezeichnet wurde, d. h. dr ist das Differenzial des elliptischen Bogens M'B oder

$$dr = \alpha\, dp \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2} \sin^2 p}$$

Setzt man ferner $\alpha \sin p = m$ und $q = \varphi$, so ist

$$ds = \sqrt{dr^2 + m^2 d\varphi^2}$$

Die geometrische Bedeutung dieser Formel liegt in dem unendlich kleinen Dreieck M'M''M''', dessen Hypotenuse $M'M''' = ds$ das Element einer beliebigen Curve auf dem Ellipsoid ist; die eine Cathete M'M'' ist $= m d\varphi$ und die andere $M''M''' = dr$. Die Formel in Art. XIX

$$k = -\frac{1}{m} \cdot \frac{d^2 m}{dp^2}$$

hat folgende Bedeutung: Es ist $k = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{R'}$, R ist der Krümmungshalbmesser der Ellipse AM'B in M', also $= -\frac{\frac{dz}{dr}}{\frac{d^2 m}{dr^2}}$, da m und z die Coordinaten der Ellipse sind, und dr das Bogenelement. R' ist der andere Hauptkrümmungshalbmesser des Ellipsoids, d. h. das Stück der Normale von M' bis zum Durchschnitt mit der Verlängerung der z Axe, somit $R' = \frac{m}{\frac{dz}{dr}}$ also $k = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{R'}$.

Die Formel $k = -\frac{1}{m} \frac{d^2 m}{dp^2}$ läßt sich bei Rotationsflächen überhaupt geo-

metrisch interpretiren. Sind x und z die Coordinaten der Meridiancurve, welche sich um die z Axe dreht, r der Bogen, R der Krümmungshalbmesser und R' das Stück der Normale bis zur z Axe, so ist $R' = -\frac{x}{\frac{dz}{dr}}, R = \frac{\frac{dz}{dr}}{\frac{d^2x}{dr^2}}$ also $\frac{1}{RR'}$
$= -\frac{1}{x}\frac{d^2x}{dr^2}$.

Nun ist x der Halbmesser der Rotationsfläche, welche durch Drehung der Meridiancurve um die z Axe entsteht; entwickelt man G für eine solche Fläche, so findet man $\sqrt{G} = x$; (s. u. Abbildung von Rotationsflächen auf der Ebene) nach Art. XIX ist aber $m = \sqrt{G}$ und $p = r$, d. h. $\frac{1}{RR'} = -\frac{1}{m}\frac{d^2m}{dp^2}$.

Bei den elliptischen Coordinaten, (§. 21) betrachten wir das Ellipsoid als gegeben, dann sind die Gauß'schen Coordinaten p und q die Halbaxen μ und ν in der Richtung der x von den beiden confokalen Hyperboloiden. Aus den Gleichungen 7), 8), 9) §. 21 findet man durch Differenziation

$$dx = \frac{\varrho\nu}{bc}\,d\mu \qquad + \frac{\varrho\mu}{bc}\,d\nu$$

$$dy = \frac{\sqrt{\varrho^2 - b^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}\left\{\frac{\sqrt{b^2 - \nu^2}}{\sqrt{\mu^2 - b^2}}\,\mu\,d\mu - \frac{\sqrt{\mu^2 - b^2}}{\sqrt{b^2 - \nu^2}}\,\nu\,d\nu\right\}$$

$$dz = -\frac{\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}\left\{\frac{\sqrt{c^2 - \nu^2}}{\sqrt{c^2 - \mu^2}}\,\mu\,d\mu + \frac{\sqrt{c^2 - \mu^2}}{\sqrt{c^2 - \nu^2}}\,\nu\,d\nu\right\}$$

und hieraus

$$E = \frac{(\varrho^2 - \mu^2)\,(\mu^2 - \nu^2)}{(\mu^2 - b^2)\,(c^2 - \mu^2)} \qquad F = o \qquad G = \frac{(\varrho^2 - \nu^2)\,(\mu^2 - \nu^2)}{(b^2 - \nu^2)\,(c^2 - \nu^2)}$$

O sei der Mittelpunkt des Ellipsoids, B der Brennpunkt des Hauptschnitts in der xy Ebene und C in der xz Ebene. Die Variabeln p und q oder jetzt μ und ν sind nun keine Linien mehr, die auf der Fläche liegen, sondern sie bilden 2 Skalen, wovon die Eine für μ zwischen B und C, die andern für ν zwischen O und B enthalten ist. Bleibt der Punkt μ ruhig, bewegt sich aber ν, so beschreibt der Punkt M auf dem Ellipsoid eine Linie des ersten Systems, welche der Durchschnitt mit dem einmantligen Hyperboloid (μ) ist. Bleibt ν ruhig, und bewegt sich μ, so beschreibt M eine Linie des zweiten Systems, oder den Durchschnitt mit dem zweimantligen Hyperboloid (ν). Soll M eine bestimmte Linie auf dem Ellipsoid beschreiben, so muß eine Bedingungsgleichung $\varphi(\mu, \nu) = o$ gegeben oder die Funktion φ spezialisirt sein.

So ist $\mu\nu =$ const. Die Gleichung des Durchschnitts mit einer Ebene senkrecht zur x Axe (§. 21, 7).

$\mu^2 + \nu^2 =$ const. Die Gleichung des Durchschnitts mit einer concentrischen Kugel (§. 21, 10).

$(\varrho^2 - \mu^2)(\varrho^2 - \nu^2) =$ const. Die Gleichung der Linie, in welcher das Ellipsoid von einer Tangentialebene berührt wird, die zugleich eine concentrische Kugel berührt §. 21, 13. Durch Vergleichung mit §. 21, 34 ergibt sich, daß auf dieser Linie das Krümmungsmaß $\frac{1}{RR'}$ constant ist.

Jedem Punkt M auf dem Ellipsoid kommen zwei spezielle Werthe von μ und ν, also auch von E und G zu, deren geometrische Bedeutung allgemein in Art. XVII nachgewiesen ist. Im vorliegenden Fall denke man sich durch M zwei Systemlinien, d. h. Krümmungslinien gezogen, und nehme auf ihnen sehr nahe bei M die Punkte M' und M'' an, dann ist $MM' = \sqrt{G} \,.\, d\nu$ und $MM'' = \sqrt{E} \,.\, d\mu$; $d\mu$ und $d\nu$ sind zwei unendlich kleine Wege, welche der Punkt μ zwischen B und C beschreibt, wenn zugleich M nach M'' rückt, und ν zwischen O und B, wenn M nach M' rückt. $\sqrt{E} = \frac{MM''}{d\mu}$ und $\sqrt{G} = \frac{MM'}{d\nu}$ sind somit 2 Verhältnißzahlen, deren geometrische Bedeutung sich in speziellen Fällen, wie im vorliegenden, leicht veranschaulichen läßt. Zieht man durch M' und M'' zwei weitere Systemlinien, so erhält man ein unendlich kleines Parallelogramm MM'M'''M'', dessen Diagonale

$$MM''' = ds = \sqrt{E d\mu^2 + G d\nu^2}$$

Das Analogon dieser Gleichung bei ebenen Curven ist $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Man könnte nach Art. XIX sowohl das Krümmungsmaß als die Differenzialgleichung der geodätischen Linien bestimmen, doch läßt sich dieß leichter nach §. 21, 34, §. 24, 2 und 14, §. 25, 24 erreichen.

Figur 10.

Denken wir uns den Punkt M des Ellipsoids zugleich durch die Cartesischen Coordinaten x, y, z bestimmt, so bilden diese ebenfalls Skalen, und zwar auf jeder Axe eine besondere, auf welcher die unendlich kleinen Veränderungen dx, dy, dz liegen, wie die Differenziale $d\mu$ und $d\nu$ auf der x Axe. Nun ist, wenn man nach Gauß $\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = t$ und $\frac{dz}{dy} = \operatorname{tg} \beta = u$ setzt

$$MM' = dx \sqrt{1 + t^2}$$

$$MM'' = dy \sqrt{1 + u^2} \qquad \text{also } E = 1 + t^2 \qquad G = 1 + u^2$$

$$MM''' = ds = \sqrt{E dx^2 + 2F dx dy + G dz^2}$$

Bezeichnet man den Winkel ACB, welchen die Spuren der Tangentialebene von M in der xz und yz Ebene bilden, mit C, so ist $MM'''^2 = MM'^2 + 2MM' . MM'' . \cos C + MM''^2$ also $F = \sqrt{1+t^2}\sqrt{1+u^2} \cos C$.

Aus dem rechtwinkligen Dreikant, dessen Spitze C ist, erhält man die Relation $\cos C = \sin \alpha . \sin \beta = \frac{tu^2}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{1+u^2}}$ somit $F = tu$ und $ds^2 = (1+t^2)\, dx^2 + (1+u^2)\, dy^2 + 2tu\, dxdy = dx + dy^2 + dz^2$, da $dz = tdx + udy$ ist. Man kann nun einen Punkt M auf dem Ellipsoid durch zweierlei Coordinatensysteme bestimmen:

Zuerst nehmen wir das Letztere, wo

$$1. \quad E = 1 + t^2 \qquad F = tu \qquad G = 1 + u^2$$

ist. Die Gauß'schen Variabeln p, q sind hier die Cartesischen Coordinaten x, y selbst, t und u werden durch partielle Differenziation aus der Gleichung des Ellipsoids bestimmt (§. 18, 2). Beide Liniensysteme sind schiefwinklig, da F nicht = o ist, sie bestehen aus Ellipsen, deren Ebenen parallel mit der xz und yz Ebene sind.

Das zweite System durch die elliptischen Coordinaten μ und ν ist rechtwinklig, und man hat nach dem Vorhergehenden

$$2. \quad E' = \frac{(\varrho^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)} \quad F' = o \quad G' = \frac{(\varrho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}$$

Die Gauß'schen Variabeln p', q' sind die in der Richtung der x Axe liegenden Halbaxen μ und ν der beiden confokalen Hyperboloide, welche durch M gehen, und das Ellipsoid in seinen Krümmungslinien schneiden. Es lassen sich jetzt auf diese zwei Coordinaten oder Liniensysteme die Gauß'schen Transformations-Formeln Art. XXI anwenden. Zunächst könnte man aus den 4 Gleichungen am Schlusse dieses Artikels die Werthe der Differenzialcoefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ finden und aus den unmittelbar vorhergehenden Formeln ψ und ω. Dieses Verfahren ist im Allgemeinen nothwendig, wenn die Coordinaten p, q nicht die Cartesischen Coordinaten x, y selbst sind, sondern Funktionen derselben. Hier aber kennt man $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ schon aus den obigen Formeln für dx und dy, es ist nämlich $\alpha = \frac{\varrho\nu}{bc}$ $\beta = \frac{\varrho\mu}{bc}$ u. s. f., also können die 4 Gleichungen in XXI für ω und ψ direkt verwendet werden. Das unmittelbare practische Ergebniß wäre also die Bestimmung der Winkel ω und ψ, welche in irgend einem Punkt des Ellipsoids die Tangenten der Krümmungslinie mit denjenigen der Ellipsen bilden, deren Ebenen auf einer Axe senkrecht stehen.

In Art. XXII ist das eine System durch geodätische Polarcoordinaten r und φ ersetzt, während das andere noch die allgemeine Bedeutung beibehält und also schiefwinklig ist. Um auch hiefür ein specielles Beispiel zu geben, seien O und O' die beiden Nabel oder Kreispunkte des Ellipsoids und AMB eine Krümmungslinie (μ), d. h. der Durchschnitt mit dem einmantligen Hyperboloid; dann hat man in den Formeln (1)—(6) Art. XXII $E = \frac{(\varrho^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}$

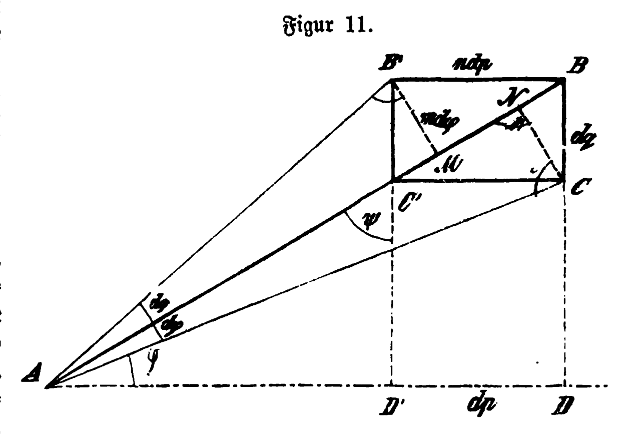
$F = o \qquad G = \frac{(\varrho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}$ $p = \mu$, $q = \nu$ zu setzen, und erhält

aus (5) $\quad 3)\ EG = E\left(\frac{dr}{d\nu}\right)^2 + G\left(\frac{dr}{d\mu}\right)^2$

Um diese Gleichung integriren zu können, muß eine Relation zwischen μ und ν gegeben oder die Curve specialisirt sein, welche der Punkt M auf dem Ellipsoid beschreiben soll.

In Art. XXIII ist eine geodätische Linie AD als Abscissenaxe angenommen und senkrecht zu derselben eine zweite geodätische Linie DC gezogen; nimmt man eine beliebige weitere geodätische Linie D′C′ an, welche AD ebenfalls senkrecht schneidet, und bestimmt die Punkte B′, C′ so, daß D′B′ = DB, B′C′ = BC ist, so erhält man zwei Systeme von rectangulären Linien, wovon die einen, senkrecht zur Abscissenaxe, geodätische sind, dagegen die andern BB′, CC′ . . . nicht (mit Ausnahme der Abscissenaxe selbst), sie haben übrigens die Eigenschaft, daß sie nach Art. XVI die ersteren senkrecht schneiden. Die in den folgenden Artikeln behandelte und in XXV 8) 9) 10) gelöste Aufgabe besteht darin, den Inhalt ς eines geodätischen Dreiecks ABC (Fig. 5) auf einer beliebigen Fläche (zunächst auf der Erde) zu bestimmen, wenn man dessen Seiten a, b, c, Winkel A, B, C und Krümmungsmaße α, β, γ in den Ecken kennt.

Figur 11.



Der allgemeine Ausdruck für das Krümmungsmaß ist nach XIX $k = -\frac{1}{n}\frac{d^2n}{dq^2}$ (m, p ist durch n, q ersetzt); da die Aufgabe unlösbar ist, so lange die Fläche nicht bestimmt ist, so wird zunächst für n in XXIII eine nach den Variabeln p, q fortschreitende Reihe mit den unbestimmten Coefficienten f, g . . . angenommen; durch zweimalige Differenziation derselben nach q, erhält man für k den Werth nach XXV

$$-2f - 6gq - (12h - 2f^2)\,q^2 - \ldots$$

und wenn diese Reihe gleich den 3 als bekannt vorausgesetzten Krümmungsmaßen α, β, γ gesetzt wird, so können, mit Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung, die unbestimmten Coefficienten f, g . . . eliminirt werden, wie aus den Gleichungen für ς in XXV erhellt.

Die aus geometrischen Betrachtungen abgeleitete Formel für das Differenzial des Flächeninhalts am Schlusse von XXIV enthält den Ausdruck $\int ndq$, da aber n in einer Reihe nach Potenzen von q entwickelt ist, so läßt sich dieses Integral (annäherungsweise) finden, und ebenso nach 7) in XXIV die Reihe für den Flächeninhalt selbst.

Wenn eine bestimmte Abscissenaxe AD auf der Fläche angenommen ist, so dient sie als Skala, auf welcher die Abscissen p ausschließlich gemessen werden;

sind D und D' unendlich nahe, so ist $DD' = dp$, um aber die Länge von BB' zu bestimmen, ist eine gewisse Variable nöthig, von Gauß mit n bezeichnet, welche für jeden Punkt der Fläche einen andern Werth hat, die also eine Funktion von p und q zugleich ist. Hat dieselbe für B den Werth n, so ist $BB' = ndp$, d. h. n ist ein Reductionsfactor, mit welchem die unendlich kleinen Abscissen dp multiplicirt werden müssen, um die entsprechenden Bögen BB' für einen Punkt B der Fläche zu erhalten.

Für die Polarcoordinaten r und φ hat man einen zweiten Reductionsfactor m; bewegt sich der Punkt B nach B', so bleibt q constant, r ändert sich um $dr = BM$ und der Endpunkt von r beschreibt den unendlich kleinen Bogen $B'M = md\varphi$. Bewegt sich B nach C, so bleibt p constant, r ändert sich um $dr = BN$ und der Endpunkt von r beschreibt den unendlich kleinen Bogen $CN = m \, . \, d\varphi$. Mittelst dieser Figur erhält man also die geometrische Erklärung der 4 ersten Formeln und XXIV; die zwei letzten folgen aus den ersten durch Elimination von ψ. Es ist nämlich

$$BM = BB' \, . \sin\psi \text{ oder } dr = ndp \, . \sin\psi$$
$$BN = BC \, . \cos\psi \text{ oder } dr = dq \, . \cos\psi$$
$$B'M = - BB' \, . \cos\psi \text{ oder } md\varphi = - ndp \cos\psi$$
$$CN = BC \, . \sin\psi \text{ oder } md\varphi = dq \sin\psi$$

Um die Reihe für r^2 zu finden [1], setzt man

$$\begin{aligned} r^2 = p^2 &+ Ap^2q^2 + Bp^3q^2 + Cp^4q^2 + \ldots \\ &+ q^2 + Dp^2q^3 + Ep^3q^3 \\ &\qquad + Fp^2q^4 + \ldots \end{aligned}$$

Hieraus durch Differenziation zuerst nach p und dann nach q

$$\begin{aligned} \frac{dr^2}{p} = 2p + 2Apq^2 &+ 3Bp^2q^2 + 4Cp^3q^2 \\ &+ 2Dpq^3 + 3Ep^2q^3 \\ &\qquad + 2Fpq^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dr^2}{dq} = 2q + 2Ap^2q &+ 2Bp^3q + 2Cp^4q \\ &+ 3Dp^2q^2 + 3Ep^3q^2 \\ &\qquad + 4Fp^2q^3 \end{aligned}$$

Nun ist $4n^2r^2 = \left(\frac{dr^2}{dp}\right)^2 + n^2 \left(\frac{dr^2}{dq}\right)^2$ und nach XXIII $n^2 = 1 + 2f^0 q^2 + 2f'pq^2 + \ldots$ also $4(p^2 + q^2) = 4p^2 + 4q^2$

$$(4A + 8f_0)\, p^2q^2 = 16Ap^2q^2 \,;\, A = \frac{2}{3} f^0$$

$$(4B + 8f')\, p^3q^2 = (12B + 8B)\, p^3q^2 \,;\, B = \frac{1}{2} f' \qquad \text{u. s. w.}$$

Aus der Reihe [1] bestimmt man $\frac{dr^2}{dp}$ und $\frac{dr^2}{dq}$, und findet hiedurch [2] und [3], man hat z. B. zur Bestimmung von $r \sin\psi$

$$\left\{ \begin{aligned} p + Apq^2 &+ Bp^2q^2 + Dp^3q^2 \\ &+ Cpq^3 + Fp^2q^3 \\ &\qquad + Gpq^4 + \ldots \end{aligned} \right\} 2 \left\{ \begin{aligned} 1 + f^0 q^2 &+ f'pq^2 + \ldots \\ &+ g^0q^3 \end{aligned} \right\}$$

$$= 2p + \frac{4}{3} f^0 pq^2 + \frac{3}{2} f' p^2 q^2 + g^0 pq^3 + \ldots$$

also $A = \frac{1}{3} f^0$, $B = -\frac{1}{4} \ldots$

Um die Gleichung [4] zu finden, setzt man

$$r \cos \varphi = p + Apq^2 + Bp^2q^2 + Dp^3q^2 + \ldots + Cpq^3 + Ep^2q^3 + Fpq^4$$

bestimmt hieraus $\frac{d\,(r \cos \varphi)}{dp}$ und $\frac{d\,(r \cos \varphi)}{dq}$ und setzt diese Werthe, sowie die Reihen für $r \sin \psi$ und $r \cos \psi$ aus [2] und [3], ferner für n in die Gleichung

$$r \sin \psi \frac{d\,(r \cos \varphi)}{dp} + n\, r \cos \psi \frac{d\,(r \cos \varphi)}{dq} = n\, r \cos \varphi$$

ein, woraus sich nach der Methode der unbestimmten Coefficienten die Werthe von A, B . . . ergeben.

Auf ähnliche Art erhält man die Formeln [5] und [6]. Bei [7] setzt man

$$S = \frac{1}{2} pq + Ap^3q + Cp^4q + \ldots + Bpq^3 + Dp^3q^2 + Ep^2q^3$$

bestimmt hieraus $\frac{dS}{dq}$, sowie aus der Reihe für $n \int ndq$, und setzt diese Werthe in $r \sin \psi \frac{dS}{dp} + n\, r \cos \psi \frac{dS}{dq} = r \sin \psi \int ndq$ ein. Letztere Gleichung läßt sich auch so schreiben: $dS + n \cot \psi \frac{dp}{dq} dS = dp \int ndq$.

Das erste dS ist die Zunahme von S, wenn bloß p variirt, also = Dreieck ACC' (Fig. 11.); das zweite dS ist die Zunahme von S, wenn bloß q variirt, also = Dreieck ABC. Ferner ist $dp \int ndq = \int ndp \,.\, dq = DCC'D'$ und nach den Werthen von $md\varphi$ auf S. 246 $n \cot \psi \frac{dp}{dq} = 1$ (wenn man $B'M = -CN$ setzt).

§. 4. Die Abbildung.

Die Aufgabe besteht darin, wenn zwei beliebige Flächen gegeben sind, und auf der ersten eine Figur, auf der zweiten eine entsprechende Figur zu construiren, welche der ersten in den kleinsten Theilen ähnlich ist. Die Lösung derselben, welche im Folgenden mit Benützung eines Aufsatzes von Jacobi (Crelle-Borchardt 1861) für die einfachsten Fälle gegeben ist, steht in so enger Verbindung mit den disq., daß sie sich unmittelbar an die Erläuterungen anschließt*). MNP ist ein unendlich kleines Dreieck auf der ersten Fläche und M'N'P' das correspondirende auf der zweiten, so müssen in beiden die Seiten proportionirt und die Winkel gleich sein. Zu diesem Zweck denkt man sich die Coordinaten x, y, z

*) Man vergleiche übrigens auch Gauß ges. Werke IV S. 193.

von M als Funktionen der Gauß'schen Variabeln p, q und bildet demgemäß die Gleichung

$$ds = MN = \sqrt{Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2}$$

ferner sollen die Coordinaten x' y' z' von M' (andere) Funktionen von denselben Variabeln p, q sein, also

$$ds' = M'N' = \sqrt{E'dp^2 + 2F'dpdq + G'dq^2}$$

Hieraus leitet man die Bedingungsgleichungen (m = const.) ab

$$E = mE' \qquad F = mF' \qquad G = mG'$$

welche aus der Ähnlichkeit der beiden unendlich kleinen Dreiecke folgen.

Für die Auflösung der Aufgabe genügt es nun, wenn man für die eine Fläche eine Ebene nimmt, welche die Vermittlung zwischen beiden übernimmt. Denn kann man unter der gegebenen Bedingung jede Fläche auf einer Ebene und die Ebene auf jeder Fläche abbilden, so kann man unter derselben Bedingung auch jede Fläche auf jeder andern abbilden.

Es seien x und y die rechtwinkligen Coordinaten eines Punkts der Ebene, so ist

$$ds'^2 = M'N'^2 = dx^2 + dy^2 = m^2 (Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2)$$

ferner nach der Definition von E, F, G (Art. XI)

$$\left(\frac{\delta x}{\delta p}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{\delta p}\right)^2 = m^2E, \left(\frac{\delta x}{\delta q}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{\delta q}\right)^2 = m^2G, \frac{\delta x}{\delta p}\frac{\delta x}{\delta q} + \frac{\delta y}{\delta p}\frac{\delta y}{\delta q} = m^2F$$

wo durch δ angedeutet ist, daß die Ableitungen partiell sind. Da die Elemente dp und dq gänzlich von einander unabhängig, $dx + idy$, $dx - idy$ $(i = \sqrt{-1})$ lineare Funktionen derselben sind, so kann man diese Ausdrücke definiren als lineare Faktoren des quadratischen Ausdrucks $Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2$, welche zugleich vollständige Differenziale sind; dasselbe gilt von den Ausdrücken, welche man erhält, wenn man $dx + idy$ und $dx - idy$ noch mit beliebigen Funktionen respective von $x + iy$ und $x - iy$ multiplicirt; um daher x und y auf die allgemeinste Art als Funktionen von p und q zu finden, zerfälle man den gegebenen Ausdruck des Quadrats des Linienelements $Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2$ in seine linearen Faktoren, multiplicire jeden derselben mit einer solchen Funktion von p und q, daß er ein vollständiges Differenzial wird und setze die beiden Integrale beliebigen Funktionen respective von $x + iy$ und $x - iy$ gleich. Es ist also

$$dx^2 + dy^2 = (dx + idy)(dx - idy)$$

$$Edp^2+2Fdpdq+Gdq^2 = \frac{m^2}{E}\left\{Edp + Fdq + \sqrt{EG-F^2}\,.\,idq\right\}\left\{Edp + Fdq - \sqrt{EG-F^2}idq\right\}$$

somit

$$dx + idy = \frac{m}{\sqrt{E}}(Edp + Fdq + \sqrt{EG-F^2}\,.\,idq)$$

$$dx - idy = \frac{m}{\sqrt{E}}(Edp + Fdq - \sqrt{EG-F^2}\,.\,idq)$$

Das Integral links ist $x + iy$ und $x - iy$; um das Integral rechts zu erhalten, muß man mit dem integrirenden Faktor multipliciren, um die Variabeln zu trennen, dann entstehen durch Vergleichung der reellen und der imaginären Theile beiderseits zwei Gleichungen, wovon die eine x, die andere y als Funktion

von p und q angibt. Da jedem Punkt M auf der Fläche ein bestimmtes Werthepaar p, q entspricht, so geben diese Gleichungen die Werthe für die Coordinaten x, y des entsprechenden Punkts M' in der Ebene an.

Zunächst folgt nun der Beweis des Satzes aus der ebenen Geometrie, wenn in zwei Dreiecken die Seiten proportionirt sind, so sind die Winkel gleich, angewendet auf die correspondirenden Dreiecke MNP und M'N'P' beider Flächen.

M und M' sind 2 correspondirende Punkte beider Flächen, d. h. die Coordinaten x' y' z' von M' sind Funktionen der Coordinaten xyz von M, beide aber sind Funktionen der neuen Veränderlichen p und q, welche den zwei Flächen gemeinschaftlich sind, also entsprechen den unendlich nahen Punkten N auf der ersten und N' auf der zweiten Fläche die Coordinaten p + dp, q + dq. Nehmen wir an, das Verhältniß $\frac{MN}{M'N'} = \frac{ds}{ds'}$ sei constant, und = m, so ist

$$Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2 = m^2 \left\{ E'dp^2 + 2F'dpdq + G'dq^2 \right\}$$

Wenn diese Gleichung bestehen soll, unabhängig von jeder Relation zwischen dp und dq, oder wenn das Verhältniß m constant sein soll für irgend zwei von M und M' ausgehende Elemente, so ist

$$1. \quad E = mE' \qquad F = mF' \qquad G = mG'$$

Nehmen wir nun zwei weitere unendlich nahe Punkte an, P auf der ersten, P' auf der zweiten Fläche, welchen die Coordinaten p + dp', q + dq' entsprechen, so wird man die Gleichungen haben (x + dx, y + dy, z + dz sind die Coordinaten von N, x + dx', y + dy', z + dz' diejenigen von P)

$$\cos PMN = \frac{dxdx' + dydy' + dzdz'}{MN \,.\, MP}$$

$$= \frac{(adp+a'dq)\,(adp'+a'dq')+(bdp+b'dq)\,(bdp'+b'dq')+(cdp+c'dq)\,(cdp'+c'dq')}{MN \,.\, MP}$$

$$= \frac{Edpdp' + F\,(dpdq' + dp'dq) + Gdqdq'}{\sqrt{Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2}\;\sqrt{Edp'^2 + 2Fdp'dq' + Gdq'^2}}$$

Da aber dieselben Variabeln dp, dq, dp', dq' auch für die Punkte M' und P' auf der zweiten Fläche gelten, so ist auch

$$\cos P'M'N' = \frac{E'dpdp' + F'\,(dpdq' + dp'dq) + G'dqdq'}{\sqrt{E'dp^2 + 2F'dpdq + G'dq^2}\;\sqrt{E'dp'^2 + 2F'dp'dq' + G'dq'^2}}$$

also nach 1. $\cos PMN = \cos P'M'N'$.

Hieraus folgt, daß, welches auch die unabhängigen Variabeln p und q sein mögen, wenn die Gleichungen 1. stattfinden, welche auf der Voraussetzung beruhen, daß das Verhältniß zwischen zwei correspondirenden Linienelementen auf beiden Flächen constant ist, damit auch die Gleichheit der Winkel zwischen zwei solchen Elementen bedingt ist. Zwei correspondirende Dreiecke in beiden Flächen, MNP und M'N'P' sind also einander ähnlich.

Zerlegung des Ausdrucks $ds^2 = Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2$ in 2 imaginäre Faktoren.

Setzt man $\sqrt{-1} = i$, so ist

$$Edp^2+2Fdpdq+Gdq^2 = \frac{1}{E}\left\{Edp + Fdq + \sqrt{EG - F^2}\,.\,idq\right\}\left\{Edp + Fdq - \sqrt{EG - F^2}\,.\,idq\right\}$$

Läßt sich nun die Differenzialgleichung $Edp + Fdq + \sqrt{EG - F^2}\, idq = o$ integriren, mit Hülfe eines (erst zu bestimmenden) Faktors $\mu + i\nu$, der sie zu einem vollständigen Differenzial macht, und ist analog $\mu - i\nu$ der integrirende Faktor von der zweiten Differenzialgleichung $Edp + Fdq - \sqrt{EG - F^2}\, idq = o$ so hat man die beiden Relationen

$$(\mu + \nu i)\,(Edp + Fdq + \sqrt{EG - F^2}\, idq) = d\alpha + id\beta$$

$$(\mu - \nu i)\,(Edp + Fdq - \sqrt{EG - F^2}\, idq) = d\alpha - id\beta$$

somit

$$ds^2 = \frac{1}{(\mu^2 + \nu^2)E}\,(d\alpha^2 + d\beta^2) = \lambda\,(d\alpha^2 + d\beta^2)$$

Bei der zweiten Fläche ist $ds_1{}^2 = \lambda_1\,(d\alpha_1{}^2 + d\beta_1{}^2)$ α_1 und β_1 sind Größen, welche durch Integration von $E_1dp + F_1dq \pm \sqrt{E_1G_1 - F_1{}^2}\, idq = o$ gefunden worden, und Funktionen der unabhängigen Variabeln α und β; die Relation $ds^2 = m^2ds_1{}^2$ besteht auch hier, oder

$$\lambda\,(d\alpha^2 + d\beta^2) = m^2\,\lambda_1\,(d\alpha_1{}^2 + d\beta_1{}^2)$$

Nun ist

$$d\alpha_1 = \frac{\delta\alpha_1}{\delta\alpha}\,d\alpha + \frac{\delta\alpha_1}{\delta\beta}\,d\beta \qquad d\beta_1 = \frac{\delta\beta_1}{\delta\alpha}\,d\alpha + \frac{\delta\beta_1}{\delta\beta}\,d\beta$$

$$\left(\frac{\delta\alpha_1}{\delta\alpha}\,d\alpha + \frac{\delta\alpha_1}{\delta\beta}\,d\beta\right)^2 + \left(\frac{\delta\beta_1}{\delta\alpha}\,d\alpha + \frac{\delta\beta_1}{\delta\beta}\,d\beta\right)^2 = \frac{\lambda}{m^2\lambda_1}\,(d\alpha^2 + d\beta)^2 \text{ also}$$

$$\left(\frac{\delta\alpha_1}{\delta\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\delta\beta_1}{\delta\alpha}\right)^2 = \left(\frac{\delta\alpha_1}{\delta\beta}\right)^2 + \left(\frac{\delta\beta_1}{\delta\beta}\right)^2 = \frac{\lambda}{m^2\lambda_1}$$

$$\frac{\delta\alpha_1}{\delta\alpha}\,\frac{\delta\alpha_1}{\delta\beta} + \frac{\delta\beta_1}{\delta\alpha}\,\frac{\delta\beta_1}{\delta\beta} = o \quad \text{Wir setzen}$$

$$\frac{\delta\alpha_1}{\delta\alpha} = n\,\frac{\delta\beta_1}{\delta\alpha} \text{ also } \frac{\delta\alpha_1}{\delta\beta} = -\frac{1}{n}\,\frac{\delta\beta_1}{\delta\beta}$$

$$\frac{\delta\beta_1}{\delta\beta} = \pm\, n\,\frac{\delta\beta_1}{\delta\alpha} = \pm\frac{\delta\alpha_1}{\delta\alpha},\ \frac{\delta\alpha_1}{\delta\beta} = \mp\frac{\delta\beta_1}{\delta\alpha},\ \frac{\delta\alpha_1}{\delta\alpha} = \pm\frac{\delta\beta_1}{\delta\beta}$$

$$\frac{\delta\,(\alpha_1 + i\beta_1)}{\delta\beta} = \mp\frac{\delta\beta_1}{\delta\alpha} \pm i\,\frac{\delta\alpha_1}{\delta\alpha} = \pm\, i\,\frac{\delta\,(\alpha_1 + i\beta_1)}{\delta\alpha} \text{ und durch Integration}$$

1. $\alpha_1 \pm i\beta_1 = f\,(\alpha \mp i\beta)$ hieraus findet man

$$d\alpha_1 + id\beta_1 = f'\,(\alpha \mp i\beta)\,(d\alpha \mp id\beta) \quad d\alpha_1 - id\beta_1 = f'\,(\alpha \pm i\beta)\,(d\alpha \pm id\beta)$$

$$d\alpha_1{}^2 + d\beta_1{}^2 = f'\,(\alpha \mp i\beta)\,f'\,(\alpha \pm i\beta)\,(d\alpha^2 + d\beta^2)$$

2. $m = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1}\,f'\,(\alpha + i\beta)\,f'\,(\alpha - i\beta)}$

Das einfachste Beispiel für die Abbildung erhält man dann, wenn beide Flächen Ebenen sind, wir bezeichnen die eine Ebene e mit kleinen und die andere E mit den entsprechenden großen Buchstaben. Die Bedingungsgleichung für die Ähnlichkeit in den kleinsten Theilen ist

$$dX^2 + dY^2 = m^2\,(dx^2 + dy^2) \text{ oder}$$

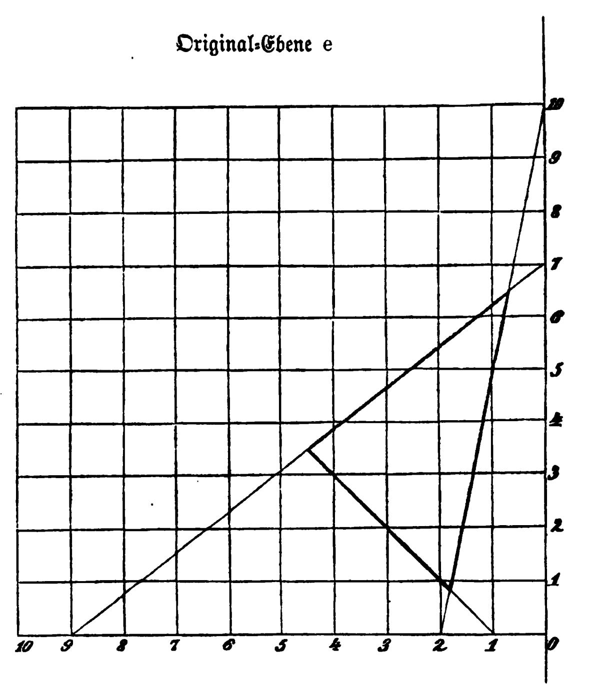
$$(dX + dYi)\,(dX - dYi) = m^2\,(dx + dyi)\,(dx - dyi)$$

welche Gleichung in 2 andere zerfällt, wovon wir bloß eine $dX + dYi = m(dx + dyi)$ betrachten. Ist m constant, d. h. das Verhältniß zweier correspondirenden unendlich kleinen Strecken in beiden Ebenen durchaus dasselbe, so erhält man durch Integration $X + Yi = m(x + yi)$, somit $X = mx$, $Y = my$. Dieß ist der Fall der Ähnlichkeit im Euclidischen Sinn, wo nicht bloß 2 unendlich kleine, sondern irgend welche correspondirende Strecken proportionirt sind. Ist aber allgemein $X \pm Yi = f(x \pm yi)$, so findet man durch Differenziation $dX \pm dYi = f'(x \pm yi)(dx \pm dyi)$ hier ist also der Coefficient $f'(x \pm yi)$ in jedem Punkt (x, y) von e ein anderer, und die Ähnlichkeit bezieht sich nur auf die kleinsten Theile, d. h. zwei unendlich kleine Dreiecke in der Nähe der correspondirenden Punkte (X, Y) und (x, y) haben gleiche Winkel und ihre Seiten haben ein bestimmtes Verhältniß. In zwei andern correspondirenden Punkten findet dasselbe statt, nur hat hier das Verhältniß der Seiten einen andern Werth, also findet bei der Abbildung als allgemeiner Auffassung der Ähnlichkeit zwar noch die Gleichheit der Winkel, unter welchen sich 2 Paare correspondirender Linien schneiden und die Proportionalität unendlich kleiner, aber nicht mehr endlicher Strecken statt.

Setzt man z. B. $X + Yi = (x + yi)^{-1}$, so ist $Xx - Yy - 1 = o$
$Xy + Yx = o$, $X = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $Y = -\frac{y}{x^2 + y^2}$, $X^2 + Y^2 = \frac{1}{x^2 + y^2}$,
dieß ist also die Transformation durch reciproke Radienvectoren, wo das Product von 2 entsprechenden Radien constant ist.

Ist ferner $X + Yi = \sqrt{x + yi}$, so erhält man durch Quadriren und Vergleichen der reellen und der imaginären Theile je unter sich $X^2 - Y^2 = x$, $2XY = y$. Der Parallelen Schaar $x = \pm a$, wo a eine Constante ist, der man aber verschiedene Werthe beilegen kann, um von einer Parallelen zur andern in der Ebene e überzugehen, entspricht in E eine Reihe gleichseitiger Hyperbeln, $X^2 - Y^2 = \pm a$, deren Brennpunkte auf der x und y Axe liegen. Der Parallelen Schaar $y = \pm b$ entspricht eine Reihe gleichseitiger Hyperbeln, deren Axen um 45° gedreht sind.

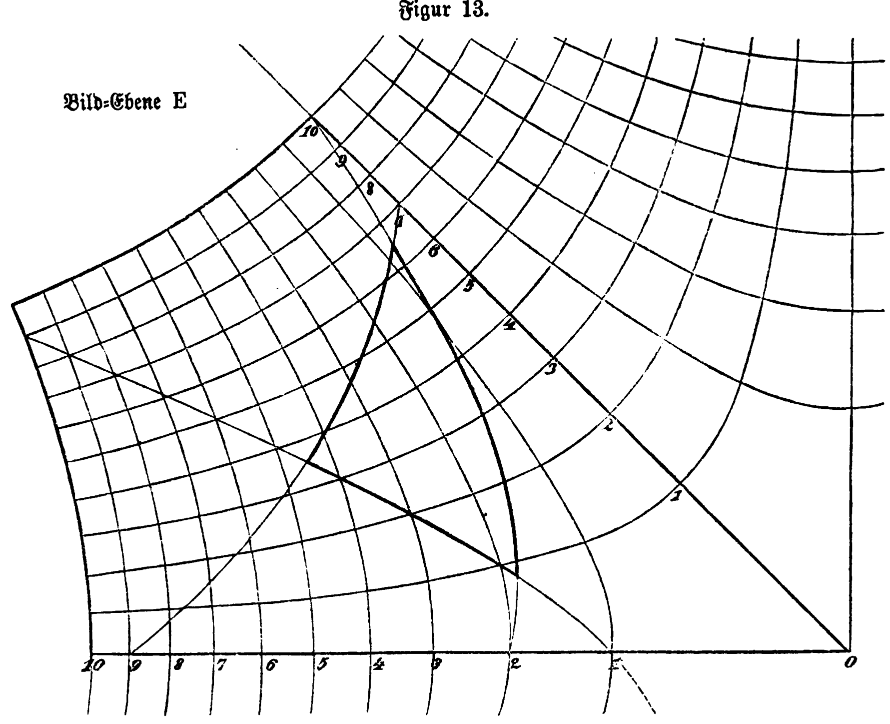
Figur 12.



Bewegt sich ein Punkt in e auf der Geraden $y = mx + n$, so erhält man durch Elimination die correspon-

dirende Curve in E $-mX^2+mY^2+2XY=n$, also wieder eine gleichseitige Hyperbel. Führt man Polarcoordinaten ein, setzt also $X+Yi=R(\cos\Phi+i\sin\Phi)$ und $x+yi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, so erhält man in diesem Fall

Figur 13.



$$R(\cos\Phi+i\sin\Phi)=\sqrt{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right),$$

so daß $R=\sqrt{r}$ (gleich der mittleren Proportionale von r und der Linieneinheit). Jedem Punkt a in e entspricht ein Punktepaar A_1 und A_2 in E, dessen Verbindungslinie durch den Nullpunkt halbirt wird. Ein Vector R in der Originalebene bildet mit der x Axe einen doppelt so großen Winkel, als der entsprechende Vector r in der Bildebene.

Hieraus geht hervor, daß bei der Abbildung von Ebene auf Ebene keine Integration von Differenzialgleichungen nöthig ist, sondern man kann unmittelbar aus $X+Yi=f(x+yi)$ durch Spezialisirung der Funktion f und nachherige Gleichsetzung der reellen und imaginären Theile jede Art von Abbildung erhalten*).

Soll dagegen die Kugel auf der Ebene abgebildet werden, so ist nach dem Obigen

$$ds^2=Edp^2+2Fdpdq+Gdq^2=dp^2+\sin p^2dq^2$$

$$Edp+Fdq\pm\sqrt{EG-F^2}\,.\,idq=\frac{dp}{\sin p}\pm idq$$

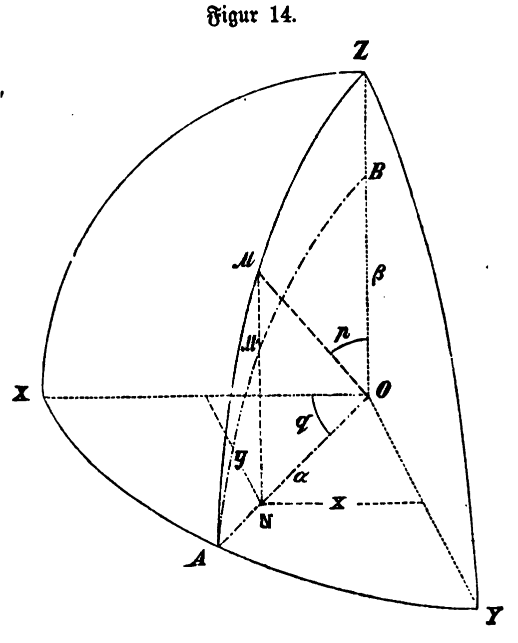
*) Zu vergleichen: Holzmüller, Die isogonalen Verwandtschaften und conformen Abbildungen mit Anwendungen auf mathem. Physik. 1882.

Aus $\frac{dp}{\sin p} + idq = o$ folgt $q + il \cot \frac{p}{2} = const.$ und aus

$\frac{dp}{\sin p} - idq = o$ $q + il\ tg \frac{p}{2} = const.$

Nachdem diese Integration durchgeführt ist, kann man erst $x + yi = f\left(q + il \cot \frac{p}{2}\right)$ setzen, und wird dann durch Specialisirung der Function f und Vergleichung der reellen und imaginären Theile jede Art von Abbildung der Kugel auf der Ebene erhalten, d. h. wenn irgend eine Figur auf der Kugel in den Polarcoordinaten p und q gegeben ist, so erhält man ihr Bild in der Ebene in den Cartesischen Coordinaten x und y.

Figur 14.



Die Mercatorsprojection.

x und y sind Coordinaten eines Punkts in der Ebene auf rechtwinklige Axen bezogen. Man setze

$x + yi = k\left(q + il\ .\ tg \frac{p}{2}\right)$ so theilt sich diese Gleichung in 2 andere

$x = kq \qquad y = kl\ .\ tg \frac{p}{2}$

$f'(\alpha + i\beta) = f'(\alpha - i\beta) = k \qquad \lambda = \alpha \sin p \qquad \acute{\lambda}_1 = k \qquad m = \frac{\alpha \sin p}{k}$

Wenn q constant ist, so ist es auch x, also entsprechen den Meridianen auf der Kugel, in der Abbildung auf der Ebene nach Mercators Projection Gerade parallel mit der y Axe. Ist p constant, so ist es auch y, d. h. den Parallelkreisen auf der Kugel entsprechen Gerade parallel mit der x Axe in der Projection. Der Coordinaten Ursprung in der Abbildung repräsentirt denjenigen Punkt auf dem Äquator, dessen Länge = o ist. Für alle Punkte des Äquators ist $m = \frac{\alpha}{k}$ und wird um so kleiner oder $\frac{1}{m}$ um so größer, je mehr man sich den Polen nähert.

Die stereographische Projection.

I. x und y sind wieder, wie oben, rechtwinklige Coordinaten in der Bildebene. Wir setzen

$$x + yi = k \,.\, e^{i\left(q \pm il \,.\, tg \frac{p}{2}\right)} \quad \text{Nun ist}$$

$$e^{i\left(q + i \,.\, l \,.\, tg \frac{p}{2}\right)} = e^{iq} \,.\, e^{-l \,.\, tg \frac{p}{2}} = (\cos q + i \sin q) \operatorname{cotg} \frac{p}{2}$$

also

$$x = k \,.\, \cos q \frac{\sin p}{1 + \cos p} \quad y = k \,.\, \sin q \frac{\sin p}{1 + \cos p} \quad \frac{1}{m} = \frac{\alpha}{k}(1 + \cos p)$$

$$y = x \operatorname{tg} q \qquad x^2 + y^2 = k^2 \operatorname{tg}^2 \frac{p}{2}$$

Die Meridiane auf der Kugel sind auf der Bildebene in Gerade verwandelt, die durch den Coordinatenursprung gehen; die Parallelkreise in concentrische Kreise. k ist der Halbmesser des Kreises in der Bildebene, welcher dem Äquator entspricht ($p = 90^0$), der Ursprung ist das Bild des Nordpols ($p = o$); die positive x Axe repräsentirt den Meridian o, die y Axe den Meridian 90^0. Der Werth von m variirt zwischen $\frac{a}{k}$ und $\frac{2a}{k}$

$$\text{II.} \quad x + yi = \frac{k}{i} \frac{e^{i\left(q \pm il \,.\, tg \frac{p}{2}\right)} - 1}{e^{i\left(q \pm il \,.\, tg \frac{p}{2}\right)} + 1}$$

$$x = k \sin q \frac{\sin p}{1 + \cos q \sin p}, \; y = k \frac{\cos p}{1 + \cos q \sin p}, \; m = \frac{k}{\alpha(1 + \cos q \sin p)}$$

$$x^2 + y^2 + 2kx \operatorname{tg} q = k^2 \qquad x^2 + y^2 - \frac{2k}{\cos p} y = -k^2$$

Die Meridiane sind also Kreise mit dem veränderlichen Halbmesser $\frac{k}{\sin q}$, deren Mittelpunkte die Coordinaten $-k \operatorname{cotg} q$ und o haben. Die Parallelkreise sind auch durch Kreise vorgestellt, mit dem Halbmesser ktgp, ihre Mittelpunkte haben die Coordinaten o und $\frac{k}{\cos p}$ der Ursprung $q = o$, $p = 90^0$ entspricht einem Punkt des Äquators, die x Axe dem Äquator und die y Axe dem Meridian o. m wechselt zwischen $\frac{k}{\alpha}$ und $\frac{k}{2n}$. Bei dieser Projection wird die Hemisphäre von einem Punkt des Äquators aus gesehen.

Das abgeplattete Rotationsellipsoid: $\frac{x^2 + y^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\beta^2} = 1$

q bedeutet die Länge von einem Ort M' auf der Erde und p die Breite desselben, d. h. den Winkel, welchen die Normale der Ellipse AM'B in M' mit AO bildet.

$$x = \frac{\alpha \cos q \cos p}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 p}} \qquad y = \frac{\alpha \sin q \cos p}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 p}}$$

$$z = \frac{\alpha(1 - c^2) \sin p}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 p}} \qquad c^2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2}$$

$$a = \frac{-\alpha \cos q \cos p (1-c^2)}{(1-c^2 \sin^2 p)^{\frac{3}{2}}},\ b = \frac{-\alpha \sin q \sin p (1-c^2)}{(1-c^2 \sin^2 p)^{\frac{3}{2}}},\ c = \frac{\alpha \cos p\ (1-c^2)}{(1-c^2 \sin^2 p)^{\frac{3}{2}}}$$

$$a' = \frac{-\alpha \sin q \cos p}{(1-c^2 \sin^2 p)^{\frac{1}{2}}} \qquad b' = \frac{\alpha \cos p \cos q}{(1-c^2 \sin^2 p)^{\frac{1}{2}}} \qquad c' = o$$

$$E = \frac{\alpha^2 (1-c^2)^2}{(1-c^2 \sin^2 p)^3} \qquad F = o \qquad G = \frac{\alpha^2 \cos^2 p}{1-c^2 \sin^2 p}$$

$$Edp + Fdq + \sqrt{EG - F^2}\,.\,i\,dq = dq + i\,\frac{(1-c^2)\,dp}{(1-c^2 \sin^2 p) \cos p} = o$$

$$q + i\,(1-c^2)\int \frac{dp}{(1-c^2 \sin^2 p) \cos p} = \alpha_1 + i\beta_1$$

$$\alpha_1 = q \quad \beta_1 = (1-c^2)\int \frac{dp}{(1-c^2 \sin^2 p) \cos p}$$

Um dieses Integral zu finden, setzen wir $\sin p = x$,

$$\int \frac{dp}{(1-c^2 \sin^2 p) \cos p} = \int \frac{dx}{(1-c^2 x^2)(1-x^2)}.$$

$$= \int \left(\frac{dx}{1+x} + \frac{dx}{1-x} - c^2 \frac{dx}{1-cx} - c^2 \frac{dx}{1+cx} \right) \frac{1}{2\,(1-c^2)} = \frac{1}{2\,(1-c^2)}$$

$$l\,.\left\{ \frac{1+\sin p}{1-\sin p} \left(\frac{1-c \sin p}{1+c \sin p} \right)^c \right\}$$

$$= \frac{1}{1-c^2}\, l\,.\left\{ tg\left(45 + \frac{p}{2}\right) \left(\frac{1-c \sin p}{1+c \sin p} \right)^{\frac{c}{2}} \right\} \text{ also}$$

$$\alpha = q \qquad \beta_1 = l\,.\left\{ tg\left(45 + \frac{p}{2}\right)\left(\frac{1-c \sin p}{1+c \sin p} \right)^{\frac{c}{2}} \right\}$$

In der Bildebene nehmen wir zwei rechtwinklige Axen der x und y an, dann ist

$$x + iy = f\left\{ q \pm il\,.\left\{ tg\left(45 + \frac{p}{2}\right)\left(\frac{1-c \sin p}{1+c \sin p} \right)^{\frac{c}{2}} \right\} \right\} = \varphi$$

$$= f\left\{ q \pm il\,.\left\{ tg\left(45 - \frac{p}{2}\right)\left(\frac{1+c \sin p}{1-c \sin p} \right)^{\frac{c}{2}} \right\} \right\} = \psi$$

$$m = \frac{\sqrt{1-c^2 \sin^2 p}}{\alpha \cos p} \sqrt{\varphi' . \psi'}$$

Abbildung von Rotationsflächen auf der Ebene.

Statt der Kugel in Figur 14 sei eine beliebige Rotationsfläche gegeben, deren Meridian AMZ die Gleichung $z = F(p)$ hat; p ist der Halbmesser des Parallelkreises von M. Nun ist

$$x = p\cos q \quad y = p\sin q \quad ds^2 = Edp^2 + p^2dq^2 \quad E = 1 + \left(\frac{dz}{dp}\right)^2$$

also sind $\sqrt{E}\,\frac{dp}{p} + dqi$ und $\sqrt{E}\,\frac{dp}{p} - dqi$ die integrirenden Factoren, und somit

$$f(x+yi) = \int\sqrt{E}\,\frac{dp}{p} + qi \qquad f(x+yi) = \int\sqrt{E}\,\frac{dp}{p} - qi$$

Abbildung von Kegelflächen auf der Ebene.

$$x = p\cos q \qquad y = p\sin q\cos\nu \qquad z = p\sin q\sin\nu$$

Die Spitze des Kegels ist im Ursprung O, M sei ein Punkt auf der Kegelfläche, so ist $OM = p$, $MOX = q$, ν ist der Winkel, den die Projection von OM auf der yz Ebene mit der y Axe bildet.

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dp^2 + p^2A^2d\mu^2 \qquad A^2 = 1 + \sin q^2\left(\frac{d\nu}{dq}\right)^2$$

da ν eine Funktion bloß von μ ist. Also sind $\frac{dp}{p} + Aidq$ und $\frac{dp}{p} - Aidq$ die beiden integrirenden Factoren vom Quadrat des Linienelements des Kegels, und daher wenn man $\int\sqrt{dq^2 + \sin q^2 d\nu^2} = \varsigma$ setzt,

$$f(x+yi) = lp + \varsigma i \qquad f(x-yi) = lp - \varsigma i$$

Setzt man $f(x \pm yi) = l(x \pm yi)$, so ist $x = p\cos\varsigma \quad y = p\sin\varsigma$

Diese specielle Form der Abbildung entspricht der Abwicklung des Kegelmantels.

Abbildung von Cylinderflächen auf der Ebene.

$$x = p \qquad y = F(p) \qquad z = q$$

Die Mantellinien sind parallel der z Axe, also ist y eine Function bloß von x und z von x und y unabhängig. $dx^2 + dy^2 + dz^2 = Edp^2 + dq^2$ $E = 1 + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2$

Die beiden integrirenden Factoren des Linienelements auf dem Cylinder sind

$$\sqrt{E}\,dp + idq \qquad \sqrt{E}\,dp - idq$$

Setzt man $\int\sqrt{E}\,dp = \int\sqrt{dx^2 + dy^2} = \varsigma$, wo ς den Bogen des Schnitts vom Cylinder mit der xy Ebene bedeutet, so ist $f(x+yi) = \varsigma + iz$ $f(x-yi) = \varsigma - iz$.

Setzt man $f(x+yi) = x + yi$, so wird $x = \varsigma$ $y = z$, welches die der Abwicklung des Cylindermantels entsprechende Abbildung ist*).

---

*) Zu vergleichen: Holzmüller, einige Aufgaben der darstellenden Geometrie und der Kartographie (Zeitschrift von Hoffmann für mathem. und naturwiss. Unterricht XIV, 6.)

III. Zusätze.

§. 1. Einleitung.

Wir ziehen in einem Punkt α auf einer Fläche die Normale und parallel mit derselben durch den Mittelpunkt einer Kugel, deren Halbmesser gleich Eins, eine Gerade, welche die Kugelfläche in A trifft, so haben wir zwei entsprechende Punkte α und A, wovon der eine auf der beliebig angenommenen Fläche liegt und der andere auf der Kugel. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens läßt sich zu jeder Linie oder Figur auf der Fläche eine entsprechende auf der Kugel construiren, welche man als ein Bild davon betrachten kann. Wir brauchen zu diesem Zwecke bloß durch alle Punkte der gegebenen Linie oder Figur die Normalen der Fläche zu ziehen, und parallel mit jeder Normale einen Kugelhalbmesser, deren Endpunkte sofort die correspondirende sphärische Figur bilden werden. Gauß hat diese Methode seinen Untersuchungen über die Flächen zu Grunde gelegt, und gelangte so zu folgenden Theoremen, welche ganz geeignet sind, den Werth derselben zu zeigen:

Einem unendlich kleinen Kreis (oder Dreieck) auf der Fläche entspricht ein ebenfalls unendlich kleiner Kreis oder ein Dreieck auf der Kugel; das Verhältniß des Inhalts beider Kreise oder Dreiecke, d. h. das Krümmungsmaß, ist gleich $\frac{1}{R \cdot R'}$; R und R' sind die Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche in dem gegebenen Punkte. (Art. X.)

Indem hierauf Gauß das Produkt $\frac{1}{R \cdot R'}$ ausdrückt als eine Funktion von zwei neuen Variabelen p und q, von welchen die gewöhnlichen Coordinaten der Fläche x, y, z ebenfalls als Funktionen betrachtet werden, schließt er weiter, da das Element ds irgend einer Linie auf der Fläche sich auch als eine Funktion der genannten Variabelen darstellen läßt, daß die beiden Größen $\frac{1}{R \cdot R'}$ und ds zugleich constant und zugleich veränderlich sind. Da nun ds constant bleibt, wenn die gegebene Fläche beliebig gebogen wird, ohne Dehnung oder Pressung, so findet dasselbe auch bei dem Produkte $\frac{1}{R \cdot R'}$ statt (Art. XII). Es fällt hier sogleich in die Augen, daß bei einer Flächenbiegung auch jede andere Größe, außer $\frac{1}{R \cdot R'}$ konstant bleiben muß, welche als Funktion jener Variabelen sich darstellen läßt.

Der dritte Satz endlich, der aus der Anwendung der Gauß'schen Methode hervorging, bezieht sich auf die Winkelsumme in einem geodätischen Dreieck (Polygon) auf einer Fläche; dieselbe wird durch den Inhalt des correspondirenden Dreiecks auf der Kugel gemessen (Art. XX).

Dieß sind die drei wichtigsten Sätze der Disquisitiones circa superficies curvas, und werden genügen, um die Fruchtbarkeit des Gedankens zu zeigen, welcher ihnen zu Grunde liegt. Man gewinnt auf diesem Wege ein

Mittel, Eigenschaften der Linien auf den Flächen zu entdecken durch Betrachtung der viel einfacheren sphärischen Curven, welche Eigenschaften ohne Hülfe der letzteren wohl schwer zu erkennen sein würden. Im Folgenden soll eine Anwendung des Gauß'schen Princips in dieser Richtung gemacht werden.

§. 2. Über einige allgemeine Beziehungen zwischen den Linien auf den Flächen und den correspondirenden sphärischen Curven.

Zunächst mögen einige allgemeine Relationen angegeben werden, welche zwischen einer beliebigen Linie oder mehreren auf einer Fläche und den entsprechenden sphärischen Curven stattfinden. Wenn wir durch alle Punkte einer solchen Linie die Flächen-Normalen ziehen, und mit jeder Normale einen parallelen Kugelhalbmesser, so bilden die Endpunkte der letzteren auf der Kugel die entsprechende sphärische Curve.

In diesem Satz ist die erste Erweiterung der Gauß'schen Methode enthalten; berücksichtigt man bloß die Flächen-Normalen einer Linie auf einer Fläche, so erhält man durch Übertragung auf die Kugel die correspondirende sphärische Figur. Werden aber auch die conjugirten Tangenten der Linie beigezogen, so entsteht durch Übertragung auf die Kugel eine zweite sphärische Figur, welche die Polarfigur der ersten ist. Zwischen beiden besteht eine merkwürdige Beziehung, die in IV, §. 5 nachgewiesen ist: Die Summe des Inhalts der einen und des Umfangs der andern ist = 360.

Die Polarfigur wird von den Polen der in Satz 2 genannten größten Kreise auf der Kugel beschrieben. Ihr Umfang ist gleich der Summe der Drehungen, welche die conjugirte Tangente einer (geschlossenen) Linie auf einer Fläche ausführt, wenn sie von einer bestimmten Lage über alle Punkte der Linie geht und dann wieder in die Anfangslage zurückkehrt.

1. Schneiden sich mehrere Linien auf einer Fläche in Einem Punkte, so werden sich auch die ihnen entsprechenden sphärischen Curven in Einem Punkte schneiden. In dem Durchschnittspunkte auf der Fläche läßt sich nur Eine Flächen-Normale ziehen (ausgezeichnete Punkte der Flächen, wie Spitzen u. s. f., welche mehrere Normalen zulassen, berücksichtigen wir nicht), also entspricht derselben nur Ein paralleler Kugelhalbmesser.

α und α' seien zwei unendlich nahe Punkte einer Linie auf der Fläche, und A und A' die entsprechenden Punkte der Kugel, deren Mittelpunkt O ist. Da die Normalen in α und α' parallel sind den Halbmessern OA und OA', so stehen die Tangential-Ebenen der Fläche in α und α' senkrecht auf OA und OA', mithin ist die Durchschnittslinie dieser Tangential-Ebenen, oder die konjugirte Tangente des Elements $\alpha\alpha'$, senkrecht auf der Ebene OAA'. AA' ist eine Tangente der entsprechenden sphärischen Curve; wir schließen somit:

2. Die konjugirten Tangenten einer Linie auf der Fläche stehen senkrecht auf den Ebenen der die sphärische Curve in den entsprechenden Punkten berührenden größten Kreise.

Wenn sich zwei Linien auf der Fläche berühren, so haben sie ein Element $\alpha\alpha'$ gemeinschaftlich, somit haben sie auch die diesem Element konjugirte Tangente gemein; also fallen die zwei größten Kreise, welche die sphärischen Curven in den entsprechenden Punkten A und A' berühren, zusammen; diese Curven haben demnach auch das Element AA' gemein, d. h. sie berühren sich.

Findet bei zwei Linien auf der Fläche eine Berührung zweiter Ordnung statt, so haben sie drei auf einander folgende Punkte α, α', α'' oder zwei Elemente $\alpha\alpha'$ und $\alpha'\alpha''$ gemein; somit sind auch die konjugirten Tangenten dieser Elemente beiden Curven gemeinschaftlich. Die größten Kreise, welche die sphärischen Curven berühren, gehen durch die entsprechenden Punkte A, A' und A'', also haben diese Curven drei Punkte oder zwei auf einander folgende Elemente gemein, und berühren sich ebenfalls in der zweiten Ordnung.

Die gleiche Schlußweise läßt sich auf den Fall ausdehnen, wenn die gegebenen Linien auf der Fläche eine Berührung dritter, vierter Ordnung haben. Wir folgern hieraus:

3. Wenn sich zwei Linien auf einer Fläche berühren, so berühren sich auch die entsprechenden sphärischen Curven, und zwar ist die Osculation in beiden Berührungspunkten von derselben Ordnung.

Aus 2. folgt unmittelbar:

4. Wenn sich zwei oder mehrere Linien in einem Punkte auf einer Fläche schneiden, so sind die Winkel zwischen ihren konjugirten Tangenten in diesem Punkte gleich den Winkeln zwischen den entsprechenden sphärischen Curven in ihrem Durchschnittspunkte.

Man ziehe in einem Kegelschnitt vier beliebige Halbmesser α, β, γ, δ; ferner die ihnen konjugirten Semidiameter a, b, c, d; die Winkel zwischen zweien dieser Linien, z. B. zwischen α und β, bezeichnen wir mit $(\alpha\beta)$, so findet, nach einem bekannten Satze, die Gleichheit folgender Doppelverhältnisse statt:

$$\frac{\frac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\beta\gamma)}}{\frac{\sin(\alpha\delta)}{\sin(\beta\delta)}} = \frac{\frac{\sin(ac)}{\sin(bc)}}{\frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}},$$

$$\frac{\frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\gamma\beta)}}{\frac{\sin(\alpha\delta)}{\sin(\gamma\delta)}} = \frac{\frac{\sin(ab)}{\sin(cb)}}{\frac{\sin(ad)}{\sin(cd)}},$$

$$\frac{\frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\delta\beta)}}{\frac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\delta\gamma)}} = \frac{\frac{\sin(ab)}{\sin(db)}}{\frac{\sin(ac)}{\sin(dc)}}.$$

Wir nehmen nun einen beliebigen Punkt m auf einer Fläche, konstruiren die Tangential-Ebene, und in derselben einen Kegelschnitt, dessen Mittelpunkt m, dessen Axen mit den Tangenten der Krümmungslinien in m zusammenfallen und den Größen $\sqrt{R}$ und $\sqrt{R'}$ proportional sind. Die Gleichung dieses Kegelschnitts (Dupin nennt ihn die indicatrice) ist:

$$\frac{x^2}{R} + \frac{y^2}{R'} = 1.$$

Derselbe ist bei gleichartig gekrümmten Flächen eine Ellipse, bei ungleichartig gekrümmten eine Hyperbel; und hat die Eigenschaft, daß je zwei seiner konjugirten Durchmesser mit zwei konjugirten Tangenten der Fläche im Punkte m zusammenfallen. Wenn also α, β, γ, δ Tangenten von 4 sich in m schneidenden Linien der Fläche sind, und a, b, c, d ihre konjugirten Tangenten, so finden zwischen den Winkeln $(\alpha\beta)$, $(\alpha\gamma)$, (ab) .... die Relationen 5. statt. Hierin ist die zweite und wesentliche Erweiterung der Gauß'schen Methode enthalten. Die Tangenten beliebiger sich in einem Punkt auf einer Fläche schneidenden Linien bilden einen ebenen Strahlenbüschel, die konjugirten Tangenten einen zweiten Strahlenbüschel. Jedem Strahl des ersten Büschels entspricht also ein bestimmter Strahl des zweiten; beide sind aber conjugirte Durchmesser der Indicatrix, somit sind beide (concentrischen) Strahlenbüschel projectivisch. Die Tangenten der correspondirenden sphärischen Curven bilden einen dritten Büschel, der dem zweiten congruent, also mit dem ersten projectivisch ist. Da nun wenige von den projectivischen Eigenschaften der Gebilde in der Ebene nicht auch an den projectivischen Gebilden auf der Kugel nachgewiesen werden können (Steiners ges. Werke I, S. 324), so gibt dieser Satz das Mittel an die Hand, diesen Nachweis auch bei den Linien auf irgend einer Fläche zu liefern; man darf nur statt Gerade Linie (a) oder Berührungslinie des der Fläche umschriebenen Cylinders und statt Kegelschnitt Linie (b) setzen. Einer geraden Punktreihe entspricht eine Punktreihe auf einer Linie (a). Zwei solche Punktreihen sind projectivisch, wenn die entsprechenden ebenen Strahlenbüschel es sind, welche man erhält, wenn durch den Mittelpunkt der Kugel Parallelen mit den durch die einzelnen Punkte der Reihe gehenden Flächennormalen gezogen werden. Ferner sind die Ebenen der größten Kreise, welche diesen Linien auf der Kugel entsprechen, beziehungsweise senkrecht auf den konjugirten Tangenten a, b, c, d (nach 2.), mithin finden unsere Gleichungen auch statt, wenn statt der Richtungen a, b, c, d die Tangenten A, B, C, D der genannten größten Kreise gesetzt werden, welche durch den Punkt M auf der Kugel gehen, der dem Punkte m auf der Fläche entspricht. Bezeichnen wir somit analog die Winkel zwischen A und B mit (AB) u. s. f., so bestehen folgende Relationen:

$$\frac{\frac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\beta\gamma)}}{\frac{\sin(\alpha\delta)}{\sin(\beta\delta)}} = \frac{\frac{\sin(AC)}{\sin(BC)}}{\frac{\sin(AD)}{\sin(BD)}} \quad \text{u. s. f.,}$$

welche diesen Satz enthalten:

7. Zieht man durch einen Punkt einer Fläche beliebige Linien, und konstruirt auf der Kugel die entsprechenden sphärischen Curven, so sind die Doppelverhältnisse der Sinus von je vier Winkeln zwischen den Linien auf der Fläche gleich den Doppelverhältnissen der Sinus von den vier Winkeln zwischen den entsprechenden sphärischen Curven.

α und α' seien zwei unendlich nahe Punkte einer Krümmungslinie auf der Fläche, A und A' die entsprechenden Punkte der Kugel. Die durch α und α' gehenden Normalen der Fläche schneiden sich und liegen somit in Einer Ebene, welche auch die Tangente der Krümmungslinie, d. h. das Element $\alpha\alpha'$ enthält, und der Ebene AOA' bei der Kugel parallel ist. Da zugleich die Tangential-

Ebenen der Fläche in den entsprechenden Punkten α und A parallel sind, so müssen es auch die Elemente $\alpha\alpha'$ und AA' sein.

6. Die Tangenten einer Krümmungslinie auf einer Fläche sind parallel den Tangenten der entsprechenden sphärischen Curve.

Wenn die Tangenten von zwei gewundenen Curven in je zwei entsprechenden Punkten einander parallel sind, so sind auch ihre Contingenzwinkel (Winkel zwischen zwei auf einander folgenden Elementen) einander gleich, ihre Osculations-Ebenen (Ebenen von zwei auf einander folgenden Elementen) sind parallel; mithin sind auch die Osculationswinkel (Winkel zwischen zwei auf einander folgenden Osculations-Ebenen) einander gleich. Wir schließen demnach weiter:

7. Die Contingenzwinkel einer Krümmungslinie auf einer Fläche sind denjenigen der entsprechenden sphärischen Curve gleich. Die Osculations-Ebenen der Krümmungslinie und der sphärischen Curve sind einander parallel.

Der Hauptkrümmungshalbmesser einer Curve ist gleich dem Element derselben, dividirt durch den Contingenzwinkel. Der Torsionshalbmesser ist gleich diesem Element, dividirt durch den Osculationswinkel.

8. Die beiden Hauptkrümmungshalbmesser sowohl als auch die Torsionshalbmesser einer Krümmungslinie auf einer Fläche und der entsprechenden sphärischen Curve verhalten sich wie die Elemente beider in entsprechenden Punkten.

Wir ziehen die Normalen der Fläche in zwei Punkten α und α' einer Krümmungslinie; A und A' sind die entsprechenden Punkte der sphärischen Curve, O ist der Mittelpunkt der Kugel, R der Eine Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche, welche der genannten Krümmungslinie entspricht, also:

$$R = \frac{\alpha\alpha'}{AOA'} = \frac{\alpha\alpha'}{AA'}.$$

9. Der Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche, welcher einer Krümmungslinie entspricht, ist gleich dem Elemente derselben dividirt durch das Element der entsprechenden sphärischen Curve.

$\alpha\alpha''$ sei ein Element der anderen durch α gehenden Krümmungslinie, und AA'' das entsprechende Element der sphärischen Curve; so ist auch, wenn R' der andere Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche ist, in α:

$$R' = \frac{\alpha\alpha''}{AA''},$$

also:

$$\frac{1}{R \cdot R'} = \frac{AA' \cdot AA''}{\alpha\alpha' \cdot \alpha\alpha''}.$$

Nun ist der Bruch rechts offenbar das Verhältniß je eines Flächen-Elements auf der Kugel zu dem entsprechenden Flächen-Element der Fläche, oder nach Gauß das Krümmungsmaß (mensura curvaturae). Wir haben somit, aber auf anderem Wege, den Gauß'schen Satz bewiesen: das Krümmungsmaß ist $= \frac{1}{RR'}$.

Wir können in der Gleichung:

$$\frac{1}{R \cdot R'} = \frac{AA' \cdot AA''}{\alpha\alpha' \cdot \alpha\alpha''}$$

AA' . AA'' = const. setzen, oder, was dasselbe ist, annehmen, daß die Kugel in gleiche Elemente eingetheilt sei, so ist:

$$R \, . \, R' = \alpha\alpha' \, . \, \alpha\alpha'' \, . \, \text{const.}$$

und durch Integration:

$$\int R \, . \, R' = \text{const.} \int \alpha\alpha' \, . \, \alpha\alpha'' + \text{const.}$$

Der Ausdruck rechts gibt die Complanation der gegebenen Fläche, mithin hängt dieselbe von der Integration $\int R \, . \, R'$ ab.

Wir ziehen durch α' eine weitere Krümmungslinie auf der Fläche parallel $\alpha\alpha''$ und durch α'' eine vierte Krümmungslinie parallel $\alpha\alpha'$, dadurch entsteht das unendlich kleine Krümmungslinien-Viereck $\alpha\alpha'\alpha'''\alpha''$, welches rechtwinklig ist. Demselben entspricht auf der Kugel ein ebenfalls rechtwinkliges Viereck AA'A'''A''. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens können wir auf der Fläche ein Netz von unendlich kleinen Rechtecken aus Krümmungslinien ausbreiten, welchem auf der Kugel ein Netz von ebenso vielen Rechtecken entsprechen wird. Ferner können wir annehmen, daß die Kugelrechtecke einander gleich sind, dann folgt aus der vorigen Gleichung, daß, wenn die Fläche der Differenzial-Gleichung

$$\frac{1}{R \, . \, R'} = \text{const.}$$

entspricht, auch die Krümmungslinienrechtecke auf einander gleich sind, woraus man sogleich schließt, daß die Fläche sich auf der Kugel abbilden läßt. Wir haben also nachstehenden Satz:

10. *Wenn bei einer Fläche das Krümmungsmaß $\frac{1}{R \, . \, R'}$ konstant ist für jeden ihrer Punkte, so läßt sie sich auf einer Kugel abbilden.*

Solcher Flächen gibt es unendlich viele, worunter aber die Ebene nicht begriffen ist. Die einfachste derartige Fläche entsteht durch Drehung einer Kurve um eine Axe in ihrer Ebene, welche der Gleichung entspricht:

$$\frac{1}{n \, . \, \varrho} = \text{const.}$$

n ist das Stück der Normale zwischen der Curve und der Drehungsaxe, ϱ der Krümmungshalbmesser der Curve. Die beiden Hauptkrümmungshalbmesser der entstandenen Drehungsfläche, R und R', sind gleich n und ϱ, also ist auch

$$\frac{1}{RR'} = \text{const.}$$

Hat man zwei Flächen, wo $\frac{1}{RR'} = \text{const.}$, so lassen sie sich beide auf einer Kugel, mithin lassen sie sich auch auf einander abbilden.

Wir nehmen nun eine zweite Fläche an, deren Hauptkrümmungshalbmesser mit R^β und R'^β bezeichnet werden sollen, konstruiren nach dem Obigen ein Netz von Krümmungslinienrechtecken $\beta\beta'\beta'''\beta''$, welchem auf der Kugel ein Netz von unendlich kleinen Rechtecken BB'B'''B'' entspricht, die wir auch unter sich und den Rechtecken AA'A'''A'' gleich annehmen. Wir haben nun die Relation:

$$\frac{1}{R\beta \, . \, R'\beta} = \frac{BB' \, . \, BB''}{\beta\beta' \, . \, \beta\beta''} = \frac{AA' \, . \, AA''}{\beta\beta' \, . \, \beta\beta''}.$$

Aus dieser Gleichung und der früheren

$$\frac{1}{R \,.\, R'} = \frac{AA' \,.\, AA''}{\alpha\alpha' \,.\, \alpha\alpha''}$$

folgt:

$$\alpha\alpha' \,.\, \alpha\alpha'' : \beta\beta' \,.\, \beta\beta'' = R \,.\, R' : R_\beta R'_\beta.$$

Hierin ist folgender Satz enthalten:

11. Wenn zwei beliebige Flächen so auf einander bezogen werden, daß in je zwei korrespondirenden Punkten die Flächen-Normalen parallel sind, so verhalten sich in diesen Punkten die Flächen-Elemente wie die Produkte der Hauptkrümmungshalbmesser.

In dem speziellen Fall, wenn beide Flächen der Bedingung genügen, daß für je zwei korrespondirende Punkte derselben

$$\frac{1}{R \,.\, R'} = \frac{1}{R_\beta \,.\, R'_\beta}$$

ist, muß auch

$$\alpha\alpha' \,.\, \alpha\alpha'' = \beta\beta' \,.\, \beta\beta''$$

sein; jedem Rechtecke des Netzes auf der ersten Fläche entspricht ein gleich großes Rechteck des Netzes auf der zweiten Fläche; somit läßt sich die eine auf der andern abbilden; hiermit wäre der zweite Satz von Gauß bewiesen:

Wenn bei zwei Flächen das Krümmungsmaß $\frac{1}{R \,.\, R'}$ in je zwei correspondirenden Punkten gleich ist, so lassen sie sich auf einander abbilden.

α und α' sind zwei unendlich nahe Punkte auf einer Fläche, a und a' sind die correspondirenden Punkte auf einer anderen Fläche (nicht auf einer Kugel); die Normalen der Flächen in α und a sind einander parallel, wie auch diejenigen in α' und a'. Die beiden Ebenen, welche die erste Fläche in α und α' berühren, sind also auch den Tangential-Ebenen der zweiten Fläche in a und a' parallel, mithin ist auch der Durchschnitt des ersten Paares von Ebenen, oder die conjugirte Tangente des Elements $\alpha\alpha'$, parallel dem Durchschnitt der beiden anderen Tangential-Ebenen, oder der conjugirten Tangente des Elements aa'. Hieraus folgt der allgemeine Satz:

12. Wenn zwei Linien auf zwei beliebigen Flächen in einer solchen Beziehung zu einander stehen, daß die Flächen-Normalen in je zwei entsprechenden Punkten beider Linien einander parallel sind, so sind in diesen Punkten auch die conjugirten Tangenten der Linien unter sich parallel.

Wir bezeichnen das Element $\alpha\alpha'$ mit $d\sigma$ und aa' mit ds; der Winkel, welchen die Normalen der ersten Fläche in α und α' mit einander bilden, ist gleich ω, so ist derjenige zwischen den Normalen der zweiten Fläche in a und a' auch gleich ω; φ ist der Winkel zwischen den konjugirten Tangenten in α; f der Winkel zwischen den konjugirten Tangenten in a; ϱ und r sind die Krümmungshalbmesser der Normalschnitte der Flächen, welche durch die Elemente $\alpha\alpha'$ und aa' gehen; δ und d sind die Poldistanzen dieser Elemente (wenn man die Gerade zieht, welche auf den Flächen-Normalen von α und $\alpha\alpha'$ zugleich senkrecht steht, so

ist der Punkt, wo sie die erste Flächen-Normale trifft, der Pol des Elements $\alpha\alpha'$ und die Entfernung des Pols bis zum Punkt α die Poldistanz von $\alpha\alpha'$). Wir haben nun folgende Gleichungen:

$$\varrho = \frac{d\sigma}{\sin\varphi} \,.\, \operatorname{cotg}\omega', \qquad r = \frac{ds}{\sin f} \,.\, \operatorname{cotg}\omega;$$

$$\delta = d\sigma \,.\, \sin\varphi \,.\, \operatorname{cotg}\omega, \qquad d = ds \,.\, \sin f \,.\, \operatorname{cotg}\omega;$$

$$d\sigma^2 : ds^2 = \varrho\delta : rd.$$

13. Bei den in 12. genannten Linien verhalten sich die Quadrate zweier entsprechenden Elemente wie die Produkte aus den Poldistanzen dieser Elemente und der Krümmungshalbmesser von den durch sie gehenden Normalschnitten der Fläche. Spezielle Fälle dieses allgemeinen Satzes sind folgende:

Die Eine dieser Linien ist eine Krümmungslinie der Fläche, so ist $r = d = R^\beta =$ dem derselben entsprechenden Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche, also:

$$\delta\sigma : ds = \sqrt{\varrho\delta} : R^\beta.$$

Die Eine der Linien liegt auf einer Kugel, deren Halbmesser $= 1$, so ist $r = d = 1$, also:

$$\frac{d\sigma}{ds} = \sqrt{\varrho\delta}.$$

14. Wenn man nach der Gauß'schen Methode zu einer beliebigen Linie auf einer Fläche die entsprechende sphärische Curve konstruirt, so ist das Verhältniß der Elemente beider Linien in entsprechenden Punkten gleich der Wurzel aus dem Produkt der Poldistanz des Elements der ersten Linie und des Krümmungshalbmessers von dem durch dieses Element gehenden Normalschnitte der Fläche.

Wenn die erstere der genannten Linien eine Krümmungslinie, die andere eine sphärische Curve ist, so folgt aus unserer Proportion:

$$d\sigma : ds = R : 1,$$

$$R = \frac{d\sigma}{ds},$$

welches der Satz 9. ist.

§. 3. Die Linien des Systems (a).

Wenn wir die Eigenschaften der Linien auf den Flächen durch Betrachtung der correspondirenden sphärischen Curven untersuchen, so beginnen wir am besten mit solchen Linien, welchen die einfachsten sphärischen Kurven, also größte Kreise, entsprechen. Wird nämlich einer Fläche ein Cylinder umbeschrieben, so sind die Normalen der Fläche, welche durch die einzelnen Punkte der Berührungslinie gezogen werden, Einer Ebene parallel, also liegen die parallel gezogenen Kugelhalbmesser auch in einer Ebene, und treffen die Kugel in einem größten Kreis. Solche Linien auf den Flächen nun, welchen ein größter Kreis entspricht, nennen wir Linien des Systems (a), oder kurz Linien (a). Sie haben folgende Eigenschaften:

15. Die Tangential-Ebenen der Linien des Systems (a) bilden einen Cylinder, dessen Erzeugende auf der Ebene des größten Kreises senkrecht stehen.

Jede Tangente einer Linie (a) und die durch den Berührungspunkt gehende Erzeugende des Cylinders sind conjugirte Tangenten der Fläche.

16. Die conjugirten Tangenten der Linien des Systems (a) sind unter einander parallel und senkrecht auf der Ebene des der Linie entsprechenden größten Kreises der Kugel.

Da alle Flächen-Normalen, welche durch die einzelnen Punkte einer Linie (a) gehen, Einer Ebene parallel sind, so stehen auch die Geraden, welche zwei auf einander folgende Normalen senkrecht treffen, und mithin die kürzeste Entfernung dieser Normalen angeben, auf jener Ebene senkrecht, und sind folglich unter einander parallel.

17. Die Geraden, welche die kürzeste Entfernung zwischen je zwei auf einander folgenden Flächen-Normalen einer Linie des Systems (a) angeben, sind unter einander parallel, und stehen, wie die Erzeugenden des Cylinders, der die Fläche in der Linie (a) berührt, auf der Ebene des entsprechenden größten Kreises senkrecht.

18. Zieht man durch einen Punkt einer Fläche vier beliebige Linien (a) und construirt die entsprechenden größten Kreise auf der Kugel, so sind die Doppelverhältnisse der Sinus von je vier Winkeln, welche die Linien (a) in ihrem gemeinsamen Schnittpunkt mit einander bilden, gleich den Doppelverhältnissen der Sinus der entsprechenden vier Winkel, welche die größten Kreise in ihrem Schnittpunkt mit einander machen.

19. Werden durch einen Punkt auf einer Fläche vier Linien (a): $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gezogen, so daß die Gleichung stattfindet:

$$\frac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\beta\gamma)} = \frac{\sin(\alpha\delta)}{\sin(\beta\delta)},$$

so bilden dieselben einen harmonischen Strahlenbüschel. Die entsprechenden größten Kreise bilden ebenfalls einen harmonischen Strahlenbüschel, weil

$$\frac{\sin(AC)}{\sin(BC)} = \frac{\sin(AD)}{\sin(BD)}$$

ist.

Auf einer Kugel, deren Mittelpunkt O ist, liegt ein Punkt M, durch welchen vier größte Kreise gehen, die von einem fünften größten Kreise in den Punkten A', B', C', D' geschnitten werden. Wir bezeichnen, wie vorhin, die vier ersten Kreise mit A, B, C, D und die Winkel, welche sie unter einander bilden, mit (AB) u. s. f., so ist nach einem Satze der sphärischen Trigonometrie:

$$\frac{\dfrac{\sin(AC)}{\sin(BC)}}{\dfrac{\sin(AD)}{\sin(BD)}} = \frac{\dfrac{\sin A'C'}{\sin B'C'}}{\dfrac{\sin A'D'}{\sin B'D'}}.$$

A'C', B'C' u. s. f. sind die Bögen zwischen den Schnittpunkten A' und C', B' und C' u. s. f. Es ist auch sinA'C' = sinA'OC', sinB'C' = sinB'OC'.

Auf einer Fläche ziehe man durch einen Punkt m vier beliebige Linien (a): α, β, γ, δ; welche von einer fünften Linie (a) in den Punkten α', β', γ', δ' geschnitten werden. Die Normalen der Fläche, deren Fußpunkte α', β', γ', δ' sind, bezeichnen wir gleichfalls mit α', β', γ', δ' und die Winkel zwischen je zwei solchen Normalen mit $(\alpha'\beta')$, $(\alpha'\gamma')$ u. s. f., so ist offenbar:

$$(\alpha'\beta') = A'O'B', \quad \alpha'\gamma' - A'O'C' \text{ u. s. f.}$$

indem A', B', C', D' die entsprechenden vier Punkte auf der Kugel sind. Wir haben also mit Rücksicht auf die vorige Gleichung diese Relation:

$$\frac{\dfrac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\beta\gamma)}}{\dfrac{\sin(\alpha\delta)}{\sin(\beta\delta)}} = \frac{\dfrac{\sin(\alpha'\gamma')}{\sin(\beta'\gamma')}}{\dfrac{\sin(\alpha'\delta')}{\sin(\beta'\delta')}},$$

welche folgenden Satz enthält:

20. Wenn vier von einem Punkt ausgehende Linien (a) auf einer Fläche von einer fünften in vier Punkten getroffen werden, so ist das Doppelverhältniß der Sinus von vier Winkeln jenes Strahlenbüschels gleich dem Doppelverhältniß der Sinus der vier Winkel von je zwei solchen Flächen-Normalen, die durch die auf diesen Strahlen liegenden Schnittpunkte gehen.

21. Auf einer Fläche sind zwei Linien (a); auf der ersten liegen die Punkte α', β', γ', δ'; auf der zweiten α'', β'', γ'', δ''; die Winkel zwischen den Flächen-Normalen α' und β', α' und γ' u. s. f. werden wie vorhin bezeichnet durch $(\alpha'\beta')$, $(\alpha'\gamma')$ u. s. f.; wenn die Doppelverhältnisse

$$\frac{\dfrac{\sin(\alpha'\gamma')}{\sin(\beta'\gamma')}}{\dfrac{\sin(\alpha'\delta')}{\sin(\beta'\delta')}} = \frac{\dfrac{\sin(\alpha''\gamma'')}{\sin(\beta''\gamma'')}}{\dfrac{\sin(\alpha''\delta'')}{\sin(\beta''\delta'')}}$$

einander gleich sind, so schneiden sich die durch die Punkte α' und α'', β' und β'', γ' und γ'', δ' und δ'' bestimmten vier Linien (a) in Einem Punkte.

Vier harmonische Punkte auf einer Linie (a) sind solche, bei welchen

$$\frac{\sin(\alpha'\gamma')}{\sin(\beta'\gamma')} = \frac{\sin(\alpha'\delta')}{\sin(\beta'\delta')}$$

ist.

22. Jede Linie des Systems (a) auf einer Fläche wird von einem harmonischen Strahlenbüschel aus Linien (a) in vier harmonischen Punkten geschnitten. Sind auf jeder von zwei Linien (a) vier harmonische Punkte gegeben, und man verbindet je zwei entsprechende dieser Punkte durch Linien (a), so convergiren diese in Einem Punkte.

23. Wenn auf einer Fläche zwei harmonische Strahlenbüschel mit verschiedenen Centren gegeben sind, wovon zwei entsprechende

Strahlen in der Verbindungslinie ihrer Centren vereinigt sind, so liegen die Durchschnittspunkte der drei anderen Paare von entsprechenden Strahlen auf einer Linie (a).

Durch zwei Punkte α und β einer Fläche ziehen wir eine Linie (a) und die Normalen der Fläche. Der Winkel zwischen diesen Normalen heißt der der Linie $\alpha\beta$ entsprechende Normalen-Winkel.

§. 4. Dreiecke und Transversalen, gebildet von Linien des Systems (a).

Auf einer Fläche ist ein Dreieck $\alpha\beta\gamma$ aus Linien des Systems (a) gegeben. Man ziehe drei sich in Einem Punkt schneidende Transversalen $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, so entspricht dieser Figur auf der Kugel ein sphärisches Dreieck ABC mit drei sich in Einem Punkte schneidenden Transversalen (nach 4.) AA', BB', CC'; da nun

$$\sin AC' \,.\, \sin BA' \,.\, \sin CB' = \sin C'B \,.\, \sin A'C \,.\, \sin B'A,$$

so ist auch, wenn wir die Bezeichnung der Winkel zwischen den Flächen-Normalen in α und α', β und β' u. s. f. nach 21. beibehalten:

$$\sin \alpha\gamma' \,.\, \sin \beta\alpha' \,.\, \sin \gamma\beta' = \sin \gamma'\beta \,.\, \sin \alpha'\gamma \,.\, \sin \beta'\alpha.$$

24. Auf einer Fläche ist ein Dreieck mit drei sich in Einem Punkt schneidenden Transversalen, sämmtlich Linien des Systems (a) gegeben. Es entstehen dadurch auf jeder Seite zwei Abschnitte, im Ganzen sechs, wovon drei nicht aneinander liegende getrennte heißen. Das Product der Sinus von drei Normalen-Winkeln, welche getrennten Abschnitten entsprechen, ist gleich dem Product der Sinus der drei übrigen Normalen-Winkel.

Die folgenden Sätze sind einfache Übertragungen von bekannten Theoremen der sphärischen Trigonometrie:

25. Nimmt man auf den Seiten eines Dreiecks, von Linien des Systems (a) gebildet, drei Punkte an, so daß das Product der Sinus von drei getrennten Seiten-Abschnitten entsprechenden Normalen-Winkeln gleich dem Producte der Sinus von den drei übrigen Normalen-Winkeln ist, welche den drei anderen getrennten Seiten-Abschnitten gegenüberliegen, so schneiden sich die von den Ecken des Dreiecks nach diesen Punkten gezogenen Transversalen des Systems (a) in Einem Punkte. (Converse von 24.)

26. Zieht man eine Linie (a), welche die Seiten eines Dreiecks oder deren Verlängerungen auf einer Fläche schneidet, so bilden die drei Schnittpunkte auf den Seiten im Ganzen sechs Abschnitte. Das Product der Sinus von drei, getrennten Seitenabschnitten entsprechenden Normalen-Winkeln ist gleich dem Product der Sinus von den drei anderen Normalen-Winkeln.

27. Werden auf einer Seite eines Dreiecks aus Linien des Systems (a) und den Verlängerungen der beiden anderen, oder auf den Verlängerungen aller drei Seiten Punkte angenommen, so daß das Product der Sinus von drei, getrennten Seiten-Abschnitten entsprechenden, Normalen-Winkeln gleich ist dem

Producte der Sinus von den drei anderen Normalen-Winkeln, so liegen diese drei Punkte auf Einer Linie des Systems (a). Converse von 26.)

28. Wenn man drei sich in Einem Punkt schneidende Transversalen eines Dreiecks von Linien des Systems (a) zieht, und die Fußpunkte von zweien dieser Transversalen verbindet durch eine Linie (a), so wird diese durch die dritte Transversale und die dritte Dreiecksseite harmonisch getheilt.

Die beiden Transversalen eines Dreiecks von Linien (a), welche durch eine Ecke gehen und den inneren sowohl als den äußeren Dreieckswinkel halbiren, bilden einen rechten Winkel mit einander, also sind sie in Verbindung mit den von der gleichen Ecke ausgehenden Dreiecksseiten ein harmonischer Strahlenbüschel, somit bestimmen sie auch auf der Gegenseite vier harmonische Punkte.

29. Wenn man die Fußpunkte von drei sich in Einem Punkte schneidenden Transversalen eines Dreiecks aus Linien des Systems (a) verbindet, so liegen die Durchschnittspunkte der Verbindungslinien mit den Gegenseiten des Dreiecks wieder auf einer Linie des Systems (a).

30. In einem vollständigen Viereck aus Linien des Systems (a) auf einer Fläche schneiden sich die Diagonalen gegenseitig harmonisch.

§. 5. Die Linien des Systems (b).

Auf einer Fläche liegt eine Linie, durch deren Punkte wir die Normalen der Fläche ziehen; parallel mit denselben durch den Mittelpunkt der Kugel gehen die Halbmesser. Wenn letztere in Einer Ebene liegen und die Kugel also in einem größten Kreise treffen, so ist die gegebene Linie auf der Fläche eine solche, die wir Linie des Systems (a) genannt haben. Bilden die Halbmesser aber einen Kegel zweiten Grades und treffen somit die Kugel in einem sphärischen Kegelschnitt, so nennen wir die Linien auf der Fläche Linien des Systems (b) oder kurz Linien (b).

Jeder sphärische Kegelschnitt hat zwei Brennpunkte und jeder Kegel zweiten Grades zwei Fokal-Linien. Die Summe der Winkel, welche eine Erzeugende mit den Fokal-Linien bildet, ist constant. Hieraus schließt man:

31. Jede Linie des Systems (b) auf einer Fläche hat zwei Brennpunkte; die Summe der Winkel, welche eine Flächen-Normale eines Punkts der Linie mit den Flächen-Normalen der beiden Brennpunkte bildet, ist constant.

Die beiden Ebenen, welche durch eine Erzeugende des Kegels und die Fokal-Linien gehen, bilden mit der durch diese Erzeugende gehenden Tangential-Ebene gleiche Winkel. Wir nehmen nun auf der Linie des Systems (b) den Punkt α an, dessen Flächen-Normale parallel seiner Erzeugenden ist, so ist die der Linie (b) in α conjugirte Tangente senkrecht auf der genannten Tangential-Ebene. Ziehen wir ferner zwei Linien (a) von α nach den Brennpunkten, so sind die conjugirten Tangenten dieser Linien im Punkt α senkrecht auf den beiden, durch die Erzeugende des Kegels und die Fokal-Linien gehenden Ebenen; mithin bilden

diese conjugirten Tangenten mit der conjugirten Tangente der Linie (b) in α gleiche Winkel.

32. **Man ziehe von einem Punkt einer Linie des Systems (b) nach den Brennpunkten zwei Linien des Systems (a), so bilden die conjugirten Tangenten der letzteren in dem genannten Punkt mit der conjugirten Tangente der Linie (b) gleiche Winkel.**

In dem speziellen Falle, wo die Linie (b) eine Krümmungslinie der Fläche ist, erhält man mit Hülfe des Satzes von **Dupin**, wornach die conjugirten Tangenten in einem Punkt einer Fläche zugleich die conjugirten Tangenten eines Kegelschnitts (der indicatrice) sind, folgendes Corollar:

33. **Wenn eine Linie des Systems (b) zugleich Krümmungslinie der Fläche ist, so bildet sie mit den von einem ihrer Punkte nach den Brennpunkten gezogenen Linien (a) gleiche Winkel.**

Wenn auf einer Kugel zwei feste Punkte gegeben sind, und um dieselben zwei Bögen größter Kreise sich so drehen, daß sie sich rechtwinklig schneiden, so beschreibt ihr Durchschnittspunkt einen sphärischen Kegelschnitt; hieraus folgt:

34. **Wenn auf einer Fläche zwei feste Punkte liegen, und um dieselben zwei Linien des Systems (a) sich so drehen, daß ihre conjugirten Tangenten im Durchschnittspunkte rechtwinklig zu einander sind, so beschreibt dieser Durchschnittspunkt eine Linie des Systems (b).**

Jedem größten Kreise auf einer Kugel entspricht ein Pol; der nach dem Pol gehende Kugelhalbmesser ist senkrecht auf der Ebene des größten Kreises. Ebenso entspricht jeder Linie des Systems (a) auf einer Fläche ein **Pol**; die Normale der Fläche, welche durch den Pol geht, ist parallel mit den conjugirten Tangenten der genannten Linie (a).

Bewegt sich ein größter Kreis so, daß er einen sphärischen Kegelschnitt umhüllt, so beschreibt sein Pol auf der Kugel ebenfalls einen sphärischen Kugelschnitt.

Wenn auf einer Kugel zwei feste Bögen größter Kreise gegeben sind, und man läßt auf ihnen die Endpunkte eines größten Kreises gleich einem Quadranten sich bewegen, so wird dieser einen sphärischen Kegelschnitt umhüllen, und sein Pol also auch einen sphärischen Kegelschnitt beschreiben. Hiernach schließen wir:

35. **Auf einer Fläche liegen zwei Linien des Systems (a). Man nehme auf jeder einen Punkt an, so daß die Flächen-Normalen in beiden Punkten zu einander rechtwinklig sind, so wird der Pol der durch diese (beweglichen) Punkte bestimmten Linie des Systems (a) eine Linie des Systems (b) beschreiben.**

Auf einer Kugel sind zwei Punkte O und O'; durch O gehen größte Kreise A, B, C, D....; und durch O' gehen die Kreise A', B', C', D'.... Zwischen diesen beiden sphärischen Strahlenbüscheln findet die Beziehung statt, daß das Doppelverhältniß der Sinus von je vier Winkeln des Einen Büschels gleich ist dem Doppelverhältniß der Sinus von den entsprechenden vier Winkeln des anderen Büschels, also z. B.:

$$\frac{\dfrac{\sin(AC)}{\sin(BC)}}{\dfrac{\sin(AD)}{\sin(BD)}} = \frac{\dfrac{\sin(A'C')}{\sin(B'C')}}{\dfrac{\sin(A'D')}{\sin(B'D')}}.$$

Wenn nun in dem größten Kreise OO′ zwei entsprechende Strahlen vereinigt sind, wie A und A′, oder B und B′ u. s. f., so liegen die Durchschnitte von je zwei anderen entsprechenden Strahlen beider Büschel, z. B. von C und C′, D und D′ u. s. f., auf Einem größten Kreise. Sind aber in dem größten Kreise OO′ nicht zwei entsprechende Strahlen vereinigt, z. B. A und B′; so liegen die Durchschnitte von je zwei entsprechenden Strahlen A und A′, B und B′, ... auf einem sphärischen Kegelschnitt. Dieser Satz läßt sich direkt auf die Linien der Systeme (a) und (b) übertragen:

36. Auf einer Fläche liegen zwei Punkte, von denen Strahlenbüschel aus Linien (a) ausgehen, welche in der Beziehung zu einander stehen, daß das Doppelverhältniß der Sinus von je vier Winkeln des Einen Büschels gleich dem Doppelverhältniß der Sinus von den vier Winkeln der entsprechenden Strahlen des anderen Büschels ist. Sind in der Verbindungslinie beider Punkte zwei entsprechende Strahlen vereinigt, so liegen die Schnittpunkte von je zwei anderen entsprechenden Strahlen auf einer Linie (a). Sind aber in dieser Verbindungslinie nicht zwei entsprechende Strahlen vereinigt, so liegen die Schnittpunkte von je zwei entsprechenden Strahlen auf einer Linie (b).

Hier schließt sich nun unmittelbar folgender Satz an, dessen Beweis aus dem Hauptsatz 36. ebenso abgeleitet wird, wie der entsprechende Satz der Kegelschnitte aus den Eigenschaften der projectivischen und harmonischen Strahlenbüschel:

37. Gegeben ist ein Punkt μ auf einer Fläche und eine Linie (b); man ziehe von μ aus zwei Linien des Systems (a), welche die Linie (b) tangiren, verbinde die Berührungspunkte durch eine Linie (a); so wird jede durch (μ) gezogene Linie (a) durch diese Verbindungslinie und die Linie (b) harmonisch getheilt. Zieht man in den Schnittpunkten mit der Linie (b) an letztere zwei tangirende Linien (a), so schneiden sich diese auf der genannten Verbindungslinie.

Wir könnten nun noch eine Menge von Sätzen der neueren Geometrie anführen, die sich auf die Linien der Systeme (a) und (b) übertragen lassen, begnügen uns aber mit den bisherigen.

Unter den Linien (b) gibt es eine besondere Gattung, welche nur Einen Brennpunkt haben. Denselben entspricht auf der Kugel ein Nebenkreis. Sie haben folgende Eigenschaften:

38. Diejenigen Linien (b), welchen ein Nebenkreis auf der Kugel entspricht, haben einen Brennpunkt. Jede Normale der Fläche, welche durch einen Punkt der Linie geht, bildet mit der Flächen-Normale des Brennpunkts denselben Winkel. Zieht man vom Brennpunkt aus eine Linie des Systems (a) nach der Linie (b), so stehen im Durchschnittspunkte die conjugirten Tangenten beider Linien auf einander senkrecht.

Die Linien (a) gehören ebenfalls zu der genannten speciellen Gattung von Linien (b), auch sie haben einen Brennpunkt, welchem wir aber den besonderen Namen Pol gegeben haben; und die Sätze über die Linien (b) und ihre Strahlenbüschel lassen sich mit geringen Modifikationen auf die Linien (a) ausdehnen.

§. 6. Anwendung auf die Flächen zweiten Grades.

Die Linien (a) sind bei den centrischen Flächen zweiten Grades Diametralschnitte, bei den Paraboloiden sind sie ebenfalls ebene Kurven, deren Ebenen der Axe der Fläche parallel sind. Die Sätze der §§. 3. und 4. können direkt auf die Flächen zweiten Grades übertragen werden, wenn man statt Linien (a) Diametralschnitte, oder solche Schnitte, deren Ebenen der Axe parallel sind, setzt.

Zu den Linien (b) gehören bei den Flächen zweiten Grades die Krümmungslinien; ihre Brennpunkte sind die Kreispunkte der Fläche. Der Beweis dafür liegt in dem Satze (S. 130): Wenn man durch den Mittelpunkt einer Fläche zweiten Grades Linien parallel mit solchen Normalen der Fläche zieht, deren Fußpunkte eine Krümmungslinie bilden, so sind diese Parallelen die Erzeugenden eines Kegels vom zweiten Grade, dessen Fokal-Linien parallel den Normalen der Kreispunkte sind. Jeder Krümmungslinie entspricht somit ein Kegel; den Krümmungslinien beider Systeme entsprechen zwei Systeme homofokaler Kegel, welche sich gegenseitig senkrecht durchkreuzen.

39. Man ziehe auf einer Fläche zweiten Grades ein Dreieck von Diametralschnitten und nehme auf jeder Seite des Dreiecks oder dessen Verlängerung einen Punkt an, so daß diese drei Punkte entweder auf Einem Diametralschnitt liegen, oder daß die von ihnen nach den Gegenecken gezogenen Diametralschnitte sich in Einem Punkte schneiden, dann ist das Product der Sinus von drei solchen Normalen-Winkeln, welche drei getrennten Seitenabschnitten entsprechen, gleich dem Product der Sinus von den Normalen-Winkeln, welche den drei übrigen Seitenabschnitten entsprechen.

40. Auf einer Krümmungslinie (oder auf einem Diametralschnitt) einer Fläche zweiten Grades sind zwei Punkte gegeben, durch welche zwei Strahlenbüschel von Diametralschnitten gehen, die sich paarweise wieder auf der Krümmungslinie (oder auf dem ersten Diametralschnitt) schneiden; dann ist das Doppelverhältniß der Sinus der Winkel zwischen je vier Strahlen des ersten Strahlenbüschels gleich dem Doppelverhältniß der Sinus der Winkel zwischen den entsprechenden Strahlen des zweiten Strahlenbüschels.

41. Auf einer Fläche zweiten Grades ist ein Punkt und eine Krümmungslinie (oder ein Diametralschnitt) gegeben. Man lege durch den Punkt beliebig viele Diametralschnitte, welche die Krümmungslinie (oder den ersten Diametralschnitt) je in zwei Punkten schneiden. Die Durchschnittspunkte der Diametralschnitte, welche die Krümmungslinie (oder den ersten Diametralschnitt) in zwei solchen Punkten berühren, liegen ebenfalls auf einem Diametralschnitt der Fläche.

42. Jede Krümmungslinie einer Fläche zweiten Grades bildet mit den beiden von einem ihrer Punkte nach den Kreispunkten gezogenen Diametralschnitten gleiche Winkel. Nach dem

Satze von Michael Roberts bildet eine Krümmungslinie mit den von einem ihrer Punkte nach den Kreispunkten gehenden geodätischen Linien gleiche Winkel. Hieraus folgt also:

43. Zieht man von irgend einem Punkt einer centrischen Fläche zweiten Grades nach den Kreispunkten zwei geodätische Linien und zwei Diametralschnitte, so bilden die ersteren mit den letzteren gleiche Winkel.

44. Wenn an eine Krümmungslinie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades berührende Diametralschnitte gelegt werden, welche eine zweite Krümmungslinie je in zwei Punkten schneiden, so liegen die Durchschnittspunkte von jedem Paar solcher Diametralschnitte, welche die zweite Krümmungslinie in den genannten Punkten berühren, auf einer Linie des Systems (b).

45. Wenn man an eine Krümmungslinie einer centrischen Fläche zweiten Grades einen tangirenden Diametralschnitt legt, welcher die übrigen Krümmungslinien je in zwei Punkten schneidet, so liegen die Durchschnittspunkte von jedem Paar solcher Diametralschnitte, welche jede Krümmungslinie in den genannten zwei Punkten berühren, auch auf einem Diametralschnitte, der die erste Krümmungslinie im Berührungspunkte senkrecht trifft.

Bewegt sich die Spitze eines von zwei größten Kreisen auf einer Kugel gebildeten Winkels, welche einen sphärischen Kegelschnitt berühren, auf einem zweiten, homofokalen, sphärischen Kegelschnitt, so bilden sie mit dem letzteren gleiche Winkel; hieraus folgt:

46. Bewegt sich die Spitze eines von zwei Diametralschnitten auf einer centrischen Fläche zweiten Grades, welche eine Krümmungslinie berühren, gebildeten Winkels auf einer zweiten Krümmungslinie, so bilden sie mit der letzteren gleiche Winkel. Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung von 43.; er gilt auch, wenn man geodätische Linien statt Diametralschnitte setzt; wir schließen deßhalb:

47. Zieht man von einem Punkte einer Krümmungslinie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades an eine zweite Krümmungslinie sowohl zwei berührende Diametralschnitte als auch zwei berührende geodätische Linien, so bilden letztere mit den ersteren gleiche Winkel.

In einem von vier homofokalen sphärischen Kegelschnitten gebildeten Viereck sind die Bögen größter Kreise, welche zwei Gegenecken verbinden, einander gleich:

48. In einem Krümmungslinienviereck auf einer Fläche zweiten Grades ist der Winkel zwischen zwei durch Gegenecken des Vierecks gezogenen Flächen-Normalen gleich dem Winkel zwischen den durch die beiden anderen Gegenecken gezogenen Flächen-Normalen.

IV. Über geodätische Linien (Th. I, §. 17.)*)

§. 1. Elementar-Sätze.

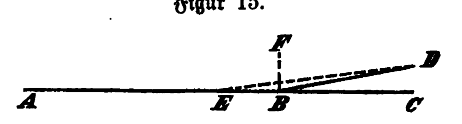
1. Erklärung. Die geodätische Linie ist der kürzeste Weg, welcher zwischen zwei Punkten auf einer Fläche beschrieben werden kann.

2. Grundsatz. Von einem Punkt zum andern kann auf einer Fläche nur Eine geodätische Linie gezogen werden.

3. Lehrsatz. Zwei geodätische Linien, welche zwei Punkte gemeinschaftlich haben, fallen in ihrer ganzen Ausdehnung zusammen und bilden nur Eine geodätische Linie.

Beweis. Die gemeinschaftlichen Punkte sollen A und B sein, so müssen beide Linien von A bis B zusammenfallen (2). Giengen nun die Linien von B aus einander, die eine nach C und die andere nach D, so daß BC und BD zwei Elemente derselben sind, die wir als Gerade ansehen können, so nehmen wir auf der geodätischen Linie AB sehr nahe bei B einen Punkt E an, BE kann dann ebenfalls als Gerade gelten; und ziehen durch B auf der Fläche eine unendlich kleine Linie BF senkrecht auf EB. Wäre der Winkel FBD kein Rechter, so könnte man ED ziehen, dann wäre in dem unendlich kleinen Dreieck EBD $EB + BD > ED$, also könnte EBD keine geodätische Linie sein. Wäre aber der Winkel FBC kein Rechter, so könnte man EC ziehen und es wäre $EB + BC > EC$, also könnte EBC keine geodätische Linie sein. Somit sind die Winkel FBC und FBD zugleich Rechte, also fällt BD mit BC zusammen.

Figur 15.



4. Zusatz. Zwei geodätische Linien auf einer Fläche können sich zwar schneiden, aber nicht berühren.

Beweis. Würden sie sich berühren, so hätten sie zwei auf einander folgende Punkte gemein, müßten also ganz zusammenfallen.

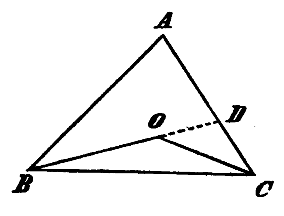
5. Lehrsatz. In einem geodätischen Dreieck ist jede Seite kleiner als die Summe der beiden andern.

Beweis. Es sei ABC das Dreieck. Da AB der kürzeste Weg von A nach B ist, so muß $AB < AC + BC$ sein (1).

6. Lehrsatz. Wenn von einem Punkt O im Innern eines geodätischen Dreiecks ABC nach den Endpunkten einer Seite BC die geodätischen Linien OB und OC gezogen werden, so ist die Summe dieser Linien kleiner als die Summe der beiden Seiten AB und AC.

Beweis. Man verlängere BO nach D, so ist $OC < OD + DC$. Addirt man beiderseits BO, so ist $BO + OC < BO + OD + DC < BD + DC$. Ferner ist $BD < BA + AD$. Addirt man auf beiden Seiten DC, so ist $BD + DC < BA + AC$ also um so mehr $BO + OC < BA + AC$.

Figur 16.



*) Die Sätze dieses Abschnitts gelten nur innerhalb gewisser Grenzen, die sich jedoch aus der Beschaffenheit jeder einzelnen Fläche unmittelbar ergeben.

7. Lehrsatz. Unter allen geodätischen Linien, welche sich von einem Punkt auf einer Fläche nach einer geodätischen Linie ziehen lassen, schneidet die kürzeste dieselbe rechtwinklig.

Beweis. Es sei A der Punkt und BM die gegebene geodätische Linie. Würde die kürzeste Linie, die sich von A nach BM ziehen läßt, AB sein und wäre der Winkel bei B schief, so nehme man unendlich nahe bei B den Punkt C auf AB an, und ziehe nach der Curve die Linie CD senkrecht, dann wäre in dem unendlich kleinen Dreieck CBD CB die Hypotenuse, also CB > CD mithin auch AC + CB > AC + CD, also wäre AB nicht die kürzeste Linie.

Figur 17.

Dieser Satz gilt auch für den Fall, wenn BM eine geodätische Linie, sondern eine beliebige Kurve auf der Fläche ist.

§. 2. Der geodätische Kreis.

8. Erklärung. Diejenige krumme Linie auf einer Fläche, welche die Eigenschaft hat, daß die geodätischen Entfernungen ihrer sämmtlichen Punkte von Einem Punkte innerhalb, dem Mittelpunkt, gleich groß sind, heißt geodätischer Kreis.

9. Erklärung. Jede vom Mittelpunkt nach dem Umfang des Kreises gezogene geodätische Linie heißt Radius; jede geodätische Linie, welche durch den Mittelpunkt geht und an beiden Enden vom Kreisumfang begrenzt ist, heißt Durchmesser.

10. Erklärung. Jede geodätische Linie, welche zwei Punkte eines Kreises verbindet, heißt Sehne.

11. Lehrsatz. Jede Sehne ist kürzer als der Durchmesser.

Beweis. Wenn man nach den Endpunkten der Sehne AB die Halbmesser OA und OB zieht, so ist in dem geodätischen Dreieck OAB AB < OA + OB (5.)

12. Lehrsatz. Die auf dem Halbmesser in dessen Endpunkt senkrecht stehende geodätische Linie ist eine Tangente des Kreises.

Beweis. O ist der Mittelpunkt, A und B sind zwei unendlich nahe Punkte des Kreises, dann muß der Winkel OAB ein Rechter sein. Denn wäre er schief und größer als der Winkel bei B, so könnte man BC so ziehen, daß der Winkel ABC = 90° wäre; in dem unendlich kleinen Dreieck ABC wäre AC die Hypotenuse also größer als BC, mithin OC + CB < OC + CA < OA < OB oder kleiner als die kürzeste Linie zwischen O und B, was nicht möglich ist (Disq. Art. XV.)

Figur 18.

13. Lehrsatz. Alle von einem Punkt ausgehenden geodätischen Linien, welche die Verbindungslinie ihrer Endpunkte rechtwinklig treffen, sind gleich lang.

Beweis. Wäre OA > OB, so könnte man auf OA einen Punkt D annehmen, so daß OB = OD wäre. Dann müßte nach (12) Winkel OBD = 90° sein, was der Voraussetzung widerspricht.

14. Zusatz. Jede geodätische Linie, welche einen Kreis senkrecht trifft, geht durch den Mittelpunkt desselben.

15. Lehrsatz. Wenn die geodätische Entfernung der Mittelpunkte zweier Kreise kleiner ist, als die Summe der Radien, der größere Radius aber kleiner als die Summe des kleineren und die Entfernung der Mittelpunkte, so schneiden sich die Kreise.

Beweis. Damit das Schneiden stattfinde, muß das Dreieck OO'A möglich sein, es muß also nicht allein $OO' < OA + O'A$, sondern auch der größere Halbmesser $OA < OO' + O'A$ sein. Sobald das Dreieck OO'A gezeichnet werden kann, schneiden sich die Kreise.

16. Lehrsatz. Wenn die geodätische Entfernung OO' der Mittelpunkte zweier Kreise der Summe ihrer Halbmesser $OA + OA'$ gleich ist, so berühren sie sich von außen.

Beweis. Es ist klar, daß sie den Punkt A gemeinschaftlich haben, aber auch nur diesen Punkt; denn um zwei Punkte gemeinschaftlich zu haben, müßte die geodätische Entfernung der Mittelpunkte kleiner sein, als die Summe der Radien.

17. Lehrsatz. Wenn die Entfernung OO' der Mittelpunkt zweier Kreise gleich dem Unterschied ihrer Halbmesser $OA - O'A$ ist, so berühren sie sich von innen.

Beweis. Hätten sie außer dem Punkt A noch einen zweiten gemeinschaftlich, so müßte der größere Halbmesser OA kleiner sein, als die Summe des Radius O'A und der Entfernung OO'.

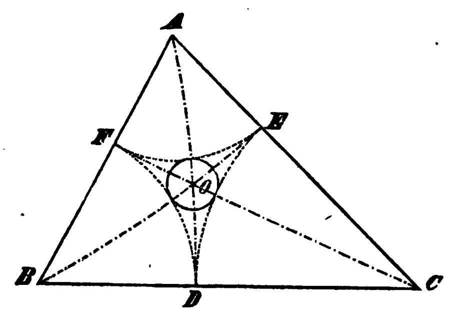
18. Zusatz. Wenn sich zwei Kreise von außen oder von innen berühren, so liegen die Mittelpunkte und der Berührungspunkt in Einer geodätischen Linie.

§. 3. Geodätische Dreiecke.

1. In dem geodätischen Dreieck ABC, dessen Seiten a, b, c sind, werden drei geodätische Hyperbeln (Th. I, §. 17) gezeichnet, nämlich AD mit den Brennpunkten B und C, EB mit A und C, FC mit A und B als Brennpunkten, so ist, wenn $s = \frac{a + b + c}{2}$

$$BD = BF = s - b\ ,$$
$$CD = CE = s - c\ ,$$
$$AE = AF = s - a.$$

Figur 19.



Diese 3 Hyperbeln haben einen gemeinschaftlichen Schnittpunkt O, welcher von den 3 geodätischen Kreisen, die von A, B, C aus mit den Halbmessern $s - a$, $s - b$, $s - c$ beschrieben werden, gleichweit entfernt ist; O ist also der Mittelpunkt eines vierten geodätischen Kreises, welcher die 3 ersten von außen berührt.

2. In dem geodätischen Dreieck ABC werden die Punkte D und E so angenommen, daß

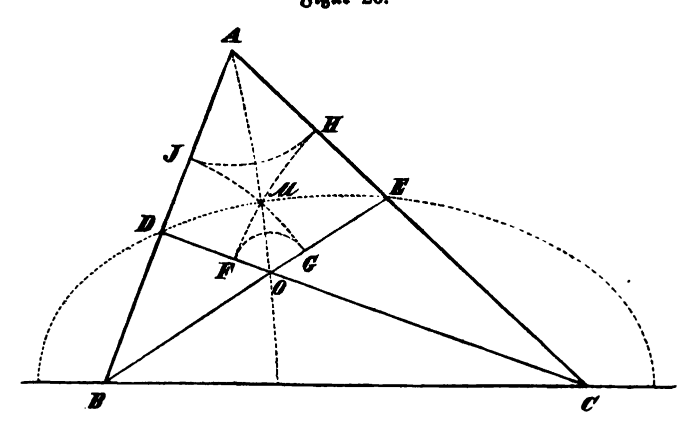
$$BD + DC = BE + EC \text{ ist.}$$

Ist nun ferner $BD + DF = BO + OF$ und $CE + EG = CO + OG$ so ist auch $OF = OG$.

Beschreibt man also von B und C aus die geodätischen Kreisbögen GI und FH, so ist $DI = DF$ und $EH = EG$.

Ferner ist $MC - MB = OC - OB$, also liegen die Punkte O und M auf einer geodätischen Hyperbel, deren Brennpunkte B und C sind. Da auch

Figur 20.



MB + MC = BD + DC = BE + EC ist, so liegt M zugleich auf der geodätischen Ellipse, deren Brennpunkte B und C sind und welche durch D und E geht.

In der Ebene und auf der Kugel, sowie überhaupt auf den Flächen von constantem Krümmungsmaß, ist zugleich AI = AH und die Hyperbel OM geht auch durch A.

3. Es sei BD + DC = BE + EC und zugleich AI — ID = AC — DC, AH — HE = AB — BE.

Dann ist auch AI = AH, also MC — MB = AC — AB, d. h. die Punkte A und M liegen auf einer geodätischen Hyperbel, deren Brennpunkte B und C sind. Da auch MB + MC = BD + DC = BE + EC ist, so liegt M zugleich auf der geodätischen Ellipse, deren Brennpunkte B und C sind, und welche durch D und E geht. In der Ebene und auf der Kugel ꝛc. ist zugleich OF = OG und die Hyperbel AM geht auch durch O.

4. Es sei AC — AB = OC — OB und zugleich BD + DF = BO + OF, OG = OF.

Beschreibt man nun von B und C aus die geodätischen Kreisbögen GI und FH, so ist AI = AH und DI = DF. Die Punkte AMO liegen auf der geodätischen Hyperbel mit den Brennpunkten B und C.

In der Ebene und auf der Kugel ꝛc. ist zugleich EG = EH und die Punkte D, M, E liegen auf der Ellipse mit den Brennpunkten B und C.

5. Auf einer Fläche sind drei Punkte A, B, C gegeben, welche durch geodätische Linien verbunden werden; innerhalb des Dreiecks liegt ein Punkt P, von welchem aus man nach den Ecken die geodätischen Linien PA, PB, PC zieht, und welcher durch die Gleichung

$$1)\quad P = A\alpha + B\beta + C\gamma$$

bezeichnet werden soll, in der die numerischen Coefficienten α, β, γ die Verhältnisse des Inhalts der 3 kleineren Dreiecke zum ganzen Dreiecke angeben, also $\alpha = \frac{PAB}{ABC}$ ꝛc., so daß man die Bedingungsgleichung hat

$$2)\quad \alpha + \beta + \gamma = 1$$

Diese Coefficienten können als Coordinaten von P hinsichtlich des Fundamentaldreiecks ABC angesehen werden und das Symbol $A\alpha + B\beta + C\gamma$ dient

dann zur Bestimmung der Lage von P. Ist Einer der Coefficienten, z. B. $\alpha = 1$, so muß $\beta = \gamma = o$ sein, und das allgemeine Symbol nimmt dann für die Ecken die speciellen Werthe A, B, C an. Ist $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$, so erhält man im Inneren des Dreiecks einen Punkt S, welcher dem Schwerpunkt der ebenen Dreiecke entspricht. Für einen zweiten Punkt P' ist demnach

3) $P' = A\alpha' + B\beta' + C\gamma'$ und das Symbol eines dritten Punkts sei

4) $$P_m = A \left\{ m\alpha + (1 - m)\, \alpha' \right\} + B \left\{ m\beta + (1 - m)\, \beta' \right\} + C \left\{ m\gamma + (1 - m)\, \gamma' \right\}$$

m ist ebenfalls ein numerischer Werth, durch dessen Veränderung man eine Reihe von Punkten P_m erhält, die auf einer bestimmten Linie liegen, welche man wegen der Analogie mit den Transversalen des ebenen Dreiecks auch eine Transversale nennen kann. Für $m = 1$ wird $P_m = P$, für $m = o$ ist $P_m = P'$. Setzt man in 4) der Reihe nach die Coefficienten von A, B, $C = o$, so erhält man für die Durchschnittspunkte der Transversale mit den Seiten des Dreiecks ABC oder ihren Verlängerungen die Werthe (indem zur Abkürzung diese Coefficienten gleich α_m, β_m, γ_m gesetzt werden).

5) $P_a = B\beta_m + C\gamma_m$ 6) $P_b = C\gamma_m + A\alpha_m$ 7) $P_c = A\alpha_m + B\beta_m$

Das Verhältniß $\frac{\beta_m}{\gamma_m}$ der Coefficienten von B und C in 5) ist gleich demjenigen der geodätischen Dreiecke $\frac{ABP_a}{ACP_a}$, ebenso ist es bei 6) und 7), somit erhält man den Satz:

Verbindet man die drei Punkte, in welchen eine Transversale die Seiten eines geodätischen Dreiecks oder ihre Verlängerungen schneidet, mit den Gegenecken durch geodätische Linien, so ist bei den 6 Dreiecken, die auf solche Art entstehen, das Product der drei ersten gleich dem Product der 3 andern. Liegt der Punkt P_m auf der durch A und P bestimmten Ecktransversale, oder fällt in 4) P' mit A zusammen, so ist $\alpha' = 1$, $\beta' = \gamma' = o$, also verwandelt sich 4) in

8) $P_m = (m\alpha + 1 - m)\, A + m\beta\, B + m\gamma\, C$.

Da hier das Verhältniß der Coefficienten von B und $C = \frac{\beta}{\gamma}$, also unabhängig von m ist, so folgt daraus, daß bei einer Ecktransversale das Verhältniß der Inhalte von den beiden in der Ecke zusammenstoßenden geodätischen Dreiecken constant ist. Setzt man in 8) $m\alpha + 1 - m = o$, so erhält man das Symbol für den Fußpunkt der Transversale auf der Seite BC, und schließt dann weiter, indem man die Gleichungen der beiden andern durch P gehenden Ecktransversalen bildet:

Schneiden sich 3 Ecktransversalen in einem Punkt P, und zieht man von ihren Fußpunkten nach den Gegenecken 3 geodätische Linien, so wird das Fundamentaldreieck in 6 Dreiecke getheilt, bei welchen das Product der drei ersten gleich dem Producte der 3 andern ist.

Ebenso wie P_m aus P und A abgeleitet ist, läßt sich irgend ein weiterer Punkt P_n aus P und P_m auf der Ecktransversale bestimmen, nämlich

$$9)\ P_n = \{m\alpha + (1-m)(m\alpha + 1 - m)\} A + \{m\beta + (1-m) m\beta\}$$
$$B + \{m\gamma + (1-m)\ m\gamma\} C$$

Das Verhältniß der Coefficienten von B und C ist auch hier $= \frac{\beta}{\gamma}$.

Man betrachte nun den Punkt $P = A\alpha + B\beta + C\gamma$ als fest, und den Punkt $P' = A\alpha' + B\beta' + C\gamma'$ als veränderlich und füge zu den Bedingungsgleichungen $\alpha + \beta + \gamma = 1$, $\alpha' + \beta' + \gamma' = 1$ noch die folgende hinzu

$$10)\ \sqrt{\alpha\alpha'} + \sqrt{\beta\beta'} + \sqrt{\gamma\gamma'} = \delta$$

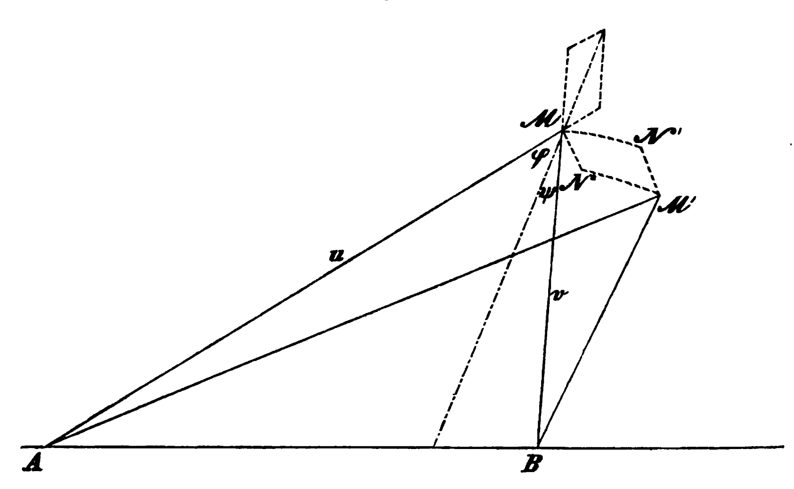
Bestimmen ferner in einer Kugel, deren Mittelpunkt O und Halbmesser 1 ist, drei zu einander rechtwinklige Halbmesser oder Axen OX, OY, OZ. $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ sind zwei Punkte auf der Kugel, und α, β, γ; α', β', γ' die Quadrate der Cosinus, welche die Halbmesser O$\mathfrak{P}$ und O$\mathfrak{P}'$ mit den Axen machen, so ist $\delta = \cos \mathfrak{P}O\mathfrak{P}'$. Nimmt man δ als constant an, so beschreibt der Punkt $\mathfrak{P}'$ auf der Kugel einen Kreis und der correspondirende Punkt P' auf der Fläche eine Linie, die man in gewissem Sinn ebenfalls einen Kreis nennen kann, da sie viele Eigenschaften mit dem Kreis gemein hat, wenn man, wie es überhaupt bei solchen Untersuchungen nöthig ist, sich nur auf kleinere Gebiete der Fläche beschränkt, die sich nicht auf die ganze Ausdehnung derselben erstrecken.

§. 4. Bipolare geodätische Coordinaten.

Werden die geodätischen Radien vectoren MA und MB mit u und v bezeichnet, so läßt sich die Gleichung einer Curve (M) auf einer Fläche in der Form

$$u = f(v)$$

Figur 21.



darstellen; u und v können bipolare geodätische Coordinaten genannt werden. Durch Differenziation ergibt sich

$$du = f'(v)\ dv;$$

für einen zweiten Punkt M' der Curve ist $M'A = u + du$, $M'B = v + dv$; man beschreibe nun von A aus mit den geodätischen Halbmessern MA und M'A, von B aus mit MB und M'B Bögen, so erhält man ein Viereck MNM'N', dessen Seiten Bögen von geodätischen Kreisen sind und welches bei der Annäherung von M' an M zu einem Parallelogramm wird, dessen Diagonale MM' die Tangente der Curve in M ist. Das Verhältniß zweier anstoßender Seiten $\frac{MN'}{MN}$ ist $= \frac{du}{dv} = f'(v)$ und läßt sich also construiren, wenn die Gleichung $u = f(v)$ gegeben ist. Wird nun das Parallelogramm um die Ecke M um 90^0 gedreht, so fällt MN' in die Verlängerung von MB, MN in diejenige von MA und die Diagonale MM' wird Normale der Curve. Hieraus folgt der Satz:

Ist die Gleichung einer Curve auf irgend einer Fläche in bipolaren geodätischen Coordinaten gegeben, so lege man in der Tangentialebene von einem Punkte M derselben Tangenten an die geodätischen Radien vectoren, trage auf ihnen Strecken ab gleich dem Zähler und Nenner des Differenzialcoefficienten der letzteren, vervollständige das Parallelogramm, so ist die durch M gehende Diagonale Normale der Curve.

Auf jeder Tangente ist die der Zunahme des andern Radius entsprechende Strecke abzutragen; ist der Differenzialcoefficient negativ, so sind beide Strecken auf der Verlängerung über M hinaus, im andern Falle ist die Eine auf der entgegengesetzten Richtung zu nehmen.

Die einfachsten Beispiele, welche man durch Specialisirung von f (v) erhält, sind folgende:

1. $u \pm v = c \qquad du \pm dv = 0,$

2. $u = cv \qquad \frac{du}{dv} = \frac{u}{v},$

3. $u^2 - v^2 = c \qquad \frac{du}{dv} = \frac{v}{u},$

4. $u^2 + v^2 = c \qquad \frac{du}{dv} = -\frac{v}{u},$

5. $uv = c \qquad \frac{du}{dv} = -\frac{u}{v},$

6. $\frac{1}{u} - \frac{1}{v} = c \qquad \frac{du}{dv} = \frac{u^2}{v^2}.$

Werden die Winkel zwischen der Normale und den geodätischen Radien vectoren im Punkte M mit φ und ψ bezeichnet, so ist $\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \pm \frac{du}{dv}$, also stehen in diesen sechs Fällen die Sinus der Winkel in sehr einfachen Beziehungen zu u und v. Durch Veränderung von c erhält man Curvenschaaren, welche in der Ebene

1. confocale Ellipsen und Hyperbeln, mit den Brennpunkten A und B,
2. Kreise, welche die Gerade AB und ihre Verlängerung harmonisch theilen,
3. Gerade, senkrecht auf AB,

4. concentrische Kreise, deren Durchmesser $\gtrless$ AB sein kann,
5. confocale Lemniscaten, mit den Brennpunkten A und B,
6. Niveaulinien oder rechtwinklige Trajectorien magnetischer Curven, welche feine Eisentheilchen bilden, die auf ein Papier gestreut werden, unter welches ein Hufeisenmagnet mit seinen Polen gehalten wird, sind.

Da man durch Integration der Differenzialgleichungen auf die gegebenen zurückkommt, so lassen sich alle diese Sätze umkehren, also beim ersten Beispiel: wenn die Tangenten der bipolaren Coordinaten in einem Punkte der Curve mit ihrer Normale gleiche Winkel bilden, so ist ihre Summe oder Differenz constant. Oder bei 2.: wenn das Verhältniß der Sinus dieser Winkel constant ist, so ist es auch das Verhältniß der Coordinaten u. s. w.

Die Einführung bipolarer geodätischer Coordinaten, welche, wie aus dem Obigen ersichtlich ist, zu einer einfachen Construction von Tangente und Normale führt, läßt sich übrigens noch in vielen Fällen auf eine andere Art verwerthen. Wenn man das Dreieck ABM, in welchem, wie oben, A und B die Brennpunkte und M ein Punkt der Curve sind, in der Art zu einem Viereck vervollständigt, daß man die von M nach der Mitte von AB gezogene geodätische Linie MO um sich selbst nach N verlängert und die geodätischen Linien NA und NB zieht, so können in allen denjenigen Fällen, wo die Gegenseiten des Vierecks gleich sind, also MA = NB und MB = NA, M und N als Brennpunkte einer zweiten Curve angesehen werden, welche durch A und B geht und die derselben Gleichung, wie die erste, nämlich $u = f(v)$ genügt. Die Gleichheit der Gegenseiten findet in der Ebene und auf der Kugel, wo die geodätischen Linien Bögen größter Kreise sind, immer statt, wie auch auf allen Flächen von constantem, positivem oder negativem, Krümmungsmaß, ferner auf solchen, welche zwei zu einander senkrechte Symmetralebenen haben, und wenn O auf ihrem Durchschnitte liegt; also insbesondere bei den centrischen Flächen zweiter Ordnung, für A und B als Kreispunkte. Durch Veränderung des Durchmessers MN erhält man ein System von Curven ähnlicher Art, deren gemeinsame Durchschnittspunkte A und B sind und welche denselben Parameter c haben.

Bei der ersten Gleichung $u \pm v = c$ ist c die geodätische Länge der großen Axe der geodätischen Ellipse oder Hyperbel, somit haben wir den Satz:

Die Brennpunkte (M und N) sämmtlicher concentrischer geodätischen Ellipsen und Hyperbeln, welche durch zwei feste Punkte auf einer der genannten Flächen (A und B) gehen, und deren große Axen gleich sind, liegen auf einer geodätischen Ellipse oder Hyperbel, deren Brennpunkte A und B sind.

Auf den Flächen von constantem Krümmungsmaß können die Punkte A und B beliebig angenommen werden, bei der Kugel sind die Curven sphärische Kegelschnitte; wenn A und B Kreispunkte einer centrischen Fläche zweiter Ordnung sind, so liegen die Brennpunkte der Curven auf einer Krümmungslinie. In allen Fällen werden die Curven einen geodätischen Kreis berühren, dessen Mittelpunkt O ist.

AB sei ein Bogen auf einem größten Kreise der Kugel, A und B sind die Brennpunkte einer sphärischen Ellipse, deren große Axe CD ist; also ist OC = OD der Halbmesser eines Kreises, welchen sämmtliche durch A und B gehende sphärische Ellipsen berühren und deren Brennpunkte auf der ersten Ellipse liegen. Man kann aber auch die Figur als die sphärische Basis von Kegeln ansehen, deren

Spitze im Mittelpunkte der Kugel ist; dann sind die nach den Brennpunkten gehenden Halbmesser der Kugel Focallinien und man erhält den Satz:

Die Focallinien aller Kegel zweiter Ordnung, welche einen Rotationskegel in zwei entgegengesetzten Mantellinien berühren und durch zwei zur Kegelaxe symmetrisch liegende Gerade gehen, liegen auf einem Kegel, welcher den Rotationskegel ebenfalls berührt und dessen Focalen jene Gerade sind.

Da die Kreisschnitte der Ergänzungskegel senkrecht stehen auf den Focalen der gegebenen, so ergibt sich durch Übertragung auf die Ergänzungskegel:

Die cyklischen Ebenen aller Kegel zweiter Ordnung, welche einen Rotationskegel in zwei entgegengesetzten Mantellinien berühren, sowie auch zwei zur Kegelaxe symmetrisch liegende Ebenen, berühren einen Kegel, welcher den Rotationskegel gleichfalls berührt und dessen Kreisschnitte parallel mit diesen Ebenen sind. Unter cyklischen Ebenen sind zwei durch die Spitze eines Kegels parallel mit den Kreisschnitten gelegte Ebenen zu verstehen.

Als zweites Beispiel wählen wir die Gleichung 5): $uv = c$, welche in der Ebene den confocalen Lemniscaten entspricht, und bezeichnen die entsprechenden Curven auf einer beliebigen Fläche analog als geodätische Lemniscaten, deren Brennpunkte A und B sind. Die geodätischen Strecken $OA = OB = \sqrt{e}$ sind constant, dagegen c veränderlich; die große Halbaxe ist $= \sqrt{c + e}$, die kleine $= \sqrt{c - e}$. Bei der gemeinen Lemniscate ist $c = e$, also $\sqrt{c - e} = 0$, die übrigen theilen sich in zwei Gruppen, die einen $c > e$ umschließen die erstere, während die anderen $c < e$ von ihr umschlossen werden. Durch Veränderung von c erhält man ein System von confocalen Lemniscaten, welche einen von O aus mit dem Halbmesser OA beschriebenen Kreis so schneiden (in der Ebene), daß in den Durchschnittspunkten M, M', ... die Tangenten der Lemniscaten parallel mit AB sind; die Winkel AMB, AM'B, ... sind rechte. Für diese Eigenschaft des Kreises bietet sich auch bei den sphärischen und ellipsoidischen Lemniscaten ein Analogon dar: Werden auf einer Kugel von zwei festen Punkten aus (A und B) Bögen größter Kreise gezogen, die sich rechtwinklig (in M oder M') schneiden, so liegen diese Durchschnittspunkte auf einem Kegelschnitte, und nach dem Satze von Mich. Roberts schneiden sich die von den Kreispunkten eines Ellipsoids rechtwinklig zu einander gezogenen geodätischen Linien (AM und BM) auf einer sphärischen Curve. Hieraus folgt also:

Die Durchschnittspunkte von rechtwinklig sich schneidenden Radien vectoren eines Systems confocaler Lemniscaten liegen bei einer Kugel sowohl, als auch bei einem Ellipsoid, wenn die Brennpunkte Kreispunkte sind, auf einem sphärischen Kegelschnitte.

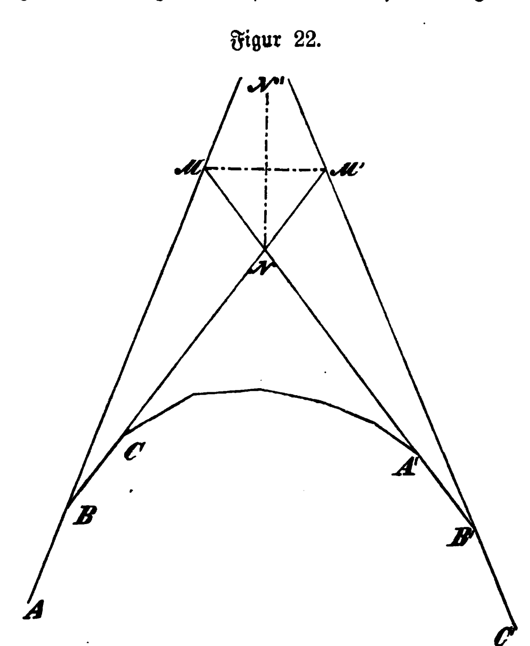
Betrachten wir aber in der Gleichung $uv = c$ c als constant, dagegen e als veränderlich, so erhalten wir ein anderes System von geodätischen Lemniscaten, bei welchen die Summe der Quadrate der Halbaxen constant ist. Es sei, wie oben, die Diagonale MON des geodätischen Vierecks AMBN ein Durchmesser einer Lemniscate, und M und N sollen die Brennpunkte einer zweiten Lemniscate sein, für welche auch die Gleichung $uv = c$ ($AM . AN = BM . BN = c$) gilt, und die also durch A und B geht. Durch Veränderung des Durchmessers MON ergibt sich ein System von Lemniscaten, welche sämmtlich sich in A und B

schneiden und bei denen die Summe der Quadrate der Halbaxen constant ist. Sind nun A und B beliebige Punkte in der Ebene oder auf der Kugel, wie überhaupt auf Flächen von constantem, positivem oder negativem, Krümmungsmaß, ferner auf solchen Flächen, welche zwei sich senkrecht schneidende Symmetralebenen haben, wofern sie symmetrisch gegen eine solche Ebene liegen, so hat man den Satz:

Alle concentrischen geodätischen Lemniscaten von gleichem Parameter (c) und gleicher Quadratsumme der Halbaxen haben einen gemeinschaftlichen Durchmesser (AB).

Schließlich folgen noch zwei Beispiele, um die Anwendung der oben angegebenen Tangentenconstruction auch bei abgeleiteten Curven zu zeigen.

Figur 22.



Einer geschlossenen Curve auf einer Fläche sei ein Polygon einbeschrieben ABC ... A'B'C', dessen Seiten geodätische Linien sind. Die geodätischen Verlängerungen AB und B'A' schneiden sich in M, diejenigen von BC und C'B' in M', so ist MM' ein Element der Curve, welche man sich bei unendlicher Annäherung der Punkte ABC ... A'B'C' auch dadurch entstanden denken kann, daß ein geschlossener Faden um die Curve geschlungen ist, welcher länger als die Curve ist und von dem ein Theil durch die geodätischen Tangenten MB und MA' gebildet wird. Beim Übergang von M nach M' können MB und MB' als bipolare geodätische Coordinaten einer Ellipse angesehen werden, deren Brennpunkte B und B' sind und die durch M geht. In M' geht diese Ellipse in eine zweite über mit den Brennpunkten C und C' u. s. f. Also werden alle diese Ellipsen die Curve MM' berühren, deren einzelne Elemente aus elliptischen Bögen bestehen. Wenn man dagegen die Polygonseiten AB und C'B', BC und B'A' verlängert, so erhält man die Schnittpunkte N und N'; beim Übergang von N nach N' wird der Punkt N den Bogen einer geodätischen Hyperbel beschreiben, deren Brennpunkte B und B' sind. Ebenso ist das nächste Element N'N'' der Curve (N) der Bogen einer Hyperbel mit den Brennpunkten C' und A; diese Curve besteht also aus einzelnen Hyperbelbögen und schneidet die Curve (M) senkrecht. Auf der Kugel sind diese Curven confocale sphärische Kegelschnitte und auf den centrischen Flächen zweiter Ordnung Krümmungslinien. Daher schließt man:

Werden von einem Punkte M außerhalb eines sphärischen Kegelschnittes auf einer Kugel oder außerhalb einer Krümmungslinie auf einem Ellipsoid zwei geodätische Tangenten gezogen,

so sind durch M und die beiden Berührungspunkte als Brennpunkte eine geodätische Ellipse und Hyperbel bestimmt, welche die durch M gehenden confocalen sphärischen Kegelschnitte, beziehungsweise Krümmungslinien berühren. In der Ebene findet eine Berührung zweiter Ordnung statt.

Wenn man von einem Punkte O auf die Tangente einer Curve ein Perpendikel OM fällt, so liegt M auf der Fußpunktenkurve, welche von dem über OT als Durchmesser (T Berührungspunkt) beschriebenen Kreise in M berührt wird. Man nehme nun an, O liege auf einer beliebigen Fläche und TM sei eine geodätische Tangente der Curve; der Punkt M sei durch die Gleichung bestimmt

$$OM^2 + TM^2 = OT^2,$$

d. h. OM und TM sind bipolare Coordinaten der Curve 4. $u^2 + v^2 = c$ $\frac{du}{dv} = -\frac{v}{u}$, so läßt sich nach dem Vorhergehenden die Tangente in M von dieser Curve bestimmen. Für einen zweiten Punkt T' der gegebenen Curve erhält man das Dreieck OM'T', in welchem ebenfalls $OM'^2 + T'M'^2 = OT'^2$. MM' ist also ein Element der abgeleiteten Curve, welche der Fußpunktenkurve in der Ebene entspricht und deren Tangente sich nach Gleichung 4. bestimmen läßt.

§. 5. Über die Winkelsumme in Dreiecken, gebildet aus Linien des Systems (a) oder aus geodätischen Linien.

Wenn man die Oberfläche einer Kugel, deren Halbmesser = 1, in 720 gleiche Theile theilt, so ist die Anzahl solcher Theile, welche eine sphärische Figur enthält, ihr Inhalt. Theilt man einen größten Kreis einer Kugel in 360 gleiche Theile oder Grade, so ist die Anzahl solcher Theile, welche eine sphärische Linie enthält, ihre Länge, oder bei einer geschlossenen sphärischen Linie ihr Umfang. Dieß vorausgesetzt, haben wir folgenden Satz:

Der Inhalt einer sphärischen Figur, vermehrt um den Umfang ihrer Polarfigur, ist = 360, oder umgekehrt, der Umfang der ersteren plus dem Inhalt der letzteren ist = 360.

Wir nehmen zunächst an, die sphärische Figur habe keine einspringenden Theile.

Der Pol eines größten Kreises ist der Endpunkt des auf demselben senkrechten Kugelhalbmessers. Die Pole sämmtlicher größten Kreise, welche eine sphärische Figur berühren, bilden die Polarfigur. Bezeichnet man die Winkelsumme eines sphärischen Dreiecks, d. h. die Anzahl Grade, welche die drei Winkel zusammen enthalten, mit s, so ist dessen Inhalt = s — 180; theilt ein sphärisches Vieleck durch Bögen größter Kreise, die von einer Ecke ausgehen, in n — 2 Dreiecke, so ist demgemäß dessen Inhalt

$$= S - (n - 2) \,.\, 180;$$

mit S bezeichnen wir die Winkelsumme des Vielecks. ABCDE... sei das Vieleck; ein größter Kreis bewege sich so, daß er nach und nach durch alle Seiten des Vielecks geht, oder sich nach und nach um alle Ecken desselben dreht. Beim Übergang von der Seite AB zur Seite BC, oder bei der Drehung um die Ecke B, beschreibt z. B. der Pol des größten Kreises einen Bogen, dessen Länge = 180 — B Grade ist; wenn der größte Kreis sich um alle Ecken gedreht hat und

wieder in seine ursprüngliche Lage zurückgekehrt ist, so hat der Pol das Polar-Vieleck beschrieben, dessen Umfang somit

$$= n \,.\, 180 - (A + B + C \ldots) = n \,.\, 180 - S$$

ist.

Wir erhalten also für die Summe des Inhalts eines sphärischen Vielecks und des Umfangs seines Polar-Vielecks die Zahl

$$S - (n - 2) \,.\, 180 + n \,.\, 180 - S = 360.$$

Dieser Satz gilt, wie groß auch n ist; beschreibt man also in eine sphärische Figur ein Vieleck von unendlich vielen Seiten, so gilt er für dasselbe oder für die Figur selbst. Somit ist der erste Theil des Satzes 1. bewiesen; die Umkehrung folgt daraus, daß eine sphärische Figur die Polarfigur ihrer eigenen Polarfigur ist.

Wenn aber das aus Bögen größter Kreise gebildete Vieleck auf der Kugel einspringende Winkel hat, so gilt die vorstehende Beweisführung ebenfalls, nur muß derjenige Theil des Umfangs der Polarfigur, welcher durch eine rückläufige Bewegung des Pols erzeugt wird, subtraktiv genommen werden. Wir wollen annehmen, ABCDEFG sei das Vieleck und E der einspringende Winkel. Während sich der nach und nach durch alle Seiten gehende größte Kreis um die Nebenwinkel von A, B, C, D dreht, geschieht die Drehung immer in gleichem Sinne, z. B. von rechts nach links (man denke sich so in der Richtung von den durch die Ecken A, B, C... gehenden Kugelhalbmessern stehend, daß die Füße im Mittelpunkte der Kugel sind, der Kopf in den Ecken A, B... und daß man mit dem Gesicht gegen den Pol des größten Kreises gekehrt ist). In der Ecke E, beim Übergang von der Seite DE zur Seite EF dreht sich der größte Kreis von links nach rechts um einen Winkel = E — 180 und der Pol macht also eine rückläufige Bewegung; in F und G findet dagegen wieder wie früher eine Drehung von rechts nach links statt. Betrachten wir nun denjenigen Theil des Umfangs der Polarfigur, wo der Pol eine rückläufige Bewegung gemacht hat, als negativ, so haben wir für diesen Umfang

$$6 \,.\, 180 - (A + B + C + D + E + F + G) - (E - 180) = 7 \,.\, 180 - S,$$

wenn S die Summe der Vieleckswinkel ist. Der Inhalt des Vielecks ist wie oben = S — 5 . 180; somit ist, wie oben, die Summe des Inhalts und des Umfangs der Polarfigur = 360. Wenn das Vieleck außer E noch mehrere einspringende Winkel enthielte, so würden bei jedem derselben die gleichen Schlußfolgerungen zu ziehen sein. Ist die sphärische Figur krummlinig mit einspringenden Theilen, so gilt der Satz 1. unter der Voraussetzung, daß beim Umfang der Polarfigur diejenigen Theile, welche der Pol in rückläufiger Bewegung beschrieben hat, subtraktiv genommen werden.

Gegeben ist eine beliebige Linie auf irgend einer Fläche. Wir ziehen durch jeden Punkt der Linie erstens die Flächen-Normale, zweitens die conjugirte Tangente der Linie (Durchschnitt der durch zwei unendlich nahe Punkte der Linie gehenden Tangential-Ebenen); wir ziehen ferner mit allen Flächen-Normalen sowie mit allen conjugirten Tangenten parallele Kugelhalbmesser, so erhalten wir zwei sphärische Figuren, wovon die Eine die Polarfigur der andern ist; somit haben wir folgenden Satz:

Der Inhalt der den Flächen-Normalen einer Linie auf einer Fläche correspondirenden sphärischen Figur, vermehrt um den

Umfang der den conjugirten Tangenten dieser Linie correspondirenden sphärischen Figur, ist gleich 360, und umgekehrt, der Umfang der ersteren plus dem Inhalt der letzteren ist gleich 360. Wenn die erste sphärische Figur einspringende Theile hat, so sind die, durch eine rückläufige Bewegung des Pols entstandenen Theile vom Umfang der Polarfigur subtraktiv zu nehmen.

Der Umfang der den conjugirten Tangenten einer Linie auf einer Fläche correspondirenden sphärischen Figur ist gleich der Summe der Drehungswinkel, welche die conjugirte Tangente beschreibt, wenn sie nach und nach über alle Punkte der Linie auf der Fläche kommt. Sind nämlich $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$ unendlich nahe Punkte einer solchen Linie, so sind, wie bekannt, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta \ldots$ Tangenten-Richtungen. Die conjugirte Tangente des Elements $\alpha\beta$ ist der Durchschnitt von zwei Ebenen, welche die Fläche in α und β berühren; dieser Durchschnitt steht also senkrecht auf derjenigen Ebene, welche den beiden durch α und β gehenden Flächen-Normalen parallel ist. Ebenso ist die conjugirte Tangente von $\beta\gamma$ der Durchschnitt von zwei Ebenen, welche die Fläche in β und γ berühren u. s. w. Bewegt sich nun eine Gerade so, daß sie nach und nach mit allen conjugirten Tangenten der Elemente $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\varepsilon$, u. s. w. zusammentrifft, so ist die Summe der Drehungswinkel, welche sie bei dieser Bewegung beschreibt, gleich dem Umfange der den conjugirten Tangenten der Linie $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon \ldots$ correspondirenden sphärischen Figur. Die Summe dieser Drehungswinkel läßt sich nun in zwei speciellen Fällen leicht bestimmen.

Bei den Linien des Systems (a) oder den Cylinder-Berührungslinien, welche die Eigenschaft haben, daß die durch ihre einzelnen Punkte gehenden Flächen-Normalen Einer Ebene parallel sind, ist die den Flächen-Normalen einer Linie (a) correspondirende sphärische Linie ein größter Kreis; und den conjugirten Tangenten, welche unter sich parallel sind, entspricht auf der Kugeloberfläche ein Punkt. Eine Linie (a) ist somit die Berührungskurve der Fläche mit einem umschriebenen Cylinder; bei den Flächen zweiten Grades sind die Linien (a) Schnitte von Ebenen, welche bei dem Ellipsoid oder den Hyperboloiden durch den Mittelpunkt gehen, und demgemäß Centralschnitte oder auch Diametralschnitte heißen, und beim Paraboloid der Axe parallel sind.

$\alpha\beta\gamma$ sei ein Dreieck aus Linien (a) auf einer Fläche. Wenn die conjugirte Tangente von α nach β geht, bleibt sie sich stets parallel; ihr Drehungswinkel ist also gleich 0. Beim Übergang im Punkte β in die Lage der conjugirten Tangente der Seite $\beta\gamma$ beschreibt sie einen gewissen Winkel $180 - \beta'$; von hier bis nach γ ist die Drehung wieder gleich 0; beim Übergang in γ in die Lage der conjugirten Tangente der Seite $\gamma\alpha$ beschreibt die bewegliche Linie wieder einen Winkel $180 - \gamma'$; von da bis nach α ist die Drehung gleich 0; beim Übergang in α in die ursprüngliche Lage beschreibt die Linie einen dritten Winkel $180 - \alpha'$; also ist die Summe der Drehungswinkel, welche die conjugirte Tangente beschrieben hat, bei ihrer Bewegung auf dem Umfang des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$

$$540 - (\alpha' + \beta' + \gamma');$$

α', β', γ' sind die Winkel zwischen je zwei conjugirten Tangenten in den Ecken des Dreiecks. Es ist aber, um eine Verwechselung dieser Winkel mit ihren Nebenwinkeln zu vermeiden, Folgendes zu bemerken: Dreht sich in der Ecke α des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ eine Gerade so von der Richtung der Tangente der Seite $\alpha\beta$ zur Richtung der Tangente der Seite $\alpha\gamma$, daß sie den Dreieckswinkel α selbst und

nicht dessen Nebenwinkel beschreibt, so wird sich auch die conjugirte Tangente um einen gewissen Winkel drehen, den wir α' nennen. Ebenso sind β' und γ' die Winkel, um welche sich die conjugirte Tangente in den Punkten β und γ dreht, wenn die Tangente in diesen Punkten die betreffenden Dreieckswinkel beschreibt.

Nun ist nach Satz 2. die Summe der Drehungswinkel $540 - (\alpha' + \beta' + \gamma')$, oder der Umfang der den conjugirten Tangenten von $\alpha\beta\gamma$ correspondirenden sphärischen Figur, vermehrt um den Inhalt der den Flächen-Normalen von $\alpha\beta\gamma$ correspondirenden sphärischen Figur, $= 360$. Letztere ist aber ein gewöhnliches aus Bögen größter Kreise bestehendes Dreieck; bezeichnen wir dessen Inhalt mit i (dieß ist nach unserer Erklärung eine Zahl, welche angibt, wie viel von den 720 gleichen Theilen der Kugeloberfläche auf dieses sphärische Dreieck kommen), so ist:

$$540 - (\alpha' + \beta' + \gamma') + i = 360,$$

oder:

$$\alpha' + \beta' + \gamma' - 180 = i.$$

In dieser Gleichung ist folgender Satz enthalten:

Der Überschuß der Summe von den Winkeln zwischen je zwei conjugirten Tangenten in den Ecken eines Dreiecks aus Linien (a) auf einer gleichartig gekrümmten Fläche über 180° ist gleich dem Inhalt des den Flächen-Normalen dieses Dreiecks correspondirenden sphärischen Dreiecks.

Bei der Anwendung dieses Satzes auf das Ellipsoid, zweimantlige Hyperboloid oder elliptische Paraboloid setzt man statt „Linien (a)“ Centralschnitte oder der Axe parallele Schnitte.

Bei einer ungleichartig gekrümmten Fläche dagegen ist die Summe der Drehungswinkel, welche die conjugirte Tangente beschreibt, indem sie nach und nach über alle Punkte des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ hingleitet und schließlich wieder in ihre ursprüngliche Lage in α zurückkehrt,

$$= 180 + \alpha' + \beta' + \gamma'.$$

Somit ist:

$$180 + \alpha' + \beta' + \gamma' + i = 360,$$
$$180 - (\alpha' + \beta' + \gamma') = i.$$

Wir haben also folgenden Satz:

Der Überschuß von 180° über die Winkelsumme von je zwei conjugirten Tangenten in den Ecken eines Dreiecks aus Linien (a) auf einer ungleichartig gekrümmten Fläche ist gleich dem Inhalt des den Flächen-Normalen dieses Dreiecks correspondirenden sphärischen Dreiecks.

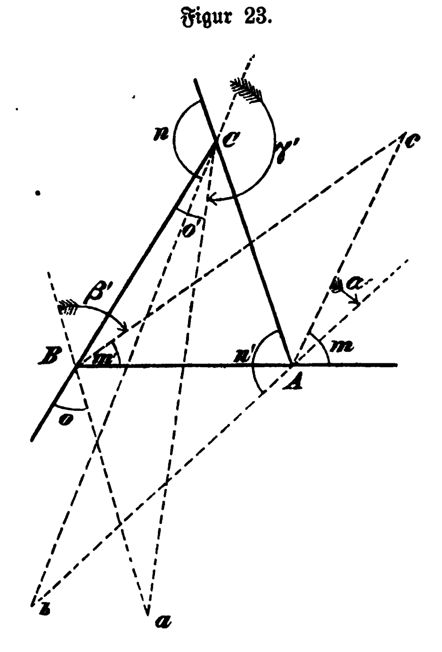
Bei der Anwendung dieses Satzes auf das einmantlige Hyperboloid oder hyperbolische Paraboloid setzt man statt „Linien (a)“ Centralschnitte oder der Axe parallele Schnitte.

Dreiecke aus geodätischen Linien.

In Figur 23. ist ABC ein geodätisches Dreieck, dessen Winkelsumme bestimmt werden soll. Die conjugirten Tangenten der geodätischen Linie AB in den Punkten A und B sind Ac und Bc, sie schneiden sich zwar in der Figur, aber

in Wirklichkeit nicht. Wenn aber die geodätische Linie AB in eine Ebene abgewickelt wird, d. h. wenn die Tangential-Ebenen von A bis B sich je um die durch den betreffenden Berührungspunkt gehende conjugirte Tangente drehen, so verwandelt sich die geodätische Linie AB in eine Gerade A'B' (die man sich besonders gezeichnet denken kann), und die conjugirten Tangenten Ac und Bc in 2 Gerade A'c' und B'c', welche offenbar mit A'B' dieselben Winkel m und m' bilden, wie die conjugirten Tangenten Ac und Bc auf der Fläche mit den Elementen der geodätischen Linie in A und B. Somit ist die Summe der Drehungen, welche die Tangente Ac im Raum macht, um in die Lage Bc zu kommen, gleich dem Winkel A'c'B' oder gleich m — m'. Um von Bc in die Lage Ba der conjugirten Tangente des Elements B der geodätischen Linie BC zu kommen, ist eine Drehung in der Tangential-Ebene von B um 180 — β' nöthig. Nun rückt die conjugirte Tangente von Ba nach Ca (beide Linien schneiden sich in Wirklichkeit nicht) und es wird wie vorhin bewiesen, daß die Summe der hiebei stattfindenden Drehungen gleich o — o' ist. In der Tangential-Ebene von C dreht sich nun die conjugirte Tangente Ca des Elements C von CB in die Lage Cb der conjugirten Tangente des Elements C von CA um den Winkel 180 — γ'. Dann rückt CB nach Ab und beschreibt eine Summe von Drehungen gleich n — n'; endlich kommt Ab, oder die conjugirte Tangente des Elements A von AC durch Drehung in der Tangential-Ebene von A um den Winkel 180 — α' in die ursprüngliche Lage Ac zurück.

Figur 23.



Bezeichnen wir die Winkel des geodätischen Dreiecks ABC mit α, β, γ; die Winkel, welche je zwei conjugirte Tangenten in den Ecken α, β, γ mit einander bilden, durch α', β', γ'; nun ist einerseits die Summe der Drehungen, welche die conjugirte Tangente des geodätischen Dreiecks macht, indem sie, von A ausgehend, über die Seiten AB, BC, CA geht und in ihre ursprüngliche Lage in A zurückkehrt, $= c + 180 - \beta' + a + 180 - \gamma' + b + 180 - \alpha'$

$$= a + b + c + 540 - \alpha' - \beta' - \gamma',$$

oder, da

$$a = o - o', \quad b = n - n' \quad \text{und} \quad c = m - m'$$

ist,

$$= 540 + m - m' + n - n' + o - o' - \alpha' - \beta' - \gamma';$$

andererseits ist

in der Tangential-Ebene von A $\alpha' - m + n' = \alpha$,
" " " " B $\beta' - o + m' = \beta$,
" " " " C $\gamma' - n + o' = \gamma$;

somit ist die genannte Summe von Drehungen, oder der Umfang der den conjugirten Tangenten des geodätischen Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ correspondirenden sphärischen Figur,

$$= 540 - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Bezeichnen wir den Inhalt der den Flächennormalen von $\alpha\beta\gamma$ correspondirenden sphärischen Figur mit i, so ist nach Satz 2:

$$540 - (\alpha + \beta + \gamma) + i = 360,$$
$$i = \alpha + \beta + \gamma - 180.$$

Diese Gleichung enthält folgenden Satz:

Der Überschuß der Winkelsumme eines geodätischen Dreiecks auf einer Fläche über 180^0 ist gleich der den Flächennormalen des Dreiecks correspondirenden sphärischen Figur.

Bei einer ungleichartig gekrümmten Fläche, wie z. B. dem einmantligen Hyperboloid, ist die Summe der Drehungen, welche die conjugirte Tangente beschreibt, indem sie über das Dreieck hingleitet, und, von der Ecke A ausgehend, wieder in ihre ursprüngliche Lage in A zurückkehrt,

$$= a + b + c - \alpha' - \beta' - \gamma' + 180,$$

oder, weil

$$a = o' - o \quad b = n' - n, \quad c = m' - m$$

ist,

$$= 180 + m - m' + n - n' + o - o' - \alpha' - \beta' - \gamma'.$$

Ferner ist:

$$n' - m - \alpha' = \alpha,$$
$$m' - o - \beta' = \beta,$$
$$o' - n - \gamma' = \gamma;$$

somit ist die Summe der Drehungen, oder der Umfang des den conjugirten Tangenten des geodätischen Dreiecks ABC entsprechenden sphärischen Dreiecks,

$$= 180 + \alpha + \beta + \gamma.$$

Also ist nach Satz 2.:

$$180 + \alpha + \beta + \gamma + i = 360,$$
$$= 180 - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Der Überschuß von 180 Grad über die Winkelsumme eines geodätischen Dreiecks auf einer ungleichartig gekrümmten Fläche ist gleich dem Inhalt der den Flächen-Normalen des Dreiecks correspondirenden sphärischen Figur. (disq. Art. XX).

V. Die Fresnel'sche Wellenfläche.

I. Abschnitt. Die Construction der Wellenfläche.

Der Äther hat im Innern eines zweiaxigen Cristalls nach jeder Richtung im Allgemeinen eine andere Elasticität, es gibt aber für irgend einen Punkt O drei zu einander rechtwinklige Axen, deren Richtung mit der Cristallform in engem Zusammenhang steht, nach welchen die Elasticität ausgezeichnete Werthe hat und die deßhalb auch Elasticitätsaxen heißen. Wenn man aus dem Cristall drei Prismen schneidet, deren brechende Kanten parallel mit diesen Axen sind, so lassen sich mit Hülfe derselben die drei Hauptbrechungscoefficienten $\frac{1}{\sqrt{a}}$, $\frac{1}{\sqrt{b}}$, $\frac{1}{\sqrt{c}}$ $(a > b > c)$ bestimmen. Trägt man auf den Axen von O aus beiderseits Strecken auf gleich $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, so erhält man die Endpunkte der Axen des **Ergänzungsellipsoids** E (erstes Ellipsoid nach Plücker), aus welchem die **Wellenfläche** W (surface of ray velocities) abgeleitet wird, wie in § 1 angegeben ist. Ihre Halbmesser geben die Richtung und Geschwindigkeit der Lichtstrahlen an; da sie zwei Mäntel hat, so folgt daraus, daß sich auf jeder Geraden von O aus zwei Strahlen, ein schneller und ein langsamer, fortpflanzen. Werden aber auf den Axen Strecken aufgetragen, gleich $\frac{1}{\sqrt{a}}$, $\frac{1}{\sqrt{b}}$, $\frac{1}{\sqrt{c}}$, so bekommt man das **Polarisationsellipsoid** E' (zweites Ellipsoid nach Plücker), aus welchem die Wellengeschwindigkeitsfläche V nach § 2 abgeleitet wird.

V ist die Fußpunktfläche von W, d. h. legt man durch irgend einen Punkt M von W an diese Fläche die Tangentialebene und fällt darauf das Perpendikel ON, so liegt N auf V. In dieser Tangentialebene, (welche im Allgemeinen nicht senkrecht steht auf OM) oder parallel derselben finden die Schwingungen der einzelnen Ätherthеilchen des Strahls OM parallel MN statt; sie heißt deßwegen **Welle** oder **Wellenebene**, und da MN die Schwingungsrichtung angibt, so wird die Ebene des rechtwinkligen Dreiecks OMN **Schwingungs-** oder **Polarisations-Ebene** genannt. Die Halbmesser ON von V sind die Wellennormalen und geben durch ihre Größe die Wellengeschwindigkeit an, weßhalb V die **Wellengeschwindigkeitsfläche** (surface of wave velocities) genannt wird. Sie hat ebenfalls zwei Mäntel, also pflanzen sich nach jeder Richtung zwei parallele Wellen fort, eine schnelle und eine langsame; um eine klare Einsicht in die Beziehungen zwischen Wellennormalen und zugehörigen Strahlenrichtungen zu bekommen, ist es am zweckmäßigsten, die Krümmungslinien der beiden Ellipsoide zu Hülfe zu nehmen, wie in §. 1 und 2 angegeben. Modelle beider Flächen in einzelnen Octanten, mit den Durchschnitten der confocalen Kegel, lassen sich durch die Verlagshandlung von L. **Brill** in Darmstadt beziehen.

Wenn man von O auf die Tangential-Ebenen von E Perpendikel fällt, so liegen ihre Fußpunkte auf der **Elasticitätsfläche**; die Quadrate ihrer Halbmesser geben die elastische Kraft in gleicher Richtung an. Sie ist die inverse

Fläche von E', d. h. sie kann durch Transformation mittelst reciproker Radienvectoren von E' abgeleitet werden.

Eine zweite Wellenfläche W' läßt sich auf dieselbe Art aus E' construiren, wie W aus E; sie ist die inverse Fläche von V und wurde daher von W. R. Hamilton surface of wave slowness genannt (Mac Cullagh gab ihr den Namen index surface), da ihre Radien gleich den reciproken Werthen der Wellengeschwindigkeiten sind. Weil sie aber auch die Reciprokalfläche von W hinsichtlich einer concentrischen Kugel ist, so dient sie vermöge dieser doppelten Beziehung zur Ermittlung vieler Eigenschaften der beiden Hauptflächen. Plücker führte noch weiter das Directions-Ellipsoid ein, in Beziehung auf welches der eine Mantel von W die Reciprokalfläche des andern Mantels ist.

Zur Übersicht werden die Gleichungen von den hier in Betracht kommenden Flächen im Folgenden zusammengestellt; da in denselben die Buchstaben x, y, z; a, b, c in symmetrischer Weise vorkommen, so wird der Kürze wegen durch ein vor das Anfangslied gesetztes S eine symmetrische Summe bezeichnet. Es ist also $Sx^2 = x^2 + y^2 + z^2$; $Sax^2 = ax^2 + by^2 + cx^2$; $S\frac{x^2}{r-a} = \frac{x^2}{r-a} + \frac{y^2}{r-b} + \frac{z^2}{r-c}$; $Sa(b+c)x^2 = a(b+c)x^2 + b(c+a)y^2 + c(a+b)z^2$ u. s. w.

1) $Sx^2 = 1$ Gleichung der Kugel vom Halbmesser 1; in Beziehung auf dieselbe sind sowohl E und E' als auch W und W' Reciprokalflächen.

2) $Sx^2 = r$ Gleichung eines Systems concentrischer Kugeln, mit dem veränderlichen Halbmesser $\sqrt{r}$.

3) $S\frac{x^2}{a} = 1$ Gleichung des Ergänzungsellipsoids E.

4) $Sax^2 = 1$ Gleichung des Polarisationsellipsoids E'.

5) $S\frac{r-a}{a}x^2 = o$ Gleichungen der Kegel, welche E in sphärischen Curven schneiden.

6) $S\frac{a}{r-a}x^2 = o$ Gleichungen ihrer Ergänzungskegel und zugleich der asymptotischen Kegel der confocalen Hyperboloide von E'.

7) $S(v-a)x^2 = o \left(\frac{1}{v} = Sx^2\right)$ Gleichungen der Kegel, welche E' in sphärischen Curven schneiden.

8) $S\frac{x^2}{v-a} = o$ Gleichungen ihrer Ergänzungskegel und zugleich der asymptotischen Kegel der confocalen Hyperboloide von E.

9) $S\frac{a}{r-a}x^2 = o \; (r = Sx^2)$.

10) $S\frac{x^2}{E-bc} = o \; (E = Sax^2)$.

11) $S\frac{x^2}{r-a} = 1 \; (r = Sx^2)$.

12) $Sx^2 . Sax^2 - Sa(b+c)x^2 + abc = o$.

Dieß sind 4 verschiedene Formen für die Gleichung der Wellenfläche; die 3 ersten gehen in die vierte über, wenn man für r und E die beigesetzten Werthe substituirt. 11) stellt zugleich ein System von confocalen Flächen vor, deren primäre Axe die Z-Axe ist.

13) $S \frac{x^2}{v - a} = o \left(\frac{1}{v} = Sx^2\right)$

14) $(Sx^2)^3 - Sx^2 . S(b + c)x^2 + Sbcx^2 = o$ Gleichungen der Wellengeschwindigkeitsfläche.

15) $Sbcx^2 . Sx^2 - S(b + c)x^2 + 1 = o$ Gleichung der zweiten Wellenfläche.

16) $S \frac{x^2}{\sqrt{bc}} = 1$ Gleichung des Directions-Ellipsoids.

§. 1.

Wenn man, wie in der Einleitung angegeben ist, für einen Punkt O im Innern eines zweiaxigen Cristalls das Ergänzungsellipsoid E construirt, so wird daraus die Wellenfläche abgeleitet, indem man in O auf einem Centralschnitt von E ein Perpendikel errichtet und auf demselben die Entfernungen OM und Om gleich den Halbaxen des Centralschnitts annimmt. Die Punkte M und m liegen auf der Wellenfläche, der erstere auf dem äußern Mantel, wenn OM > Om ist, und der andere auf dem innern Mantel. Man hat nun folgendes System von Gleichungen:

$$1)\ S\frac{x^2}{a} = 1; \quad 2)\ Sx^2 = r; \quad 3)\ S\frac{r-a}{a}x^2 = o; \quad 4)\ S\frac{a}{r-a}x^2 = o;$$

$$5)\ Sx^2.Sax^2 - Sa(b+c)x^2 + abc = o; \quad 6)\ \frac{y^2}{z^2} + \frac{c(a-b)}{b(a-c)} = o,\ x = o;$$

$$7)\ \frac{z^2}{x^2} + \frac{a(b-c)}{c(b-a)} = o,\ y = o; \quad 8)\ \frac{x^2}{y^2} + \frac{b(c-a)}{a(c-b)} = o,\ z = o.$$

1) ist die Gleichung von E, 2) diejenige einer concentrischen Kugel; der Einfachheit wegen werden die Quadrate der Halbaxen mit a, b, c bezeichnet, und das Quadrat des Halbmessers der Kugel mit r. 3) wird erhalten aus 1) und 2) durch Subtraction und stellt einen concentrischen Kegel vor, welcher E in einer sphärischen Linie schneidet, da die Schnittlinie von 1) und 3) auch auf 2) liegt. 4) ist die Gleichung des Ergänzungskegels, welche in 5) entwickelt ist, wo man für r seinen Werth aus 2) gesetzt hat. 6), 7), 8) sind die Gleichungen der Focal-Linien der Ergänzungskegel und werden aus 4) abgeleitet, indem man der Reihe nach r = a und x = o, r = b und y = o, r = c und z = o setzt. Da a > b > c angenommen wird, so ist nur das mittlere Paar reell, die beiden andern Paare von Fokal-Linien in der yz und xz Ebene sind imaginär. Es sind also bei jedem Kegel zweiten Grades außer den reellen Focal-Linien noch zwei Paare imaginärer vorhanden.

Die Kreisschnitte der Kegel 3), welche E in sphärischen Curven schneiden, stehen senkrecht auf den reellen Focal-Linien der Kegel 4), weil diese ihre Ergänzungskegel sind, woraus hervorgeht, daß sie parallel mit den Kreisschnitten von E sind.

Die Ebene des Centralschnitts berührt immer zwei von den Kegeln. 3) zugleich, die Berührungslinien sind die Axen der Schnittkurve, weil die Tangenten in ihren Endpunkten auch Tangenten der sphärischen Curven sind, und also senkrecht auf ihnen stehen. Da nun die Mantel-Linien der Ergänzungskegel 4) senkrecht stehen auf den Tangential-Ebenen der Kegel 3) und OM und Om gleich den Halbaxen der Schnittkurven dieser Ebenen mit E sind, so ist 4), wenn man für r seinen Werth aus 2) setzt, wie auch 5) die Gleichung der Wellenfläche; letztere ist aus 4) durch Wegschaffung der Nenner entwickelt.

Für die Hauptschnitte der Wellenfläche in den Axenebenen erhält man aus 5) die Relationen:

$$9)\ x = o,\quad (y^2 + z^2 - a)(by^2 + cz^2 - bc) = o$$
$$10)\ y = o,\quad (z^2 + x^2 - b)(cz^2 + ax^2 - ca) = o$$
$$11)\ z = o,\quad (x^2 + y^2 - c)(ax^2 + by^2 - ab) = o$$

und findet, daß sie je aus einem Kreis und einer Ellipse bestehen, deren Durchschnitte in der XZ-Ebene reell und in den beiden andern imaginär sind.

Setzt man $OM^2 = r_1$ und $Om^2 = r_2$, so erhält man nach 4)

$$12)\ S \frac{a}{r_1 - a} x^2 = o$$

$$13)\ S \frac{a}{r_2 - a} x^2 = o$$

$$a > r_1 > b > r_2 > c.$$

Jede dieser Gleichungen stellt für sich einen Kegel vor, dessen Focal-Linien den Gleichungen 6), 7), 8) entsprechen. Da letztere r nicht enthalten, so sind alle diese Kegel confocal. Die reellen Focal-Linien 7) sind die optischen Axen der Wellenfläche oder die *secundären optischen Axen* des Cristalls. Weil aber noch zwei Paare imaginärer Focal-Linien vorhanden sind, so kann man hieraus schließen, daß die Wellenfläche im Ganzen 3 Paare optischer Axen hat, wovon Eines reell und die 2 andern imaginär sind. Sie gehen durch die Schnittpunkte von je zweien der Curven in 9), 10) und 11).

$$14)\ \frac{y^2}{a\frac{r-b}{a-b}} + \frac{z^2}{a\frac{r-c}{a-c}} = 1 \quad \frac{z^2}{b\frac{r-c}{b-c}} + \frac{x^2}{b\frac{r-a}{b-a}} = 1 \quad \frac{x^2}{c\frac{r-a}{c-a}} + \frac{y^2}{c\frac{r-b}{c-b}} = 1$$

$$15)\ \frac{a\frac{r-b}{a-b}}{a\frac{c-b}{a-b}} + \frac{a\frac{r-c}{a-c}}{a\frac{b-c}{a-c}} = 1 \quad \frac{b\frac{r-c}{b-c}}{b\frac{a-c}{b-c}} + \frac{b\frac{r-a}{b-a}}{b\frac{c-a}{b-a}} = 1 \quad \frac{c\frac{r-a}{c-a}}{c\frac{b-a}{c-a}} + \frac{c\frac{r-b}{c-b}}{c\frac{a-b}{c-b}} = 1$$

Eliminirt man aus 2) und 4) x, y, z, so erhält man die Gleichungen 14), welche die Projectionen der sphärischen Curven der Wellenfläche oder ihre Durchschnitte mit den confocalen Kegeln vorstellen.

Aus den Identitäten 15) folgt, daß die Axen dieser Projectionen in der yz und in der xy-Ebene Coordinaten einer Hilfsellipse und einer Hilfshyperbel und in der zx-Ebene von einer andern Hilfsellipse sind und daß sie hier eine gemeinschaftliche Tangente haben.

Ehe wir aber auf die Discussion dieser Curven näher eingehen, ist es nöthig, ein zweites Ellipsoid einzuführen

$$16)\ Sax^2 = 1$$

oder das *Polarisations-Ellipsoid*, welches wir mit E' bezeichnen. Beide Flächen sind reciprok zu einander; nimmt man auf E einen Punkt K an, so berührt seine Polarebene hinsichtlich der Kugel vom Halbmesser = 1 E' in einem Punkt K', und umgekehrt, die Polarebene von K' berührt E in K. Es seien OK und Ok die beiden Halbaxen des Centralschnitts von E; man lege parallel mit der Ebene dieses Schnitts an E eine Tangentialebene, welche OM in Q schneidet, so besteht die Relation OK . Ok . OQ = $\sqrt{abc}$. Bewegt sich nun der Punkt M auf einer sphärischen Curve der Wellenfläche, so ist OM = OK constant, also auch das Product Ok . OQ oder da Om = Ok ist, Om . OQ. Die Linie OM schneide E' in Q'', so ist OQ . OQ'' = 1, also auch $\frac{Om}{OQ''}$ constant, d. h. der Punkt m liegt auf der Fläche

$$17)\quad Sax^2 = \frac{abc}{r}$$

welche dem Polarisations-Ellipsoid ähnlich ist; *schneidet einer von den confocalen Kegeln also den Einen Mantel der Wellenfläche in einer sphärischen Curve, so trifft er den andern in einer ellipsoidischen.*

$$18)\quad \frac{y^2}{\frac{ac}{r}\frac{r-b}{a-b}} + \frac{z^2}{\frac{ab}{r}\frac{r-c}{a-c}} = 1 \quad \frac{z^2}{\frac{ab}{r}\frac{r-c}{b-c}} + \frac{x^2}{\frac{bc}{r}\frac{r-a}{b-a}} = 1 \quad \frac{x^2}{\frac{bc}{r}\frac{r-a}{c-a}} + \frac{y^2}{\frac{ac}{r}\frac{r-b}{c-b}} = 1$$

$$19)\quad \frac{\frac{ac}{r}\frac{r-b}{a-b}}{a\frac{c-b}{a-b}} + \frac{\frac{ab}{r}\frac{r-c}{a-c}}{a\frac{b-c}{a-c}} = 1 \quad \frac{\frac{ab}{r}\frac{r-c}{b-c}}{b\frac{a-c}{b-c}} + \frac{\frac{bc}{r}\frac{r-a}{b-a}}{b\frac{c-a}{b-a}} = 1 \quad \frac{\frac{bc}{r}\frac{r-a}{c-a}}{c\frac{b-a}{c-a}} + \frac{\frac{ac}{r}\frac{r-b}{c-b}}{c\frac{a-b}{c-b}} = 1$$

Die Relationen 18) erhält man durch Elimination von x, y, z aus 4) und 17); sie entsprechen den Projectionen der ellipsoidischen Curven. Aus den Identitäten 19) folgt, daß ihre Axen die Coordinaten derselben Hülfskurven sind, wie oben, d. h. *die Projection einer sphärischen Curve des äußern Mantels fällt mit derjenigen einer ellipsoidischen des innern Mantels zusammen* und umgekehrt, da aus dem Gesagten unmittelbar folgt, daß wenn m sich auf einer sphärischen Curve bewegt, M eine ellipsoidische beschreibt.

Aus diesen Gleichungen folgt für die Projection in der xz-Ebene, (Fig. 1), daß, wenn man

$$20)\quad OX = \sqrt{b\,\frac{a-c}{a-b}}, \qquad OZ = \sqrt{b\,\frac{a-c}{b-c}}$$

annimmt, diese Strecken die Halbaxen einer Hilfsellipse sind, welche die Eigenschaft hat, daß die Coordinaten OA''' und OD⁰ irgend eines Punktes M derselben die Halbaxen einer Ellipse sind, welche die Projection sowohl einer sphärischen, als auch einer ellipsoidischen Curve vorstellt. A'''D'' ist eine sphärische Curve und D''D⁰ eine ellipsoidische, beide auf dem äußern Mantel. A''E und Eγ⁰ sind Projectionen von einer sphärischen und einer ellipsoidischen Curve des äußeren Mantels und stellen zugleich die Grenzlinien des innern Mantels auf der xz-Ebene dar.

Wenn man also die Wellenfläche mit diesen Curven für das Ellipsoid E construiren will, so bestimmt man nach 20) die Werthe von OX und OZ, und zeichnet eine Schaar von Ellipsen, deren Axen in die Richtungen OX und OZ fallen und welche die Gerade XZ berühren, mittelst der Hilfsellipse XMZ. Unter diesen Ellipsen gibt diejenige mit den Halbaxen c und a (in der Figur A″EC′C⁰) und der Kreis $BB'\gamma^0$, dessen Halbmesser = b ist, den Durchschnitt der xz-Ebene an.

Die Figur ist so gezeichnet, daß man von dem äußern auf den innern Mantel sehen kann, wobei die durch die confocalen Kegel erzeugten Scheidewände als undurchsichtig angenommen sind. Die Schraffirung des sichtbaren Theiles von der einen Hälfte dieser Kegelwände auf der linken Seite der Figur soll die Zeichnung plastisch machen.

Um die Projection in der xy-Ebene (Fig. 2) zu zeichnen, macht man

$$21)\ OX' = \sqrt{c\,\frac{a-b}{a-c}}, \qquad OZ' = \sqrt{c\,\frac{a-b}{b-c}}$$

und betrachtet diese Strecken als die Halbaxen einer Hilfshyperbel und einer Hilfsellipse; nimmt man auf ersterer einen Punkt M an, so sind die Coordinaten OA und OD die Halbaxen einer Ellipse, die Coordinaten OA′ und OD′ eines Punktes M′ auf der Hilfsellipse dagegen sind die Halbaxen einer Hyperbel.

Verändert der Punkt M seine Lage auf der Hilfshyperbel, so erhält man eine Schaar von Ellipsen; unter denselben ist ein Kreis CC′, dessen Halbmesser $= \sqrt{c}$, welcher der Durchschnitt der Wellenfläche mit der xy-Ebene ist. Jeder ellipsoidischen Curve AD des äußern Mantels entspricht eine sphärische $\alpha\delta$ des innern, welche mit ihr auf einem Kegel liegt und deren Projection innerhalb des Kreises CC′ fällt.

Verändert der Punkt M′ auf der Hilfsellipse seine Lage, so entsteht eine Schaar von Hyperbeln: jeder sphärischen Curve A′E auf dem äußern Mantel entspricht eine ellipsoidische $\alpha'\varepsilon$ auf dem innern.

In der yz-Ebene (Fig. 3) ist

$$22)\ OY' = \sqrt{a\,\frac{b-c}{a-b}}, \qquad OZ' = \sqrt{a\,\frac{b-c}{a-c}}.$$

Diese Strecken sind die Halbaxen einer Hilfsellipse und einer Hilfshyperbel. Die Coordinaten eines Punktes M der letzteren sind die Halbaxen einer Ellipse AD, und diejenigen eines Punktes M′ der ersteren die Halbaxen OA′ und OD′ einer Hyperbel D′E. Verändert M seine Lage auf der Hilfshyperbel, so erhält man eine Schaar von Ellipsen; unter denselben ist ein Kreis YZ, dessen Halbmesser $= \sqrt{a}$, welcher der Durchschnitt der Wellenfläche mit der yz-Ebene ist. Jeder sphärischen Curve AD des äußern Mantels entspricht eine ellipsoidische $\alpha\delta$ des innern, welche mit ihr auf Einem Kegel liegt. Dem Kreise YZ entspricht die Ellipse $\eta\zeta$ oder die Grenzlinie des innern Mantels in der yz-Ebene.

Verändert der Punkt M′ auf der Hilfsellipse seine Lage, so entsteht eine Schaar von Hyperbeln; jeder ellipsoidischen Curve D′E auf dem äußern Mantel entspricht eine sphärische $\delta'\varepsilon$ des innern.

Um das System der Curven in der xy-Ebene (Fig. 2) zu discutiren, kann man die Transformation durch proportional getheilte Coordinaten vornehmen: werden nämlich die Coordinaten y im Verhältniß von $OX' : OY' = \sqrt{b-c} : \sqrt{a-c}$ [21)] verkleinert, so verwandelt sich die Hilfsellipse X′M′Y′ in einen

Kreis, dessen Halbmesser OX' wir $= \beta$ setzen, also $\beta = \sqrt{c \frac{a-b}{a-c}}$, die Hilfshyperbel X'M wird gleichseitig und man erhält ein System von confocalen Ellipsen und Hyperbeln, deren gemeinsamer Brennpunkt X' ist.

Sind AP und A'P (Fig. 4.) zwei solche Curven und setzen wir OA $= \sqrt{\mu}$, OA' $= \sqrt{\nu}$, so ist

$$23)\ \frac{x^2}{\mu} + \frac{y^2}{\mu - \beta} = 1 \qquad \frac{x^2}{\nu} - \frac{y^2}{\beta - \nu} = 1 \qquad \mu > \beta > \nu.$$

Die Tangenten dieser Curven in ihrem Schnittpunkt P stehen auf einander senkrecht. Man findet nun aus 23)

$$24)\ x = \sqrt{\frac{\mu\nu}{\beta}} \qquad y = \sqrt{\frac{1}{\beta}(\mu-\beta)(\beta-\nu)}$$

$$25)\ \text{tg OSP} = \sqrt{\frac{\nu\,(\mu-\beta)}{\mu\,(\beta-\nu)}} \qquad \text{tg POS} = \sqrt{\frac{(\mu-\beta)\,(\beta-\nu)}{\mu\nu}}$$

$$26)\ \text{OS} = \sqrt{\frac{\mu}{\nu}\,\beta} \qquad \text{OS}' = \sqrt{\frac{\nu}{\mu}\,\beta}$$

$$27)\ \text{OT} = \sqrt{\beta\,\frac{\mu-\beta}{\beta-\nu}} \qquad \text{OT}' = \sqrt{\beta\,\frac{\beta-\nu}{\mu-\beta}}.$$

Zwei Paare confocaler Ellipsen und Hyperbeln bilden mit ihren Schnittpunkten ein Viereck PP P''P'''; in P schneiden sich die Curven (μ) (ν), in P' (μ) (ν'), in P'' (μ') (ν) und in P''' (μ') (ν'), und man erhält die Werthe der Größen in den Gleichungen 24) bis 27), indem man bei μ und ν die Accente setzt, z. B. $x' = \sqrt{\frac{\mu\nu'}{\beta}}$, $x'' = \sqrt{\frac{\mu'\nu}{\beta}}$, $x''' = \sqrt{\frac{\mu'\nu'}{\beta}}$, also

$$28)\ xx''' = x'x''.$$

Ähnliche Gleichungen lassen sich für die anderen Größen bilden, woraus sich der Satz ergibt:

In einem von zwei Paaren confocaler Ellipsen und Hyperbeln gebildeten Viereck sind die Coordinaten der Endpunkte, die Tangenten der Winkel, welche die Berührungslinien mit den Axen bilden, die Abstände des Ursprungs von den Durchschnittspunkten dieser Berührungslinien mit den Axen in Proportion.

Bei der Transformation bleiben die Werthe von x, OS, OS' ungeändert; ferner setzt man

$$29)\ y = \eta\varkappa,\ \text{OT} = \text{O}\tau\,.\,\varkappa,\ \text{OT}' = \text{O}\tau'\,.\,\varkappa,\ \left(\varkappa = \sqrt{\frac{b-c}{a-c}}\right)$$

und findet, daß der soeben ausgesprochene Satz auch für die Größen η, Oτ, Oτ' gilt.

Die Coordinaten des Punktes P in Fig. 2, in dem sich die Ellipse AP und die Hyperbel A'P schneiden, sind also η und x: die Tangente der Ellipse in P schneidet die verlängerten Axen in S und τ; diejenige der Hyperbel schneidet die x-Axe in S' und die andere in τ'. Macht man dieselbe Construction für die anderen Ecken des Vierecks PP'P''P''', so zeigt sich, daß die vier Größen η oder Oτ oder Oτ', welche den vier Ecken entsprechen, je eine Proportion bilden.

Die Curven in der yz-Ebene Fig. 3 verwandeln sich durch eine ähnliche Transformation, indem man die Coordinaten y im Verhältniß von OZ' : OY' $= \sqrt{a - b} : \sqrt{a - c}$ verkleinert in ein System von confocalen Kegelschnitten, deren Brennpunkt Z' ist.

Um das System der Curven in der xz-Ebene zu discutiren, wenden wir ebenfalls die Transformation durch proportional getheilte Coordinaten an und verkleinern die Coordinaten z im Verhältniß von OX : OZ $= \sqrt{b - c} : \sqrt{a - b}$, dann wird die Hilfsellipse XMZ ein Kreis, dessen Halbmesser OX $= \sqrt{b \frac{a - c}{a - b}}$ $= \beta$ sei, und man erhält ein System von Ellipsen, bei welchen die Quadratsumme der Axen constant ist und welche eine gemeinsame Berührungslinie haben. Sind AP und A'P (Fig. 5) zwei solche Curven und setzen wir OA $= \sqrt{\mu}$, OA' $= \sqrt{\nu}$, so ist

$$30) \quad \frac{x^2}{\mu} + \frac{z^2}{\beta - \mu} = 1, \quad \frac{x^2}{\nu} + \frac{z^2}{\beta - \nu} = 1, \quad \beta > \mu > \nu.$$

Die Formeln 24) bis 29) gelten auch hier, wenn man $\mu - \beta$ durch $\beta - \mu$ ersetzt; somit findet der obige Satz ebenfalls Anwendung. Demgemäß gelangen wir zu diesem Resultate:

Bei einem aus zwei Paaren sphärischer und ellipsoidischer Curven auf der Wellenfläche gebildeten Viereck sind die Abstände einer Hauptebene von den vier Ecken, sowie auch von den Durchdringungspunkten von je vier Tangenten mit einer andern Hauptebene in Proportion. Es lassen sich in den vier Ecken im Ganzen acht Tangenten ziehen, von welchen je vier zu zwei Gegenseiten gehörige zu nehmen sind.

Über die Projectionen der sphärischen und ellipsoidischen Curven der Wellenfläche auf den Hauptebenen läßt sich noch weiter bemerken:

1. Diejenigen auf der xy- und yz-Ebene, welche aus einem System von confocalen Ellipsen und Hyperbeln nach den Regeln der Transformation proportional getheilter Coordinaten abgeleitet sind, können als krummlinige Coordinatensysteme betrachtet werden und zur Bestimmung von Punkten u. s. w. in der Ebene dienen, wie dies bei den confocalen Kegelschnitten oder bei den elliptischen Coordinaten der Fall ist. Sie theilen mit denselben alle diejenigen Eigenschaften, welche bei der Transformation ungeändert bleiben.
2. Die Projectionen der Krümmungslinien eines Ellipsoids, sowie der confocalen sphärischen Kegelschnitte (Durchdringungen einer Kugel mit confocalen Kegeln) stimmen vielfach mit den Projectionen der Curven auf der Wellenfläche überein; letztere können, wenn man jede Hauptebene für sich betrachtet, einzeln als Projectionen ellipsoidischer Krümmungslinien angesehen werden.

Die reellen Focal-Linien der oben betrachteten Kegel, welche den Gleichungen 7) entsprechen, heißen die secundären optischen Axen des Cristalls; sie treffen die Wellenfläche in 4 zu den Axen symmetrisch gelegenen Punkten, in welchen beide Mäntel zusammentreffen, wo also ein Übergang stattfindet vom äußern Theil der Fläche auf den innern. Zur Veranschaulichung ist in Fig. 6 ein Octant der Wellenfläche in Parallelperspective gezeichnet, die Strecken OA,

OB, OC sind gleich den Halbaxen $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ des Ergänzungsellipsoids. AJA, BO_1, B, ChC sind Kreise, und die 3 andern Curven in den Axen-Ebenen Ellipsen. OO_2 ist die secundäre und OO_4 die wahre optische Axe; O_1G ist die gemeinschaftliche Tangente vom Kreis und von der Ellipse in der xz-Ebene. GM''MH ist eine sphärische Curve auf dem äußern Mantel, und gm'''mh die correspondirende ellipsoidische auf dem innern; dagegen ist O_1M'MJ eine ellipsoidische Curve auf dem äußern Mantel und o_1 m'mi die entsprechende sphärische auf dem innern.

In der Figur sind noch 2 weitere Paare von Curven gezeichnet, die sich in M''' und m''' schneiden.

Um weiter zu zeigen, wie die Wellenfläche aus dem Ergänzungsellipsoid entsteht, dient die Fig. 7. OK und Ok sind die Halbaxen eines Centralschnitts von E und P ist derjenige Punkt auf E, dessen Tangential-Ebene parallel mit dem Centralschnitt ist. Zieht man nun in K und k ebenfalls die Tangential-Ebenen von E und vervollständigt das Parallelepiped, so sind dessen Kanten PM_0 und PN_0 Tangenten der beiden durch P gehenden Krümmungslinien von E. Man fälle von O auf die Tangential-Ebene K das Perpendikel OH' und drehe das rechtwinklige Dreieck OKH' in seiner Ebene um 90° nach OMN; die Tangential-Ebene von K, welche der Bewegung folgt, kommt in eine Lage, die man sich senkrecht zur Ebene der Figur denken kann und welche durch MN geht. In dieser neuen Lage berührt sie die Wellenfläche in M, somit ist ON parallel mit der Normale in M. Ebenso fälle man auf die Tangential-Ebene in k von O das Perpendikel Oh und drehe das rechtwinklige Dreieck Okh in seiner Ebene auch um 90°, so kommt es nach Omn'; die Tangential-Ebene von k, welche der Bewegung folgt, wird dann durch mn' gehen und den innern Mantel der Wellenfläche in m berühren. On' ist parallel der Normale in m. Hieraus folgt der Satz:

Wenn ein Halbmesser OmM der Wellenfläche gegeben ist, so erhält man die Richtungen der Normalen von M und m, wenn man an das Ergänzungsellipsoid eine Tangential-Ebene legt, senkrecht zum Halbmesser, und von O aus auf die Tangenten der beiden durch den Berührungspunkt P gehenden Krümmungslinien Perpendikel fällt.

Die Benützung der Krümmungslinien des Ellipsoids ist sehr geeignet, über viele Eigenschaften der Wellenfläche Aufschluß zu geben und dieselben der Anschauung zugänglich zu machen, wie aus dem Folgenden erhellen wird. Die Tangential-Ebene von P werde von OM in Q geschnitten, die 4 Punkte QSPs bilden ein Rechteck; ist nun P ein Kreispunkt von E, durch welchen unendlich viele Krümmungslinien gehen, also der entsprechende Centralschnitt ein Kreis und OK = Ok = OM = Om, so fallen die Punkte M und m auf O_2 und OM wird die secundäre optische Axe OO_2. Die Fußpunkte S, s . . . sämmtlicher von O auf die Tangenten der Krümmungslinien von P gefällten Perpendikel liegen auf einem Kreis, dessen Durchmesser QP ist. Sie bilden also einen Kegel zweiten Grads, dessen zweiter Kreisschnitt senkrecht auf OP ist. Die Wellenfläche wird demgemäß in O_2 von unendlich vielen Ebenen berührt, welche den Ergänzungskegel umhüllen, und da die Focal-Linien des Letztern senkrecht stehen auf den Kreisschnitten des Ersteren, so sind OO_2 und eine durch O_2 parallel mit OO_1 gezogene Gerade die Focal-Linien des Berührungskegels.

§. 2.

Wenn man, wie in der Einleitung angegeben ist, für einen Punkt O im Innern eines zweiaxigen Cristalls das Polarisations-Ellipsoid E' construirt, so wird daraus die Wellengeschwindigkeitsfläche abgeleitet, indem man in O auf einem Centralschnitt von E' ein Perpendikel errichtet und darauf die Entfernungen ON und On gleich den reciproken Werthen der Halbaxen des Centralschnitts abträgt. Die Punkte N und n liegen auf der Wellengeschwindigkeitsfläche, der erstere auf dem äußern Mantel, wenn ON > On ist, der andere auf dem innern. Man hat nun folgende System von Gleichungen:

$$1)\ Sax^2 = 1 \qquad 2)\ Sx^2 = \frac{1}{v} \qquad 3)\ S(v-a)x^2 = o \qquad 4)\ S\frac{x^2}{v-a} = o$$

$$5)\ (Sx^2)^3 - Sx^2 . S(b+c)x^2 + Sbcx^2 = o \qquad 6)\ \frac{y^2}{z^2} + \frac{a-b}{a-c} = o,\ x = o$$

$$7)\ \frac{z^2}{x^2} + \frac{b-c}{b-a} = o,\ y = o \qquad 8)\ \frac{x^2}{y^2} + \frac{c-a}{c-b} = o,\ z = o$$

Aus diesen Gleichungen geht hervor, daß diejenigen der Wellengeschwindigkeitsfläche, 4) und 5) ganz ähnlich aus dem Polarisations-Ellipsoid 1) und einem System von concentrischen Kugeln 2) und Kegeln 3) und 4) abgeleitet werden, wie es bei der Wellenfläche hinsichtlich des Ergänzungsellipsoids geschieht. Die Kegel 4) sind confocal, ihre Focal-Linien entsprechen den Relationen 6), 7), 8); sie sind ebenfalls nur in der xz-Ebene reell, und in den beiden andern Axen-Ebenen imaginär. Da sie die Ergänzungskegel von 3) sind, welche E' in sphärischen Curven durchschneiden, so folgt daraus, daß die Kreisschnitte der Letzteren, welche senkrecht auf den Focal-Linien der Ersteren stehen, parallel mit den Kreisschnitten von E' sind.

Für die Hauptschnitte der Wellengeschwindigkeitsfläche in den Axen-Ebenen erhält man aus 5)

$$9)\ x = o\ (y^2 + z^2 - a)\ (cy^2 + bz^2 - (y^2 + z^2)^2) = o$$

$$10)\ y = o\ (z^2 + x^2 - b)\ (az^2 + cx^2 - (z^2 + x^2)^2) = o$$

$$11)\ z = o\ (x^2 + y^2 - c)\ (bx^2 + ay^2 - (x^2 + y^2)^2) = o$$

und findet, daß sie je aus einem Kreis und der Fußpunktkurve einer Ellipse bestehen, deren Durchschnitte in der xz-Ebene reell und in den beiden andern Ebenen imaginär sind.

Setzt man $ON^2 = v_1$ und $On^2 = v_2$, so erhält man nach 4)

$$12)\ S\frac{x^2}{v_1 - a} = o \qquad 13)\ S\frac{x^2}{v_2 - a} = o$$

$$a > v_1 > b > v_2 > c$$

Jede dieser Gleichungen stellt für sich einen Kegel vor, dessen Focal-Linien den Gleichungen 6) 7) 8) entsprechen. Da Letztere v nicht enthalten, so sind alle diese Kegel confocal. Die reellen Focal-Linien 7) sind die optischen Axen der Wellengeschwindigkeitsfläche, oder die *wahren optischen Axen* des Cristalls. Weil aber noch 2 Paare imaginärer Focal-Linien vorhanden sind, so kann man hieraus schließen, daß die Wellengeschwindigkeitsfläche im Ganzen 3 Paare optischer Axen hat, wovon eines reell und die beiden andern imaginär sind.

$$14)\ \frac{\frac{y^2}{v-b}}{a-b}+\frac{\frac{z^2}{v-c}}{a-c}=1\quad \frac{\frac{z^2}{v-c}}{b-c}+\frac{\frac{x^2}{v-a}}{b-a}=1\quad \frac{\frac{x^2}{v-a}}{c-a}+\frac{\frac{y^2}{v-b}}{c-b}=1$$

Eliminirt man aus 2) und 4) x, y, z, so erhält man die Gleichungen 14), welche die Projectionen der sphärischen Curven der Wellengeschwindigkeitsfläche oder ihrer Durchschnitte mit den confocalen Kegeln vorstellen.

In Fig. 8) stellt ACA das erste, A'C'A' das zweite Ellipsoid und der Kreis die Kugel vor, deren Halbmesser wir gleich b setzen, also ist $OA' = \frac{b^2}{a}$ und $OC' = \frac{b^2}{c}$ oder auch $= \frac{1}{a}$ und $\frac{1}{c}$, wenn man $b = 1$ setzt. Den durch OK gehenden Centralschnitt kann man sich senkrecht zur Ebene der Figur denken. Die Polar-Ebene von K hinsichtlich der Kugel berührt E' in K' und umgekehrt berührt die Polar-Ebene von K'E in K. Da OH' senkrecht steht auf der Tangential-Ebene KH', so ist die zweite Halbaxe Ok des Centralschnitts KOk senkrecht auf OKH', und weil OH senkrecht steht auf der Tangential-Ebene K'H, so ist die zweite Halbaxe Ok' des Centralschnitts K'Ok' von E' ebenfalls senkrecht zur Ebene der Figur, fällt also in der Richtung mit Ok zusammen. Nach der Drehung um 90^0 kommt K nach M auf die Wellenfläche und H' nach N auf die Wellengeschwindigkeitsfläche.

Die Tangential-Ebene KH', welche der Bewegung folgt, kommt nach MN, somit ist *die Wellengeschwindigkeitsfläche die Fußpunktfläche der Wellenfläche.* Dreht man Ok in der Ebene MOk um 90^0, so fällt k auf m, und die Tangential-Ebene von E in k, welche der Bewegung folgt, wird den innern Mantel der Wellenfläche in m berühren.

Fig. 7 ist die perspectivische Darstellung von einem Theil der Fig. 8, und es ist daraus zu ersehen, wie oben schon nachgewiesen wurde, daß die von O auf die Tangenten PM_0 und PN_0 der Krümmungslinien von P auf E gefällten Perpendikel Os und OS parallel mit den Normalen der Wellenfläche in m und M sind. Man bestimme nun auf E' den Punkt P', dessen Tangential-Ebene parallel der Ebene K'Ok' ist, und ziehe in P' die beiden Tangenten der Krümmungslinien, welche den Halbaxen OK' und Ok' parallel sind. OP' ist parallel der Tangential-Ebene K'H; also steht OM senkrecht auf der Tangente der Einen von den beiden durch P' gehenden Krümmungslinien. Dreht man Ok' in der Ebene NOk' um 90^0, so fällt h' auf n, welcher Punkt auf dem äußern Mantel der Wellengeschwindigkeitsfläche liegt. Der Punkt h' steht zu k' in derselben Beziehung wie H' zu K', d. h. es ist Oh' . Ok' = OH' . OK' und eine Ebene, welche durch h' senkrecht zu Oh' gelegt wird, ist Tangential-Ebene von E. Eine durch n senkrecht auf On gelegte Ebene berührt die Wellenfläche in einem Punkt m' und der Radius Om' der letztern trifft die Tangente der zweiten durch P' gehenden Krümmungslinie senkrecht in S'. Hieraus folgt der Satz:

Zieht man drei parallele Ebenen, wovon zwei die Wellenfläche (in M und m') und die dritte des Polarisations-Ellipsoid (in P') berühren, so stehen die nach den Berührungspunkten der Wellenfläche gezogenen Radien senkrecht auf den Tangenten der durch P' gehenden Krümmungslinien.

Wir wollen nun annehmen, K'Ok' seien ein Kreisschnitt von E', dann ist P' ein Kreispunkt, durch welchen unendlich viele Krümmungslinien gehen, die Fuß-

punkte der auf ihre Tangenten gefällten Perpendikel liegen auf einem Kreis, dessen Durchmesser $P' \cdot Q'$ ist, die Punkte N und n fallen auf O_1 und OO_1 ist die wahre optische Axe. Die beiden Tangential-Ebenen der Wellenfläche fallen in Eine zusammen, welche durch O_1 senkrecht zu OO_1 geht und die Wellenfläche in dem Kreis berührt, dessen Durchmesser O_1G ist.

Auf der Wellenfläche liegen 4 Kreise, in welchen sie von 4 Ebenen berührt wird, welche in den Endpunkten der wahren optischen Axen senkrecht auf derselben stehen. Das Durchmesserquadrat eines solchen Kreises ist $= \frac{1}{b} (a-b) (b-c)$.

In Fig. 6 ist die Hälfte $O_1M'''G$ eines solchen Kreises, dessen Durchmesser O_1G ist, perspectivisch gezeichnet; O_1G ist die gemeinschaftliche Tangente des Kreises und der Ellipse in der xz-Ebene.

Nach dem Obigen ist die Wellengeschwindigkeitsfläche von der aus dem Ergänzungsellipsoid abgeleiteten Wellenfläche die Fußpunktfläche. Wir bezeichnen erstere mit V und die Letztere mit W. Die Fläche V ist aus E' entstanden, indem man auf einem Centralschnitt, dessen Halbaxen $OK' = \sqrt{\frac{1}{v_1}}$ und $Ok' = \sqrt{\frac{1}{v_2}}$ sind, in O eine Senkrechte errichtet, und auf ihr zwei Punkte N und n bestimmt, so daß $ON = \sqrt{v_1}$ und $On = \sqrt{v_2}$ ist, also gleich den reciproken Werthen der Halbaxen. Man kann aber auch aus E' eine zweite Wellenfläche W' ableiten, indem man auf dieser Senkrechten zwei weitere Punkte N' und n' annimmt, $ON' = \sqrt{\frac{1}{v_1}}$ und $On' = \sqrt{\frac{1}{v_2}}$. Hieraus folgt, daß W' die inverse Fläche von V oder durch Transformation mittelst reciproker Radienvectoren aus V entstanden ist. Nach den Regeln dieser Verwandlung entspricht einem Kreis auf W' auch ein Kreis auf V, welche beide auf einem Kegel liegen, dessen Spitze O ist; einer Berührungsebene von W' entspricht eine durch O gehende Kugel. Nun liegen auf W', wie auf jeder Wellenfläche, vier Kreise, in denen sie von Ebenen berührt wird, die senkrecht zur xz-Ebene stehen. In Fig. 8 ist O_1G der Durchmesser des Berührungskreises von W; der Kreis B und die Ellipse A_0C_0 sind die Durchschnitte dieser Fläche mit der xz-Ebene. O_2G' ist der Durchmesser des Berührungskreises von W'. Der Kreis B und die Ellipse $A''C''$ sind die Durchschnitte von W' mit der xz-Ebene. Der Kreis B und die Fußpunktkurve $A_0O_1\ NC_0$ der Ellipse A_0C_0 gehören der Fläche V an. Bei der Transformation verwandelt sich die Ebene des Kreises O_2G' in eine Kugel, deren Durchmesser OO_2, der Kreis O_2G' verwandelt sich in einen Kreis, dessen Durchmesser O_2G'', welcher auf der Kugel liegt und dessen Ebene ebenfalls senkrecht zur Figur ist. O_2G' und O_2G'' sind also 2 Kreisschnitte des Kegels. Da die Kugel V im Kreis O_2G' berührt, so wird diese Fläche in demselben Kreis auch von einem Rotationskegel berührt. Hieraus folgt also

Auf der Wellengeschwindigkeitsfläche liegen 4 Kreise, in denen sie von 4 Kugeln berührt wird, deren Durchmesser die secundären optischen Halbaxen sind.

Die Normalen, deren Fußpunkte in einem solchen Kreise liegen, bilden einen Drehungskegel, dessen Spitze die Mitte dieser Halbaxe ist. Ein zweiter Kegel berührt die Fläche längs des Kreises, der Durchmesser desselben ist

$$15)\ O_2G'' = \frac{\sqrt{a-b}\ \sqrt{b-c}}{\sqrt{a-b+c}}$$

Die Fläche W' wird in O_1 von einem Kegel zweiten Grades berührt, dessen Focallinien O_1F oder die Verlängerung von OO_1 und O_1F' senkrecht auf O_1R stehend sind. Die Axe dieses Kegels ist also die Halbirungslinie des Winkels FO_1F'; bei der Transformation verwandeln sich seine Erzeugenden in ein System von Kreisen, deren gemeinsame Sehne OO_1 ist und welche die inverse Fläche des Tangentenkegels bilden. Sie berührt V in O_1 und hat mit ihr den Tangentenkegel GO_1R' gemein, von dem sich leicht beweisen läßt, daß er dem ersten Kegel GO_1R gleich ist und daß beide hinsichtlich der durch O_1G gehenden Tangential-Ebene von W symmetrisch liegen; letztere Gerade ist eine gemeinsame Erzeugende beider Kegel. Irgend eine durch OO_1 gelegte Ebene schneidet den ersten Kegel in einer Erzeugenden O_1J und den zweiten in der Erzeugenden O_1J'. Nach den Regeln der Transformation durch reciproke Radienvectoren sind die Winkel JO_1F und $J'O_1O$ einander gleich, also haben O_1J und O_1J' in Beziehung auf die Axe OO_1F, oder, was dasselbe ist, in Beziehung auf die durch O_1G gelegte Tangential-Ebene (welche senkrecht zur Figur ist) eine symmetrische Lage. Die Focal-Linien des zweiten Kegels sind O_1F und O_1F'' (Winkel $GO_1F'' = GO_1F''$), letztere Gerade ist die Normale der Kurve $A_0O_1\ NC_0$ in O_1. Hieraus folgt der Satz:

Auf der Wellengeschwindigkeitsfläche gibt es vier ausgezeichnete Punkte — die Endpunkte der wahren optischen Axen — in welchen beide Mäntel zusammenstoßen, und welche die Spitzen von 4 Berührungskegeln sind, deren Focal-Linien die wahren optischen Axen und die Normalen des in ihrer Ebene liegenden Hauptschnitts der Fläche sind.

In Fig. 9 ist die Wellengeschwindigkeitsfläche mit den Durchschnitten der confocalen Kegel in der xz-Ebene projicirt. Der Hauptschnitt in dieser Ebene besteht aus dem Kreis BgO_1 LB, dessen Halbmesser = b ist und aus der Fußpunktenkurve der entsprechenden Ellipse von der ersten Wellenfläche, AGO_1 lC; beide schneiden sich in O_1, dem Endpunkte der wahren optischen Axe. GN''NH ist eine sphärische Curve auf dem äußern Mantel und in'' n'''l eine solche auf dem innern. Diese Curven werden nach den Gleichungen 14 construirt. Um nun die Curve gn''nh, d. h. den Durchschnitt des Kegels, auf welchem die erste sphärische Curve liegt, mit dem innern Mantel, oder die Curve JN'' N'''L, d. h. den Durchschnitt des Kegels, auf dem die zweite sphärische Curve liegt, mit dem äußern Mantel, zu erhalten, benützt man als Hilfsfigur die sphärischen und ellipsoidischen Linien der zweiten Wellenfläche W', welche aus E' abgeleitet ist, und die sich wie in §. 1 angegeben ist, leicht construiren lassen. Da sie auf denselben Kegeln liegen, wie die Curven der Wellengeschwindigkeitsfläche, so geben die Richtungen Gg, Ll auch in der Hilfsfigur die Durchschnitte dieser Kegel mit den Haupt-Ebenen an. Es seien $\mathfrak{N}''$ und n'' zwei Punkte auf dem äußern und innern Mantel der Letzteren. Um die entsprechenden Punkte N'' und n'' zu erhalten, ziehe man die Gerade ON'' in der gleichen Richtung, wie On''$\mathfrak{N}''$ in der Hilfsfigur, so geben ihre Durchschnitte N'' und n'' mit den sphärischen Curven GH und il die correspondirenden Punkte an. Auf diese Art lassen sich also, wenn in Fig. 9 nur die sphärischen Curven nach den Formeln 14 gezeichnet sind, durch bloßes Ziehen von parallelen Radien OnN, On'N' . . . mit den ent-

sprechenden Radien der Hilfsfigur On$\mathfrak{N}$, On'$\mathfrak{N}'$ ... die Punkte nn''g einer correspondirenden Curve auf dem innern oder N''N'''L einer solchen auf dem äußern Mantel construiren. Nach den Gesetzen der Transformation durch reciproke Radien ist ON . O$\mathfrak{N}$ = On . On, es wird also $\mathfrak{N}$ auf dem innern und n auf dem äußern Mantel der zweiten Wellenfläche liegen. Die Gleichung kann zur Controle der Construction dienen, zur Ausführung selbst reicht aber das angegebene Verfahren durch bloßes Ziehen von Parallel-Linien hin.

Um die Gleichung dieser Curven zu erhalten, geht man von der Beziehung aus (Fig. 7 und 8) $OK' . Ok' . OQ' = \frac{1}{abc}$ oder $ON . On . \frac{1}{OQ'} = abc$; bewegt sich N auf einer sphärischen Curve, so ist ON constant, also auch $\frac{On}{OQ'}$; da nun der Punkt Q' auf der Fußpunktfläche von E' liegt, deren Gleichung $S\frac{x^2}{a} = (Sx^2)^2$ ist, so muß n auf der ihr ähnlichen Fläche

$$16)\ \frac{abc}{v} \quad S\frac{x^2}{a} = (Sx^2)^2$$

liegen. Durch Elimination von x, y, z aus 4) und 16) findet man die Relationen für die Projectionen der Schnittkurven.

Um die Durchschnitte der confocalen Kegel mit beiden Flächen, sowohl mit der Wellenfläche als auch mit der Wellengeschwindigkeitsfläche, auf dem Modell selbst zu zeichnen, dient folgender Lehrsatz:

Zwei Paare sich rechtwinklig schneidender Kegel, deren Focal-Linien die secundären (wahren) optischen Axen sind, schneiden aus einem Mantel der Wellenfläche (Wellengeschwindigkeitsfläche) ein Viereck aus, in dem die Entfernungen von je zwei Gegenecken einander gleich sind.

Der Beweis dieses Satzes gründet sich darauf, daß die nach zwei Gegenecken gezogenen Radien mit einander denselben Winkel einschließen, wie die Radien, welche nach den beiden andern Gegenecken werden.

Bei der Wellenfläche (Fig. 6) ist MM'M''M''' ein solches Viereck MM''' = M'M''; da MM'' und M'M''' sphärische Curven sind, so ist OM = OM'' und OM' = OM'''; ferner Winkel MOM''' = M'OM'', woraus die Gleichheit der Entfernungen von je zwei Gegenecken folgt. Diese Schlüsse lassen sich auch auf das entsprechende Viereck des innern Mantels anwenden, indem die großen Buchstaben M durch m ersetzt werden; hier sind mm' und m''m''' sphärische Curven. Die Gleichheit der Winkel MOM''' und M'OM'' beruht auf einer Eigenschaft confocaler Kegel, die man leicht aus den Gleichungen 12) und 13) in §. 1 oder in §. 2 ableiten kann.

Da aber O_2O_1 auch eine sphärische und O_2G eine ellipsoidische Curve ist, so gilt der Satz auch für das Viereck OO_2M_1G, d. h. es ist $MO_2 = O_1G$:

Die Entfernung irgend eines Punktes der Wellenfläche vom Endpunkt der secundären optischen Axe ist gleich dem Abstand der Durchschnittspunkte von der durch diesen Punkt gehenden sphärischen und ellipsoidischen Linie mit einer Hauptebene.

Um diese Schlüsse auf die Wellengeschwindigkeitsfläche (Fig. 10) zu übertragen, darf man nur die Buchstaben M, m durch N, n ersetzen. Es ist also

$NN''' = N'N''$, $NO_1 = GK$ oder die Entfernung irgend eines Punktes der Wellengeschwindigkeitsfläche vom Endpunkt der wahren optischen Axe ist gleich dem Abstand der beiden durch diesen Punkt gehenden Linien mit einer Hauptebene. Diese Linien sind die Durchschnitte der confocalen Kegel mit der Fläche.

Die plastische Darstellung beider Flächen wird wesentlich erleichtert durch die Projectionen in Fig. 1, 2, 3 und 9, welche die Durchschnitte der confocalen Kegel mit den Flächen enthalten und mit deren Hilfe sich andere Durchschnitte mit beliebigen Ebenen leicht construiren lassen. Um die Curven auf den Modellen selbst anzubringen, werden die beiden vorhergehenden Sätze benützt. Bei der Wellenfläche wird zuerst der Kreis $O_1M'''G$ gezeichnet, die Punkte H und J lassen sich aus den Projectionen bestimmen. Da $MO_2 = O_1G$, so liegt, der Punkt M auf einem Kreise, welcher von O_2 (mit dem Zirkel) auf dem Modell beschrieben wird. Er liegt aber außerdem noch auf 3 andern Kreisbögen, welche von den Punkten A auf der z- und y-Axe, B auf der x-Axe je mit den Halbmessern GJ, HJ und HO_1 gezogen werden. Ebenso verfährt man bei den andern Punkten M' ... Die nach G, O_1 H gezogenen Halbmesser bestimmen auf dem innern Mantel die Punkte g, o_1, h, von welchen aus hier sich in ähnlicher Weise die Punkte m, m' ... angeben lassen. Dieses Verfahren findet auch auf die Wellengeschwindigkeitsfläche Anwendung und bedarf keiner nähern Erläuterung; man kann hier von dem Kreise $O_2n'''G''$ ausgehen.

Die Projectionen der Wellengeschwindigkeitsfläche in Fig. 12 und 13 entsprechen denjenigen der Wellenfläche in Fig. 2 und 3 und sind ähnlich wie Fig. 9 mit Hilfe der correspondirenden Projectionen der zweiten Wellenfläche W' construirt.

Die Gleichung §. 2, 4) stellt zugleich die asymptotischen Kegel der confocalen Hyperboloide des Ergänzungs-Ellipsoids vor, denn setzt man auf der rechten Seite dieser Gleichung 1 statt o, so erhält man die Gleichungen dieser confocalen Flächen. Ebenso stellt die Gleichung §. 1, 4) zugleich die asymptotischen Kegel der confocalen Hyperboloide des Polarisations-Ellipsoids vor, weil man die Gleichungen dieser Flächen erhält, wenn man auf der rechten Seite o durch 1 ersetzt.

Aus dem Vorstehenden erhellt, daß bei der Erzeugung dieser Flächen 4 Systeme von Kegeln eine wichtige Rolle spielen, welchen die Gleichungen 3) und 4) in §. 1 und §. 2 entsprechen und von denen deßhalb noch einige weitere Eigenschaften angegeben werden.

1) Die Kegel, welche das Ergänzungsellipsoid in sphärischen Curven schneiden (§. 1, 3). Ihre Kreisschnitte sind parallel denjenigen des Ergänzungsellipsoids; die Mantellinien eines solchen Kegels bestimmen in der Wellengeschwindigkeitsfläche zwei Radien (oder zwei conjugirte Wellengeschwindigkeiten), deren Product constant ist; somit schneidet jeder von diesen Kegeln aus den beiden Mänteln der Fläche zwei inverse Curven aus, d. h. wovon die Eine durch Transformation mittelst reciproker Radienvectoren aus der andern abgeleitet werden kann. Die Ebenen der Kreisschnitte, welche auch zu diesen Kegeln gehören, treffen also ebenfalls beide Mäntel in inversen Curven. Der Beweis folgt aus den Beziehungen dieser Kegel zum zweiten System.

2) Die Kegel, deren Focallinien die secundären optischen Axen sind (§. 1, 4) und welche die Wellenfläche in sphärischen und ellipsoidischen Curven treffen. Die Mantellinien eines solchen Kegels sind parallel mit denjenigen Normalen des

Ergänzungsellipsoids, deren Fußpunkte auf einer Krümmungslinie liegen Sie sind zugleich die asymptotischen Kegel der confocalen Hyperboloide des Polarisationsellipsoids und jede ihrer Tangentialebenen bildet also in dem Letzteren einen Schnitt von constantem Inhalt (analyt. Geom. des Raums von Salmon Fiedler 1 Thl. S. 216); errichtet man im Mittelpunkt eine Senkrechte auf dem Schnitt und trägt darauf 2 Strecken ab gleich den reciproken Werthen seiner Halbaxen, so ist auch das Product dieser Strecken constant. Ihre Endpunkte liegen auf den beiden Mänteln der Wellengeschwindigkeitsfläche und da die Kegel 1) die Ergänzungskegel von 2) sind, so folgt daraus die für jene angegebene Eigenschaft.

3) Die Kegel, welche das Polarisations-Ellipsoid in sphärischen Kurven schneiden (§. 2, 3). Ihre Kreisschnitte sind parallel mit denjenigen des Polarisations-Ellipsoids; die Mantellinien eines solchen Kegels bestimmen in der Wellenfläche zwei Radien (oder 2 conjugirte Strahlengeschwindigkeiten) deren Product constant ist u. s. w. (wie in 1).

4) Die Kegel, deren Focallinien die wahren optischen Axen sind (§. 2, 4) und welche einen Mantel der Wellengeschwindigkeitsfläche in sphärischen Curven schneiden. Die Mantellinien eines solchen Kegels sind parallel mit denjenigen Normalen des Polarisationsellipsoids, deren Fußpunkte auf einer Krümmungslinie liegen. Sie sind zugleich die asymptotischen Kegel der confocalen Hyperboloide des Ergänzungsellipsoids und jede ihrer Tangential-Ebenen bildet also in dem Letzteren einen Schnitt von constantem Inhalt, woraus die Eigenschaft der Kegel 3) folgt.

§. 3.

Die Grundlage für die Theorie der doppelten Brechung bildet die Abhandlung von Fresnel (Mémoire sur la double réfraction, Académie des Sciences de l'Institut de France, tome VII, 1827), deren Hauptgrundzüge hier wiedergegeben werden. Im Jahr 1816 machten Arago und Fresnel die Entdeckung, daß zwei senkrecht zu einander polarisirte Lichtstrahlen keinen Einfluß auf einander ausüben, unter Umständen, wo gewöhnliche Lichtstrahlen interferiren, während dem man, sobald ihre Polarisations-Ebenen ein wenig sich nähern, die dunkeln und hellen Bänder sieht, welche aus dem Zusammentreffen der beiden Strahlenbündel folgen, und die um so deutlicher werden, je mehr sich ihre Polarisations-Ebenen nähern. Hieraus folgt, daß zwei senkrecht zu einander polarisirte Strahlen immer dieselbe Licht-Intensität geben, welches auch der Unterschied der von ihnen zurückgelegten Wege ist, somit müssen die Äthermolecüle senkrecht zu den Strahlen und rechtwinklig zu einander schwingen. Denn, wenn man die Oscillation eines Molecüls nach drei zu einander senkrechten Richtungen zerlegt, wovon die erste parallel mit dem Strahl ist und die beiden andern in einer Ebene senkrecht zu demselben stattfinden, so muß die erste Composante = o sein, weil sonst die Intensität des Lichts nicht constant sein könnte für jede beliebige Richtung der Polarisations-Ebene. Hierauf beweist Fresnel folgende 2 Sätze:

Bei irgend einem System von Molecülen im Gleichgewicht und welches auch das Gesetz ihrer gegenseitigen Wirkungen sein mag, erzeugt eine sehr kleine Bewegung eines Molecüls in irgend einer Richtung eine Repulsivkraft, welche in Größe und Richtung gleich der Resultante von drei Repulsivkräften ist, von denen jede für sich durch die Projectionen der ursprünglichen Bewegung auf drei rechtwinklige Axen hervorgebracht würde.

Für jedes Molecül existiren drei rechtwinklige Richtungen, welche die Eigenschaft haben, daß wenn sich das Molecül nach einer derselben bewegt, die Resultante der dadurch hervorgebrachten Kräfte die gleiche Richtung hat. Diese Richtungen, OX, OY, OZ heißen die Elasticitätsaxen, welchen drei elastische Kräfte entsprechen,

$$a > b > c.$$

Wir nehmen nun an, ein Äthermolecül bewege sich in der Richtung OH' Fig. 8 und setzen den zurückgelegten Weg $= 1$; sind α, β, γ die cosinus der Winkel, welche OH' mit den Axen macht, so stellen diese Größen zugleich die Projectionen der Strecken 1 auf den Axen vor. Dadurch werden drei elastische Kräfte hervorgerufen, $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ in der Richtung der Axen, welche sich zu einer Mittelkraft

$$1)\quad f^2 = a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2$$

zusammensetzen.

Es seien x, y, z die Coordinaten von H' und x', y', z' diejenigen von K, ferner wie oben $OH'^2 = v$ und $OK^2 = r$, so ist

$$2)\quad \alpha = \frac{x'}{a}\sqrt{v} \qquad \beta = \frac{y'}{b}\sqrt{v} \qquad \gamma = \frac{z'}{c}\sqrt{v}$$

also $a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 = v\,(x'^2 + y'^2 + z'^2)$ oder

$$3)\quad f^2 = rv.$$

Hieraus folgt ferner, daß die elastische Kraft f die Richtung OK hat, denn die Cosinus der Winkel, welche sie mit den Axen bildet, sind nach 1. $\frac{a\alpha}{f}, \frac{b\beta}{f}, \frac{c\gamma}{f}$, während nach 2.

$$x' = \frac{a\alpha}{\sqrt{v}} \qquad y' = \frac{b\beta}{\sqrt{v}} \qquad z' = \frac{c\gamma}{\sqrt{v}} \text{ ist.}$$

Also verhalten sich jene Cosinus wie $x' : y' : z'$; d. h. f hat die Richtung von OK. Die Projection von f auf der Richtung OH' ist $= f\sqrt{\frac{v}{r}} = v$.

Diese Projection oder Seitenkraft von f ist nun allein wirksam hinsichtlich der Fortpflanzung der Wellen-Ebene, welche durch OH' geht und senkrecht zur Figur steht; sie theilt ihr eine Geschwindigkeit mit $=$ OH' oder $\sqrt{v}$, also gelangt die Welle in der Zeiteinheit nach NM, da ON $=$ OH' ist, und berührt die Wellenfläche in M, während ON ein Radius der Wellengeschwindigkeitsfläche ist.

Da diese Seitenkraft gleich dem Quadrat von OH' ist, so nennt Fresnel die Fläche, welche der Punkt H' beschreibt, die Elasticitätsfläche, ihre Gleichung wird erhalten, wenn man die Coordinaten von K, x', y', z' auf OH' projicirt. Da $x'\alpha$, $y'\beta$, $z'\gamma$ diese Projectionen sind, und ihre Summe $=$ OH' ist, so findet man nach 2.

4) $v = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2$ für die Gleichung der Elasticitätsfläche in Polarcoordinaten, oder

$$5)\quad (Sx^2)^2 = Sax^2 \text{ in Punktcoordinaten.}$$

Setzt man in 4. $\frac{1}{v}$ statt v, so erhält man

6) $\frac{1}{v} = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2$ für die Gleichung des Polarisations-Ellipsoids in Polarcoordinaten, oder

7) $Sax^2 = 1$ in Punktcoordinaten.

Die andere Composante der Kraft f parallel mit KH' hat keinen Einfluß auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen, weil sonst nach dem Obigen die Intensität des Lichts von zwei senkrecht zu einander polarisirten Lichtstrahlen nicht für jede beliebige Richtung der Polarisations-Ebenen constant sein könnte. Um zu beweisen, daß die elastische Kraft v oder die Composante von f in der Richtung OH' gleich dem Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist, welche wir mit $\sqrt{v}$ bezeichnen, benützt man die Formel von Newton, $v = \frac{e}{d}$, worin v das Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit, e die Elasticität des Äthers und d seine Dichtigkeit bedeutet, welche in allen Mitteln als constant angenommen wird. Man kann auch die Schwingungen eines Äthermolecüls mit der Pendelbewegung vergleichen, also die Formel $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ anwenden, in welcher t die Schwingungszeit, l die Pendellänge und g die Schwere bedeutet. Die Übereinstimmung beruht darauf, daß die elastische Kraft, welche durch die Bewegung eines Äthertheilchens hervorgerufen wird, der Entfernung desselben von der Gleichgewichtslage proportional ist und daß beim Pendel die Bewegung dieselbe ist, wie wenn anstatt der Schwere im Mittelpunkt der Schwingung eine Kraft wirkte, deren Anziehung ebenfalls der Entfernung proportional ist. Denkt man sich ferner auf der Linie ON eine Reihe von Äthermolecülen, wovon das letzte in N_0 seine Schwingung beginnt, wenn das erste in O die seinige vollendet hat, so ist $ON_0 = \lambda$ eine Wellenlänge, und wenn t die Schwingungsdauer eines Äthermolecüls ist, $t = \frac{\lambda}{\sqrt{v}}$.

Fresnel hat nun die Analogie mit der Bewegung einer schwingenden Saite zu Hilfe genommen. Sind O und N_0 die beiden festen Endpunkte derselben, so bildet sie zu irgend einer Zeit dieselbe Curve, wie die Äthermolecüle zwischen den nämlichen Punkten. Wenn bei einer schwingenden Saite die Oscillationen isochron sein sollen, so muß ihre Länge proportional der Quadratwurzel ihrer Spannung sein. Da die Schwingungen der Äthermolecüle für eine bestimmte Farbe in allen Mitteln auch isochron sind, so würde die Wellenlänge λ und also auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Quadratwurzel aus der elastischen Kraft proportional sein, welche ihnen, wie bei der Saite die Spannung, eine Bewegung mittheilt, parallel mit der Wellenebene.

Nach §. 2, 4) ist die Gleichung der Wellengeschwindigkeitsfläche $S \frac{x^2}{v - a} = o$ oder

8) $x^2 (v - b) (v - c) + y^2 (v - c) (v - a) + z^2 (v - a) (v - b) = o.$

Diese Gleichung hat in Beziehung auf v zwei Wurzeln, welche den beiden Halbaxen OH' und Oh' des Centralschnitts der Elasticitätsfläche entsprechen, der durch OH' senkrecht zur Ebene der Figur geht. Nimmt man nun an, daß ein zweites Äthermolecül in der Richtung Oh' schwingt, so lassen sich alle bisherigen Schlüsse für das erste Molecül auch auf das zweite anwenden. Legt man durch

h' eine zweite Ebene senkrecht zu Oh', so wird sie E in k'' berühren und Ok'' ist die Richtung einer zweiten elastischen Kraft, welche durch diese neue Vibration hervorgerufen wird. Ihre Composante in der Richtung Oh' ist $= Oh'^2$ und erzeugt eine Welle, schneller als die erste, welche in der Zeiteinheit nach nm' kommt und parallel mit der ersten ist.

Zunächst beweist nun Fresnel, daß, wenn man durch eine beliebige Schwingungsrichtung OH' eines Äthermoleculs einen solchen Centralschnitt der Elasticitätsfläche legt, von dem OH' eine Halbaxe ist, die Ebene von OH' und der entsprechenden elastischen Kraft OK senkrecht auf diesem Centralschnitt steht, welcher Beweis hier, aber in anderer Form, reproducirt wird. Es seien l, m, n die Richtungscosinus von ON, während wie oben α, β, γ diejenigen von OH' und $\frac{a\alpha}{f}$, $\frac{b\beta}{f}$, $\frac{c\gamma}{f}$ die von OK sind. Man hat folgendes System von Gleichungen:

$$9)\quad \begin{aligned} l\alpha + m\beta + n\gamma &= o \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1 \\ a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 &= v \end{aligned} \qquad 10)\quad \begin{aligned} ld\alpha + md\beta + nd\gamma &= o \\ \alpha d\alpha + \beta d\beta + \gamma d\gamma &= o \\ a\alpha d\alpha + b\beta d\beta + c\gamma d\gamma &= o \end{aligned}$$

$$11)\quad \begin{aligned} l\alpha' + m\beta' + n\gamma' &= o \\ \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' &= o \\ a\alpha\alpha' + b\beta\beta' + c\gamma\gamma' &= o \end{aligned}$$

Die erste der Gleichungen 9) besagt, daß die Linien OH' und ON auf einander senkrecht stehen, die zweite ist die bekannte Relation zwischen den Richtungscosinus einer Geraden, die dritte ist die Polargleichung der Elasticitätsfläche. Die Gleichungen 10) werden aus 9) durch Differentziation abgeleitet. Das gleichzeitige Bestehen der Relationen 10) ist an die Bedingung geknüpft.

$$12)\quad \begin{vmatrix} l & m & n \\ \alpha & \beta & \gamma \\ a\alpha & b\beta & c\gamma \end{vmatrix} = o$$

Sollen die Gleichungen 11) mit einander verträglich sein, so muß die gleiche Bedingung erfüllt werden; dieselben zeigen, daß die Gerade, deren Richtungscosinus α', β', γ' sind, senkrecht steht auf ON, OH' und OK, also liegen diese 3 Gerade in einer Ebene. Da aber bei der Differenziation der dritten Gleichung 9) die Richtung von v als constant angenommen wurde, so sind zwei unendlich nahe Werthe von OH' einander gleich, d. h. OH' ist eine Halbaxe des Centralschnitts der Elasticitätsfläche, dessen Ebene senkrecht auf derjenigen jener 3 Geraden steht.

Die Richtungscosinus der zweiten Axe $Oh' = v^2$ des Centralschnitts sind also α', β', γ', oder nach 12)

$$13)\quad \begin{vmatrix} n & m \\ \gamma & \beta \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} l & n \\ \alpha & \gamma \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} m & l \\ \beta & \alpha \end{vmatrix};$$

Dem in der Richtung Oh' schwingenden Äthermolecüle entspricht eine zweite elastische Kraft f' in der Richtung Ok''

$$14)\quad f'^2 = a^2\alpha'^2 + b^2\beta'^2 + c\gamma'^2$$

Die Richtungscosinus derselben sind $\frac{a\alpha'}{f'}$, $\frac{b\beta'}{f'}$, $\frac{c\gamma'}{f'}$; ihre Composante $Oh'^2 = v^2$, welche die schnellere Welle nach n treibt, ist gegeben durch die Gleichung

$$15)\ v^2 = a\alpha'^2 + b\beta'^2 + c\gamma'^2.$$

Ersetzt man aber die letzte der Gleichungen 9) durch diejenige des Polarisations-Ellipsoids 6), so hat man in den letzten der Gleichungen 10) und 11) a, b, c mit $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ zu vertauschen, die übrigen bleiben ungeändert, und statt der Determinanten 12) erhält man

$$16)\ \begin{vmatrix} l & m & n \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{\alpha}{a} & \frac{\beta}{b} & \frac{\gamma}{c} \end{vmatrix} = o$$

Es gelten hier also dieselben Schlüsse, und die Subdeterminanten in den Formeln 13) beziehen sich auch auf die Halbaxe Ok' des Polarisations-Ellipsoids, deren Richtung mit Oh' zusammenfällt. OK' ist also die erste Halbaxe.

Die weitere Frage, warum die Wellenebene, welche durch die Schwingung eines Äthermolecüls in der Richtung OH' entsteht, senkrecht ist zur Ebene von OH' und der entsprechenden elastischen Kraft OK, beantwortet Fresnel folgendermaßen: Wenn man ein System von Lichtwellen annimmt (die eben und von unbestimmter Ausdehnung vorausgesetzt werden), welche sich in dem Mittel fortpflanzen, dessen Elasticität das Gesetz befolgt, welches durch die Elasticitätsfläche repräsentirt wird, und durch ihren Mittelpunkt eine Ebene legt, parallel mit den Wellen, so wird man von jeder Composante senkrecht zu dieser Ebene annehmen müssen, daß sie keinen Einfluß habe auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen. Die elastische Kraft, welche durch Schwingungen parallel mit einem der Radienvectoren dieses Centralschnitts erzeugt wird, kann immer in zwei andere Kräfte zerlegt werden, wovon die eine parallel, und die andere senkrecht zum Radiusvector ist: die erste ist gleich dem Quadrat desselben; da die zweite nur für zwei besondere Lagen auf der Ebene des Centralschnitts senkrecht steht, so kann man sie im Allgemeinen in zwei andere Kräfte zerlegen, die eine in der Ebene und die andere normal zu derselben. Diese übt keinen Einfluß auf die Fortpflanzung der Wellen aus; anders verhält es sich aber mit jener, welche man mit der ersten Composante, die parallel mit dem Radiusvector ist, combiniren müßte, um die ganze elastische Kraft, welche in der Wellenebene erregt wird, zu haben.

Für diesen allgemeinen Fall wäre die elastische Kraft, welche die Wellen bewegt, nicht den Schwingungen parallel, die sie erzeugt haben, wodurch in den Schwingungen, die von einer Wellenschichte zur andern sich fortpflanzen, eine graduelle Veränderung ihrer Richtung, und somit auch der Intensität der elastischen Kraft, welche sie hervorrufen, erzeugt würde, was die Berechnung ihrer Fortpflanzung sehr schwierig machen, und die Anwendung des gewöhnlichen Gesetzes verhindern würde, wonach die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Quadratwurzel der hervorgerufenen Elasticität proportional ist, von dem nachgewiesen wurde, daß es nur für den Fall paßt, wo die Schwingungs- und die Elasticitätsrichtung von einer Wellenschichte zur andern constant bleiben.

Nun gibt es in jedem Centralschnitt zwei zu einander senkrechte Richtungen (OH' und Oh') von der Eigenschaft, daß sich die durch Schwingungen parallel mit ihnen erregten elastischen Kräfte (in den Richtungen OK und Ok'') in zwei andere zerlegen lassen, wovon die eine parallel und die andere senkrecht zu dieser

Richtung ist, und wo dann die zweite Composante senkrecht zur Ebene des Centralschnitts ist, so daß die Schwingungen ausschließlich durch eine elastische Kraft fortgepflanzt werden, welche ihnen parallel ist, und die also auf dem ganzen Weg die nämliche Richtung und Intensität beibehält. Welches nun auch die Richtung der einfallenden Schwingungen sein mag, so wird man sie stets nach diesen zwei zu einander senkrechten Richtungen in der Ebene des Centralschnitts zerlegen können und so die Aufgabe auf die Berechnung ihrer Fortpflanzungsgeschwindigkeiten parallel mit diesen 2 Richtungen zurückführen können, welche Berechnung leicht zu machen ist nach dem Princip, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten den Quadratwurzeln der entsprechenden elastischen Kräfte proportional sind, welches sich in diesem Fall streng anwenden läßt.

§. 4.

In dem rechtwinkligen Dreieck OK_0H_0 (Fig 8) ist OK_0 gleich der Kraft $f = \sqrt{rv}$ (§. 3, 3); $OH_0 = v$, also $K_0H_0 = \sqrt{v(r-v)}$. Die Coordinaten von f sind $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$; die Richtungscosinus von OH_0 sind α, β, γ und diejenigen von $K_0 H_0$ l, m, n. Wenn man die drei Seiten dieses Dreiecks auf die Axen projicirt, so erhält man folgendes Formelnsystem:

$$1)\ (a-v)\,\alpha = \sqrt{v(r-v)}\,l \qquad 2)\ a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 = rv$$

$$(b-v)\,\beta = \sqrt{v(r-v)}\,m \qquad 3)\ a\alpha + b\beta + c\gamma = v$$

$$(c-v)\,\gamma = \sqrt{v(r-v)}\,n \qquad 4)\ a\alpha l + b\beta m + c\gamma n = \sqrt{v(r-v)}$$

$$5)\ \frac{l^2}{(a-v)^2} + \frac{m^2}{(b-v)^2} + \frac{n^2}{(c-v)^2} = \frac{1}{v(r-v)}$$

$$6)\ \frac{l^2}{a-v} + \frac{m^2}{b-v} + \frac{n^2}{c-v} = o$$

3) ist abgeleitet aus 1) durch Multiplikation mit α, β, γ und Berücksichtigung von $l\alpha + m\beta + n\gamma = o$; 4) durch beiderseitige Multiplikation mit l, m, n, ebenso 6), nachdem man vorher mit $a - v$, $b - v$, $c - v$ dividirt hat. 5) erhält man aus 1) durch Quadriren, mit Rücksicht auf $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. 3) ist die Gleichung der Elasticitätsfläche und 6) diejenige der Wellengeschwindigkeitsfläche, je in Polarcoordinaten.

$$7)\ l\sqrt{v} - x = \sqrt{r-v}\,.\,\alpha \qquad 8)\ \frac{x}{a-r} = \frac{l}{a-v}\sqrt{v}$$

$$m\sqrt{v} - y = \sqrt{r-v}\,.\,\beta \qquad \frac{y}{b-r} = \frac{m}{b-v}\sqrt{v}$$

$$n\sqrt{v} - z = \sqrt{r-v}\,.\,\gamma \qquad \frac{z}{c-r} = \frac{n}{c-v}\sqrt{v}$$

$$9)\ S\,\frac{ax^2}{a-r} = o$$

Projicirt man dagegen die drei Seiten des rechtwinkligen Dreiecks OMN auf die Axen, $OM = \sqrt{r}$, $ON = \sqrt{v}$, $MN = \sqrt{r-v}$; l, m, n sind die Richtungscosinus von ON, α, β, γ diejenigen von MN und x, y, z die Coordinaten von M, so kommt man auf die Formeln 7), aus welchen man 8) ableitet, indem man für $\sqrt{r-v}$ seine Werthe aus 1) setzt, und einige leichte

Reductionen vornimmt. Durch Quadriren von 8), beiderseitige Multiplikation mit a (a — r), b (b — r), c (c — r) und indem man für l, m, n ihre Werthe aus 1) setzt, findet man 9) oder die Gleichung der Wellenfläche; die Formeln 8) können aber auch als Gleichungen dieser Fläche angesehen werden.

$$10)\ \alpha = \sqrt{r - v}\,\frac{x}{a - r} \qquad 11)\ S\,\frac{x^2}{(a - r)^2} = \frac{1}{r - v}$$

$$\beta = \sqrt{r - v}\,\frac{y}{b - r} \qquad 12)\ S\,\frac{x^2}{r - a} = 1$$

$$\gamma = \sqrt{r - v}\,\frac{z}{c - r}$$

Die Formeln 10) erhält man durch Combination von 1) und 8); durch Qadriren derselben entsteht 11); projicirt man die Projectionen x, y, z von OM auf MN, $\alpha x + \beta y + \gamma z = - MN$, so findet man aus 10) die Gleichung 12), welche ebenfalls die Wellenfläche repräsentirt, denn durch Combination derselben mit $Sx^2 = r$ kommt man auf 9) zurück.

Die Gleichung 6) läßt sich auch in diesen Formen schreiben:

$$13)\ l^2 (b-v)(c-v) + m^2 (c-v)(a-v) + n^2 (a-v)(b-v) = o$$

$$14)\ v^2 - v\left\{ l^2 (b+c) + m^2 (c+a) + n^2 (a+b)\right\} + l^2 bc + m^2 ca + n^2 ab = o$$

$$15)\ v^2 - v\left\{ a + b + c - al^2 - bm^2 - cn^2 \right\} + abc\left(\frac{l^2}{a} + \frac{m^2}{b} + \frac{n^2}{c}\right) = o$$

Sind v_1 und v_2 die beiden Wurzeln, so ist

$$16)\ v_1 + v_2 = a + b + c - al^2 - bm^2 - cn^2 = l^2 (b + c) + m^2 (c + a) + n^2 (a + b)$$

$$17)\ v_1 v_2 = abc\left(\frac{l^2}{a} + \frac{m^2}{b} + \frac{n^2}{c}\right)$$

$$18)\ l^2 (b - v)(c - v) + m^2 (c - v)(a - v) + n^2 (a - v)(b - v) = (v - v_1)(v - v_2)$$

In dieser identischen Gleichung kann man für v beliebige Werthe annehmen, also der Reihe nach a, b, c dafür setzen, und erhält die Relationen

$$19)\ l^2 = \frac{(a-v_1)(a-v_2)}{(c-b)(c-a)}\quad m^2 = \frac{(b-v_1)(b-v_2)}{(c-b)(a-b)}\quad n^2 = \frac{(c-v_1)(c-v_2)}{(a-c)(b-c)}$$

Wenn diese Brüche positiv sein sollen, so muß $a > v_2 > b > v_1 > c$ sein, die Geschwindigkeit der schnelleren Welle ist also nie kleiner und die der langsameren nie größer als die mittlere Wellengeschwindigkeit.

Durch Combination dieser Gleichung mit 5) findet man

$$20)\ v_1 (r_1 - v_1) = \frac{(a-v_1)(b-v_1)(c-v_1)}{v_1 - v_2}\ v_2 (r_2 - v_2)$$

$$= \frac{(a-v_2)(b-v_2)(c-v_2)}{v_1 - v_2}$$

und durch Combination von 19) und 20) mit 1).

$$21)\ \alpha_1^2 = \frac{(a-v_2)(b-v_1)(c-v_1)}{(v_1-v_2)(b-a)(c-a)} \qquad \beta_1^2 = \frac{(b-v_2)(c-v_1)(a-v_1)}{(v_1-v_2)(c-b)(a-b)}$$

$$\gamma_1^2 = \frac{(c-v_2)(a-v_1)(b-v_1)}{(v_1-v_2)(a-c)(b-c)}$$

Diese Gleichungen bestimmen die Lage einer Polarisations-Ebene durch die Werthe der beiden conjugirten Wellengeschwindigkeiten; durch Verwechslung der Suffixe erhält man die Lage der andern.

Die Gleichung der Polarisations-Ebene OMN (Fig. 8) selbst, welche einen Strahl OM und die Normale ON der zugehörigen Welle enthält, ist

$$22)\ (b-c)(a-v)\frac{x}{l} + (c-b)(b-v)\frac{y}{m} + (a-b)(c-v)\frac{z}{n} = o$$

Die Coordinaten x, y, z des Punktes M bestimmen sich aus 8) und diejenigen von N sind $l\sqrt{v}$, $m\sqrt{v}$, $n\sqrt{v}$, woraus sich die Gleichung 22) unmittelbar ergibt.

In der Richtung ON sind aber zwei Wellengeschwindigkeiten $ON = \sqrt{v_1}$ und $ON = \sqrt{v_2}$ vereinigt, also gehen durch ON zwei Polarisations-Ebenen OMN und OM'n; ihre Gleichungen sind:

$$23)\ (b-c)(a-v_2)\frac{x}{l} + (c-a)(b-v_2)\frac{y}{m} + (a-b)(c-v_2)\frac{z}{n} = o$$

$$(b-c)(a-v_1)\frac{x}{l} + (c-a)(b-v_1)\frac{y}{m} + (a-b)(c-v_2)\frac{z}{n} = o$$

Sie stehen aufeinander senkrecht, denn durch Multiplication der Coefficienten von x, y, z in 23) und 24) erhält man mit Berücksichtigung von 19) die Identität

$$(b-c)^2(b-a)(c-a) + (c-a)^2(c-b)(a-b) + (a-b)^2(a-c)(b-c) = o$$

Für die Richtungscosinus α, β, γ der Schwingungsrichtung MN im Punkte M gilt nach 10) die Gleichung

$$24)\ (b-c)\frac{x}{\alpha} + (c-a)\frac{y}{\beta} + (a-b)\frac{z}{\gamma} = o$$

welche ebenfalls die Polarisations-Ebene OMN repräsentirt.

Die Gleichung der Wellenfläche ist (§. 1, 12) $Sx^2 . Sax^2 - Sa(b+c)x^2 + abc = o$. Man setze nun wie bisher

$$Sx^2 = r \qquad Sax^2 = \varepsilon \qquad (a-b)(b-c)(c-a) = D$$

so ist $$25)\ x^2 = \frac{1}{D}(b-c)(r-a)(\varepsilon-bc) \quad y^2 = \frac{1}{D}(c-a)(r-b)(\varepsilon-ca)$$

$$z^2 = \frac{1}{D}(a-b)(r-c)(\varepsilon-ab)$$

also $$26)\ S\frac{x^2}{\varepsilon-bc} = o$$

Dieß ist eine weitere Form für die Gleichung der Wellenfläche.

§. 5.

Surfaces polaires réciproques*) oder Reciprokal-Flächen sind zwei solche Flächen, bei welchen die Punkte der Einen die Pole der Tangential-Ebenen der Andern in Beziehung auf eine dritte Fläche zweiter Ordnung sind. Da nun (Fig. 8) K' der Pol der Tangential-Ebene von K und umgekehrt K der Pol der Tangential-Ebene von K' ist, hinsichtlich der Kugel vom Halbmesser 1, welche die dritte Fläche ist, so folgt daraus, daß das Ergänzungs- und das Polarisations-Ellipsoid Reciprokalflächen sind hinsichtlich dieser Kugel. Bei der Drehung der Figur K'OK und der beiden Tangential-Ebenen K'H und KH' um O wird in den reciproken Relationen hinsichtlich der Kugel nichts geändert, K' wird immer der Pol von KH' und K der Pol von K'H bleiben. In dem speciellen Fall, wenn die Drehung 90° beträgt, fällt KH' auf MN, die Polar-Ebene KH wird die Tangential-Ebene der Wellenfläche in M. K'H wird in die Lage MN kommen, d. h. die Polar-Ebene K'H wird Tangential-Ebene einer zweiten Wellenfläche, die aus dem Polarisations-Ellipsoid abgeleitet ist. M ist der Berührungspunkt. Wenn man dem Punkte K' verschiedene Lagen gibt auf dem Polarisations-Ellipsoid, so erhält man nach und nach alle Tangential-Ebenen der ersten Wellenfläche, welche an die Tangential-Ebenen der zweiten Wellenfläche so gebunden sind, daß die Einen die Pole der Andern enthalten und umgekehrt. Hieraus folgt: Die aus den beiden Ellipsoiden abgeleiteten Wellenflächen sind Reciprokal-Flächen hinsichtlich der Kugel vom Halbmesser 1.

Sind x', y', z' die cartesischen Coordinaten des Punkts K' (Fig. 8), so ist die Gleichung der Polar-Ebene KH' $xx' + yy' + zz' = 1$ und die Abschnitte, welche die Polar-Ebene auf den Axen macht, sind von O aus gerechnet $\frac{1}{x'}\ \frac{1}{y'}\ \frac{1}{z'}$; setzt man nun $x' = -A$, $y' = -B$, $z' = -C$, so sind A, B, C die Plücker'schen oder Ebenencoordinaten von K'. Ist $F(x, y, z) = o$ die Gleichung der Fläche, auf welcher K' liegt, in Cartesischen Coordinaten, so ist $F(-A, -B, -C) = o$ die Gleichung der Reciprokalfläche, auf welcher K liegt, in Plücker'schen Coordinaten und umgekehrt. Man hat also folgende Zusammenstellung

$$1)\ Sax^2 = 1 \qquad 3)\ S\frac{x^2}{a} = 1$$

$$2)\ SaA^2 = 1 \qquad 4)\ S\frac{A^2}{a} = 1$$

1) und 3) sind die Gleichungen des Polarisations- und Ergänzungsellipsoids in Cartesischen, 2) und 4) in Plücker'schen Coordinaten.

Plücker fand zuerst eine einfache Ableitung von der Gleichung der Wellenfläche, da es Fresnel nicht gelang, die Gleichung der Wellengeschwindigkeitsfläche in diejenige der Wellenfläche zu transformiren und Ampère erst im Jahr 1828 durch sehr umständliche Eliminationen dazu kam. Bedeutet nämlich $\sqrt{v}$ den reciproken Werth einer Halbaxe von dem Centralschnitt K'Ok' (Fig. 8) des Polarisations-Ellipsoids, dessen Ebene der Gleichung $Ax + By + Cz = o$ entspricht, so hat man die aus den Eigenschaften der Ellipse leicht abzuleitende Relation

*) Zu vergleichen: Die Abhandlung v. Plücker (Crelle 1839).

5) $(v-b)(v-c)A^2 + (v-c)(v-a)B^2 - (v-a)(v-b)C^2 = o$

Die beiden Wurzeln dieser in v quadratischen Gleichung geben die Quadrate der reciproken Werthe OH' und Oh' der Halbaxen des Centralschnitts. Bedeutet nun $\sqrt{v}$ zugleich den Abstand der parallelen Ebene $Ax + By + Cz + 1 = o$ von O, so ist $v = \frac{1}{A^2 + B^2 + C^2}$, wodurch sich die obige Gleichung verwandelt in

6) $(bcA^2 + caB^2 + abC^2)(A^2 + B^2 + C^2) - [(b + c)A^2 + (c + a)B^2 + (a + b)C^2] + 1 = o$

Dieß ist die Gleichung der Fläche, welche von den Ebenen im Abstand $\sqrt{v}$ umhüllt wird, d. h. der vom Ergänzungs-Ellipsoid abgeleiteten Wellenfläche, und zwar in Plücker'schen Coordinaten. Ersetzt man A, B, C durch x, y, z, so hat man nach dem Obigen die Gleichung der Reciprokalfläche hinsichtlich der Kugel vom Halbmesser 1, d. h. der vom Polarisations-Ellipsoid abgeleiteten zweiten Wellenfläche in Cartesischen Coordinaten; dieß ist die Fläche, welche der Punkt M beschreibt. Ersetzt man nun weiter a, b, c durch $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, so erhält man

7) $Sx^2 \,.\, Sax^2 - Sa(b + c)x^2 + abc = o$

d. h. die gesuchte Gleichung der ersten Wellenfläche, welche vom Ergänzungs-Ellipsoid herrührt. Man kann aber auch, um die Beziehung zwischen 2 Reciprokalflächen zu ermitteln, statt der Kugel vom Halbmesser 1 eine andere Fläche zweiter Ordnung, z. B. das Ellipsoid

8) $\frac{x^2}{\sqrt{bc}} + \frac{y^2}{\sqrt{ca}} + \frac{z^2}{\sqrt{ab}} = 1$ zu Grunde legen.

Sind x^1, y^1, z^1 die Coordinaten des Punktes M auf der Fläche 7, so entspricht der Polar-Ebene von M als Pol in Beziehung auf das Ellipsoid 8) die Gleichung $\frac{xx^1}{\sqrt{bc}} + \frac{yy^1}{\sqrt{ca}} + \frac{zz^1}{\sqrt{ab}} = 1$ oder in Plücker'schen Coordinaten $Ax^1 + By^1 + Cz^1 = 1$. Setzt man nun in 6) $A^2 = \frac{x^2}{bc}$, $B^2 = \frac{y^2}{ca}$, $C^2 = \frac{z^2}{ab}$, so kommt man auf die Gleichung 7 zurück.

Hieraus folgt der Satz: die Wellenfläche ist ihre eigene Reciprokalfläche hinsichtlich des Ellipsoids 8).

Um die 2 gebrochenen Strahlen zu bestimmen, welche im Cristall entstehen, wenn er von einem Lichtstrahl in irgend einem Punkt O auf einer beliebigen Seitenfläche getroffen wird, construirt man zunächst eine Kugel, deren Mittelpunkt O und deren Halbmesser = 1 ist, indem man die Geschwindigkeit des Lichts in der Luft = 1 annimmt. Dann wird der Lichtstrahl bis zum zweiten Durchschnitt mit der Kugel verlängert, hier eine Tangential-Ebene an Letztere gelegt, welche die Cristallfläche in einer Geraden G schneidet. Es sei O' der Punkt, in welchem G von der Einfalls-Ebene geschnitten wird. Nun bestimmt man die Richtungen der drei durch O gehenden Elasticitätsaxen, trägt darauf die Hauptgeschwindigkeiten auf, welche z. B. beim Arragonit für die Strahlenart D $\sqrt{a} = 0{,}6535$, $\sqrt{b} = 0{,}5947$, $\sqrt{c} = 0{,}5932$ betragen, und erhält so das

Ergänzungs-Ellipsoid, aus welchem die erste Wellenfläche W abgeleitet wird. Nach Huyghens werden alsdann durch G zwei Tangential-Ebenen an die beiden Mäntel von W gelegt, dann sind die nach den Berührungspunkten gezogenen Halbmesser die zwei gebrochenen Strahlen. Die Aufgabe ist also darauf zurückgeführt, durch eine Gerade Tangential-Ebenen an die Wellenfläche zu legen, deren Zahl im Ganzen 4 ist, und die Berührungspunkte zu bestimmen.

Die Auflösung dieses Problems ist in Fig. 11 dargestellt. Dieselbe stellt den Schnitt der Einfalls-Ebene (welche den durch O gehenden Lichtstrahl in der Luft und das Einfallsloth, welches in O auf der brechenden Cristallfläche errichtet ist, enthält) mit W (A_0 C_0 und BB), mit W^1 (A″ C″ und BB), mit dem Directions-Ellipsoid DD und endlich mit der Kugel vom Halbmesser 1 vor. Der Einfachheit wegen, da nachdem die Gerade G construirt ist, es sich nur darum handelt, durch G 4 Tangential-Ebenen an W zu legen, ist jetzt $OB = \sqrt{b} = 1$ angenommen worden. Der Kreis BB gehört also den beiden Wellenflächen und der Kugel an. Die Gerade G geht durch O′ senkrecht zur Ebene der Figur; die brechende Cristallfläche geht durch OO′ und ist ebenfalls senkrecht zur Figur, welche einen beliebigen Centralschnitt der in Betracht kommenden Flächen vorstellt.

Man construire die in Beziehung auf die Kugel reciproke (oder conjugirte) Polare QQ_2 von G, welche W^1 in Q_1 und Q_3 schneidet. Da in Q oder Q_2 mehrere Punkte in der Zeichnung zusammenfallen, so werden dieselben durch Beisetzung der Flächen unterschieden: Q (K) liegt auf der Kugel, Q (W) auf W, Q (W^1) auf W^1, also sind Q (W^1), Q_1, Q_2 (W^1), Q_3 die 4 Durchschnittspunkte der Polare mit W^1. Man ziehe nach denselben von O aus 4 Halbmesser, und lege durch G 4 Ebenen senkrecht auf den Richtungen dieser Halbmesser, so erhält man die verlangten Tangential-Ebenen. Die 4 Halbmesser geben also die Richtungen der Wellennormalen und zugleich, da $OQ_1 \,.\, ON = OQ_3 \,.\, ON_1 = 1$ ist, ihre reciproken Werthe an. Legt man aber durch die 4 Durchschnittspunkte der Polare Tangential-Ebenen an W^1, und fällt darauf Perpendikel von O aus, so treffen diese W in den Berührungspunkten R, Q (W), Q_2 (W), R_1; diese Perpendikel geben, da $Or \,.\, OR = Or_1 \,.\, OR_1 = 1$ ist, die reciproken Werthe der Strahlen OR 2c. an.

Diese Construction der beiden gebrochenen Strahlen OR und OQ (W), welche einem auf die Cristallfläche OO_1 in O auffallenden Lichtstrahl entsprechen, erfordert also nur die Bestimmung der Durchschnittspunkte der Polaren Q (K) Q_1 von G mit W^1 und der Tangential-Ebene von W^1 in diesen Schnittpunkten. Sie rührt von Hamilton her und ihr Beweis beruht darauf, daß W und W^1 Reciprokalflächen sind hinsichtlich der Kugel K.

Eine weitere Construction nach Plücker (Crelle 1839 Seite 43) löst die Aufgabe mit Hülfe der in Beziehung auf das Directions-Ellipsoid reciproken Polaren von G, welche W in den Punkten P, P_1, P_2, P_3 trifft. Betrachtet man diese 4 Punkte als Pole hinsichtlich des Directions-Ellipsoids, so sind ihre Polar-Ebenen die Tangential-Ebenen von W und gehen durch G. P ist also der Pol von der Ebene O^1Q (W), P_1 (W) der Pol von O^1R, P_2 von O^1Q_2 (W) und P_3 (W) von O^1R_1. Hiedurch findet man nun zwar die Tangential-Ebenen, aber nicht die Berührungspunkte R, Q (W) u. s. f. Zu diesem Zweck muß man wieder auf die Construction von Hamilton zurückkommen, weßhalb Letztere offenbar die einfachste ist. Plücker hat (am angeführten Orte) die unrichtige

Angabe gemacht, daß die nach den Schnittpunkten P, P_1 gezogenen Halbmesser die gebrochenen Strahlen und die durch G und P, P_1 gelegten Ebenen die Tangential-Ebenen seien, woher es kommt, daß er seine Construction für die einfachste hält.

Da die Figur einen beliebigen Centralschnitt der Flächen vorstellt, so ist zur Erläuterung noch hinzuzufügen, daß außer den Schnittcurven der Flächen und O^1 noch die Schnittpunkte der ersten Polare mit K und W^1 und also auch die durch dieselben gezogenen Halbmesser oder die Normalen der Tangential-Ebenen von W in der Ebene der Figur liegen, während dieß bei allen übrigen Punkten nicht der Fall ist.

Die Winkel der Wellen-Normale ON (Fig. 8) mit den wahren optischen Axen bezeichnen wir mit ψ und ψ^1 und diejenigen des Strahls OM mit den secundären optischen Axen durch φ und φ^1; die Cosinus der Winkel, welche ON mit den Axen bildet, sind wie oben l, m, n und der Winkel, welche die wahren optischen Axen mit denselben Axen bilden

$$\pm \sqrt{\frac{a-b}{a-c}},\ o,\ \sqrt{\frac{b-c}{a-c}} \text{ also}$$

$$\cos\psi = l\sqrt{\frac{a-b}{a-c}} + n\sqrt{\frac{b-c}{a-c}},$$

$$\cos\psi^1 = l\sqrt{\frac{a-b}{a-c}} + n\sqrt{\frac{b-c}{a-c}} \text{ hieraus}$$

$$l = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a-c}{a-b}}(\cos\psi - \cos\psi^1),\quad n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a-c}{b-c}}(\cos\psi + \cos\psi^1).$$

Setzt man diese Werthe für l und m in die Gleichungen 16) und 17) in §. 4 und berücksichtigt die Relation $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, so findet man nach einigen Reductionen

1. $v_1 + v_2 = a + c + (a - c)\cos\psi\cos\psi^1$

2. $v_1 v_2 = ac + \frac{a-c}{4}[(a - c)\cos^2\psi + (a - c)\cos^2\psi^1 + 2(a - c)\cos\psi\cos\psi^1]$

also 3. $v_1 - v_2 = (a - c)\sin\psi\sin\psi^1$

4. $v_1 = \frac{1}{2}(a + c) + \frac{1}{2}(a - c)\cos(\psi - \psi^1)$

5. $v_2 = \frac{1}{2}(a + c) + \frac{1}{2}(a - c)\cos(\psi + \psi^1)$

Hieraus findet man unmittelbar die entsprechenden Formeln für die Strahlengeschwindigkeiten r_1 und r_2, wenn man statt a, b, c $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, statt ψ und ψ^1 die Winkel φ und φ^1 setzt, welche die gemeinsame Strahlenrichtung OM von r_1 und r_2 mit den secundären optischen Axen macht und v_1, v_2 durch $\frac{1}{r_1}$, $\frac{1}{r_2}$ ersetzt.

6. $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)\cos\varphi\cos\varphi^1$

$$7.\quad \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) \sin\varphi \sin\varphi^1$$

$$8.\quad \frac{1}{r_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) \cos(\varphi - \varphi^1)$$

$$9.\quad \frac{1}{r_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) \cos(\varphi + \varphi^1)$$

§. 6.

Die Gleichung des Ergänzungs-Ellipsoids E sei wie in §. 1 $S\frac{x_2}{a} = 1$ oder in elliptischen Coordinaten

$$1.\quad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{a-\beta} + \frac{z^2}{a-\gamma} = 1$$

Ersetzt man in 1.) a durch μ oder ν, so erhält man die Gleichung der confocalen Hyperboloide (μ) und (ν), welche sich im Punkt P auf E schneiden.

$$a > \mu > \gamma > \beta > \nu; \quad \beta = a - b, \quad \gamma = a - c.$$

Die beiden Halbaxen des Centralschnitts von E, welcher der durch P gehenden Tangential-Ebene von E parallel ist, sind $r_1 = \sqrt{a - \nu}$ und $r_2 = \sqrt{a - \mu}$; fällt man vom Mittelpunkt O ein Perpendikel auf diese Tangential-Ebene und bestimmt darauf die Punkte M und m so, daß $OM = r_1$ und $Om = r_2$ ist, so liegen diese Punkte auf der Wellenfläche. Man ziehe nun durch P die Normalen der drei Flächen E, (μ) und (ν) und trage darauf beiderseits die Strecken $\sqrt{a}$, $\sqrt{\mu}$, $\sqrt{\nu}$ ab, so erhält man die Axen für ein zweites Ellipsoid 𝔈, welches nach einem Satz von Chasles die yz-Ebene in O berührt und bei welchem der mit der yz-Ebene parallele Centralschnitt die Halbaxen $\sqrt{\beta}$ und $\sqrt{\gamma}$ hat; die erste ist parallel mit der y-Axe und die zweite parallel mit der z-Axe. Die große Axe von 𝔈 liegt auf der Normale von E; bestimmt man auf ihr zwei Punkte F und f durch die Gleichungen

$$2.\quad PF = \sqrt{a - \nu} \text{ und } Pf = \sqrt{a - \mu}$$

so sind F und f die Hauptbrennpunkte von 𝔈 (die Brennpunkte der durch die größe Axe gehenden Hauptschnitte). Bewegt man nun 𝔈 parallel mit sich selbst, so daß der Mittelpunkt P nach O versetzt wird, indem er die Gerade PO durchläuft, so werden die Punkte F und f mit M und m zusammen fallen, die große Axe von 𝔈 kommt in die Richtung eines Radius der Wellenfläche und der Centralschnitt von 𝔈, dessen Halbaxen $\sqrt{\beta}$ und $\sqrt{\gamma}$ sind, wird in die yz-Ebene kommen. Jedem Punkt P auf E entspricht ein anderes Ellipsoid 𝔈, welches ebenso wie das erste nach O versetzt werden kann; man erhält dadurch eine Schaar von Ellipsoiden, deren Mittelpunkt O ist, und deren große Halbaxe die constante Länge $\sqrt{a}$ hat; alle gehen durch die in der yz-Ebene construirte Ellipse mit den Halbaxen $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\gamma}$. Man hat also folgende neue Construction der Wellenfläche:

I. Die Hauptbrennpunkte aller Ellipsoide, welche einen Centralschnitt gemeinschaftlich haben und deren große Axe eine constante Länge hat, liegen auf einer Wellenfläche.

Man kann diesen Satz auch so aussprechen: Wenn eine feste Ellipse und eine concentrische Kugel, welche sie nicht schneidet, gegeben sind, so liegen die Hauptbrennpunkte aller concentrischen Ellipsoide, welche durch die Ellipse gehen und die Kugel berühren, auf einer Wellenfläche. Sind $\sqrt{\beta}$ und $\sqrt{\gamma}$ die Axen dieser Ellipse und $\sqrt{a}$ der Halbmesser der Kugel, so ist 1.) die Gleichung des Ellipsoids, aus welchem die Wellenfläche abgeleitet ist. Zieht man durch P die Tangential-Ebene von E in seiner zweiten Lage, so wird sie parallel der yz-Ebene sein:

II. Diejenigen Punkte der Ellipsoide in I., deren Tangential-Ebenen parallel mit dem gemeinschaftlichen Centralschnitt sind, liegen auf einem Ellipsoid.

Fällt die Gerade OfF oder die Richtung der großen Axe von E mit einer secundären optischen Axe zusammen, so fallen die Hauptbrennpunkte F und f auf einander und das erzeugende Ellipsoid E wird zu einem Rotations-Ellipsoid, dessen Halbaxen $\sqrt{a}$ und $\sqrt{\beta}$ sind. Bewegt sich P auf der Krümmungslinie (μ) von E, so ist μ also auch Of oder r_2 constant, mithin beschreibt f eine sphärische Curve, OfF einen Kegel, dessen Focal-Linien die secundären optischen Axen sind, die zweite Axe von E ist gleich $\sqrt{\mu}$, also auch constant. Der andere Hauptbrennpunkt beschreibt eine ellipsoidische Curve. Aehnliche Resultate erhält man, wenn sich P auf der Krümmungslinie (ν) bewegt:

III. Die großen Axen der Ellipsoide, die einen Centralschnitt gemeinschaftlich haben, und bei welchen die Längen der großen und mittleren (oder kleinen) Axe constant sind, liegen auf einem Kegel; die Hauptbrennpunkte liegen auf einem sphärischen und auf einem ellipsoidischen Kegelschnitt.

Durch Veränderung der Länge der zweiten Axe erhält man ein System von confocalen Kegeln; die Endpunkte der großen Axe beschreiben also confocale sphärische Kegelschnitte.

Aus Fig. 8 geht weiter hervor, daß wenn die große Axe dieser Ellipsoide den Kegel O_1OG beschreibt, dessen Basis der über O_1G als Durchmesser beschriebene Kreis ist (senkrecht zur Ebene der Figur), der Eine Hauptbrennpunkt diesen Kreis beschreibt (Zeitschrift von Schlömilch 2c. XXV. S. 346).

IV. Die Wellenfläche kann nach W. Roberts durch die Schnitte einer Reihe von confocalen Hyperboloiden mit concentrischen Kugeln erzeugt werden (anal. Geometrie des Raums von Salmon Fiedler, 3. Aufl. S. 331).

Die Gleichung 12) in §. 4.

$$3. \quad S\frac{x^2}{r - a} = 1$$

ist als diejenige der Wellenfläche angegeben worden, weil sie in Verbindung mit $Sx^2 = r$ auf die Gleichung 9.) in §. 4. führt. Nun stellt dieselbe auch ein System von confocalen Flächen vor, deren primäre Axe die z-Axe ist, und zwar von Hyperboloiden, da r^2 nicht größer als a und nicht kleiner als c werden kann. Für r größer als b erhält man ein einmantliges und für r kleiner als b ein zweimantliges Hyperboloid. Die Focalcurven dieses Systems sind für

$$r = a \text{ und } x = o \quad \frac{y^2}{a-b} + \frac{z^2}{a-c} = 1$$

$$r = b \text{ und } y = o \quad \frac{x^2}{b-a} + \frac{z^2}{b-c} = 1$$

$$r = c \text{ und } z = o \quad \frac{x^2}{c-a} + \frac{y^2}{c-b} = 1.$$

Durch Vergleichung mit den Formeln 6.), 7.), 8.) in §. 2 erkennt man, daß ihre Asymptoten mit den reellen und imaginären optischen Axen der Wellengeschwindigkeitsfläche übereinstimmen; insbesondere sind die Asymptoten der Focalhyperbel in der xz-Ebene die wahren optischen Axen und geht diese Curve durch die Endpunkte der secundären optischen Axen. Jede sphärische Curve der Wellenfläche liegt also auf einem Hyperboloid, und zwar diejenigen des äußern Mantels auf einem einmantligen und diejenigen des innern Mantels auf einem zweimantligen.

Schreibt man nun die Gleichung 3) in der Form

$$4. \quad \frac{x^2}{\lambda - \gamma} + \frac{y^2}{\lambda - \beta} + \frac{z^2}{\lambda} = 1 \qquad \lambda > \gamma > \mu > \beta > \nu$$

so stellt sie 3 confocale Flächen vor, wenn man λ durch μ oder ν ersetzt und es ist

λ oder μ oder $\nu = r - c$, $\beta = b - c$, $\gamma = a - c$.

Ist M der gemeinschaftliche Schnittpunkt dieser Confocalen, so ist nach der Theorie der elliptischen Coordinaten, wenn $OM = \sqrt{r}$ ist,

5. $r = \lambda + \mu + \nu - \beta - \gamma$ oder nach Einsetzung dieser Werthe

6. $\lambda + \nu = a + b - c$

7. $\lambda + \mu = a + b - c$

8. $\mu + \nu = a + b - c$

6.) ist die Gleichung des einen Mantels in elliptischen Coordinaten, 7.) diejenige des andern, während 8.) einen imaginären Ort bezeichnet. Da für ein constantes λ auch ν oder μ constant sind, so folgt daraus, daß die Hyperboloide (μ) und (ν), welche den Einen Mantel in einer sphärischen Curve schneiden, dem andern in einer von ihren Krümmungslinien begegnen, während dem das Ellipsoid (λ) jeden Mantel in einer von seinen Krümmungslinien trifft, welche zwei verschiedenen Systemen angehören.

Zur Veranschaulichung dient Fig. 6. Bei dem Ellipsoid (λ) sind drei Grenzfälle zu unterscheiden:

$\lambda = a$	$a + b - c$	b	$a - c$
$\lambda - \beta = a - b + c$	a	c	$a - b$
$\lambda - \gamma = c$	b	$-a + b + c$	o

1) Das Ellipsoid geht durch die Punkte A, C und C' und berührt also die Wellenfläche in der Ellipse AGO_2C; wenn die Axen sich vergrößern, so erhält man eine Reihe von Schnittcurven M''M''', MM' (unter welchen man sich jetzt Krümmungslinien zu denken hat), bis

2) das Ellipsoid durch die Punkte A, B, A' geht und die Wellenfläche in der Ellipse AHB berührt. Wenn sich aber umgekehrt vom ersten Grenzfall aus die Axen vermindern, so erhält man eine Reihe von Schnittcurven m'm''', mm'' (unter welchen man sich ebenfalls Krümmungslinien zu denken hat) auf dem innern Mantel, bis

3) das Ellipsoid durch die Punkte B, C, B' geht und die Wellenfläche in der Ellipse BiC berührt. Ist $-a+b+c<o$, so tritt der dritte Grenzfall schon ein, wenn $\lambda-\gamma=o$ ist und das Ellipsoid wird zu der Ellipse $\lambda=a-c$ und $\lambda-\beta=a-b$.

Durch die Krümmungslinie $JMM'O_1$ geht also sowohl ein Ellipsoid (λ), als auch ein Hyperboloid (ν), somit ist sie eine Krümmungslinie der zweiten Art, und letztere Fläche schneidet den innern Mantel der Wellenfläche zugleich in einer sphärischen Curve, die aber nicht mit $imm'o_1$ zusammenfällt. Durch die Krümmungslinie gmm''h geht ein Ellipsoid (λ) und ein Hyperboloid (μ), somit ist sie eine Krümmungslinie der ersten Art und letztere Fläche schneidet den äußern Mantel der Wellenfläche zugleich in einer sphärischen Curve, verschieden von GM''MH.

II. Abschnitt. Anwendung auf die Theorie der Trägheitsmomente und auf das Ellipsoid.

§. 1.

O sei der Schwerpunkt eines Körpers, durch welchen die Hauptträgheitsaxen x, y, z gehen und denen die Hauptträgheitsradien, deren Quadrate $a>b>c$ sind, entsprechen. M ist ein Punkt im Innern des Körpers, $OM=\sqrt{r}$, $x^2+y^2+z^2=r^2$, dann sind die drei Wurzeln der in k cubischen Gleichung

$$1)\qquad \frac{(k-a)x^2}{r-(k-a)}+\frac{(k-b)y^2}{r-(k-b)}+\frac{(k-c)z^2}{r-(k-c)}=0$$

oder, wenn man $x^2+y^2+z^2=r$ addirt,

$$2)\qquad \frac{x^2}{r-(k-a)}+\frac{y^2}{r-(k-b)}+\frac{z^2}{r-(k-c)}=1$$

die Quadrate der Hauptträgheitsradien von M, deren Richtungen die Normalen der drei durch M gehenden confocalen Flächen des Grundellipsoids

$$3)\qquad \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1$$

sind. Wenn k constant und $>a$ ist, so sind 1) und 2) die Gleichungen einer Wellenfläche W_k, welche von dem Ellipsoid

$$4)\qquad \frac{x^2}{k-a}+\frac{y^2}{k-b}+\frac{z^2}{k-c}=1$$

abgeleitet ist, indem man auf den Centralschnitten desselben Perpendikel errichtet gleich ihren Halbaxen. Also liegen alle Punkte M, für welche ein Hauptträgheitsradius constant ist, auf W_k. Ist auch r constant, so ist 2) eine der mit 3) confocalen Flächen, die W_k in einer sphärischen Curve schneiden und deren Gleichungen

$$5)\qquad \frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\lambda-(a-b)}+\frac{z^2}{\lambda-(a-c)}=1$$

sein sollen. (λ) ist das Ellipsoid, (μ) und (ν) sind die beiden Hyperboloide; es ist also nach 2) und 5) λ oder μ oder $\nu=r-(k-a)$ und da nach der Theorie der elliptischen Coordinaten $r=\lambda+\mu+\nu-(a-b)-(a-c)$ ist, so muß entweder

6) $$\lambda + \nu = k + a - b - c$$
oder
7) $$\lambda + \mu = k + a - b - c$$
sein. 6) ist die Gleichung des äußern Mantels von W_k und 7) diejenige des innern in elliptischen Coordinaten. Weil für ein constantes λ entweder ν oder μ ebenfalls constant ist, so folgt daraus, daß die Hyperboloide (μ) und (ν), welche den Einen Mantel in einer sphärischen Curve schneiden, dem andern in einer von ihren Krümmungslinien begegnen, während die Ellipsoide (λ) die Wellenfläche nicht in sphärischen Curven, sondern nur den einen oder den andern Mantel in einer von ihren Krümmungslinien treffen, welche verschiedenen Systemen angehören. Da die Gleichung 1) auch die confocalen Kegel repräsentirt, die W_k in den sphärischen und ellipsoidischen Linien schneiden, so müssen diese letzteren zugleich Krümmungslinien der Confocalen 2) oder 5) sein. Durch M geht eine ellipsoidische Linie von W_k; weil sie zugleich eine Krümmungslinie von (λ) ist, so giebt ihre Tangente die Richtung eines Hauptträgheitsradius von M an, und da für alle Punkte M auf W_k Ein Hauptträgheitsradius constant ist, so folgt weiter:

Die Tangenten der ellipsoidischen Linien einer Wellenfläche geben die Richtungen der constanten Trägheitsradien an.

Man kann diesen Satz auch so beweisen:

Die Quadrate der Hauptträgheitsradien im Punkte M, durch welchen die Confocalen (λ), (μ), (ν) gehen, sind
$$r + a - \lambda, \quad r + a - \mu, \quad r + a - \nu,$$
welche der Reihe nach die Richtung von den Normalen dieser Flächen haben, oder mit Benützung des obigen Werthes von r
$$\mu + \nu - a + b + c, \quad \lambda + \nu - a + b + c, \quad \lambda + \mu - a + b + c;$$
nach 6) ist also für den äußern Mantel der nach der Normale von (μ) gerichtete, und nach 7) für den innern Mantel der nach der Normale von (ν) gerichtete Hauptträgheitsradius constant.

OO_1 sei die wahre und OO_2 die secundäre optische Axe von W_k; in dem Cuspidalpunkte O_2 schneiden sich zwei ellipsoidische Linien, eine vom äußern und eine vom innern Mantel; die Gleichungen von OO_2 sind

8) $$y = 0, \quad \frac{z^2}{x^2} + \frac{(k - a)\ (c - b)}{(k - c)\ (a - b)} = 0.$$

Die Coordinaten von O_2 entsprechen der Relation $x^2 + z^2 = k - b$; eliminirt man hieraus und aus 8) k, so findet man

9) $$y = 0, \quad \frac{x^2}{a - b} - \frac{z^2}{b - c} = 1.$$

Die Gleichungen von OO_1 sind

10) $$y = 0, \quad \frac{z^2}{x^2} + \frac{c - b}{a - b} = 0,$$

d. h.:

Die Wellenflächen W_k, von denen jede einem bestimmten Werth $\sqrt{k}$ des einen Hauptträgheitsradius ihrer Punkte entspricht, haben dieselbe Richtung für ihre wahren optischen Axen, nämlich die Asymptote der Focalhyperbel von den confocalen Flächen des Grundellipsoids; die Endpunkte ihrer secundären optischen Axen liegen auf dieser Focalhyperbel.

Im Punkte O_2 schneiden sich zwei ellipsoidische Linien, also sind hier zwei Hauptträgheitsradien gleich. Somit hat man den Satz von Binet: Die Focalkegelschnitte sind die Orte im Raume, für welche zwei der Hauptträgheitsmomente eines festen Körpers unter einander gleich sind (Journal de l'éc. polyt. XVI), oder von Ampère, welcher sie als den Ort der Punkte eines Körpers von unendlich vielen permanenten Rotationsaxen angiebt.

O_1G sei die gemeinsame Tangente des Kreises und der Ellipse, in welchen W_k die xz-Ebene schneidet, so ist

$$O_1G^2 = \frac{(a-b)\ (b-c)}{k-b},$$

somit ist, da $OO_1 = \sqrt{k-b}$, $OO_1 \,.\, O_1G = \sqrt{(a-b)\ (b-c)}$ also constant, für alle Wellenflächen W_k, d. h. die Punkte G liegen auf einer gleichseitigen Hyperbel, deren Eine Asymptote OO_1 und deren große Halbaxe $= \sqrt[4]{4\,(a-b)\,b-c)}$ ist. O_1G sind die Durchmesser der singulären Berührungskreise der Flächen W_k, welche auf der xz-Ebene senkrecht stehen. M sei ein Punkt auf der Peripherie eines solchen Kreises und MH senkrecht auf der xz-Ebene; setzt man $OO_1 = \mathfrak{z}$, $MH = \mathfrak{y}$, $O_1H = \mathfrak{x}$, so ist

$$11)\qquad \frac{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2}{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{z} = \sqrt{(a-b)\ (b-c)}$$

die Gleichung der Fläche, auf welcher die verschiedenen singulären Kreise der Wellenfläche W_k liegen. Betrachtet man O_1 als Pol der Focalhyperbel, so ist die durch G mit OO_1 gezogene Parallele die Polare. Chasles hat in dem Aperçu historique, Note XXXI, 56, den Satz angegeben: „Wenn man von einem Punkte einer Hauptebene confocaler Flächen auf dieselben Normalen fällt, so liegen diese in zwei Ebenen, wovon die zweite senkrecht ist zur Hauptebene; die Fußpunkte der letzteren bilden einen Kreis, dessen Durchmesser das von dem Punkte auf seine Polare hinsichtlich des in der Hauptebene liegenden Focalkegelschnitts gefällte Perpendikel ist.“ Liegt also M auf dem Kreise, dessen Durchmesser O_1G, so ist O_1M senkrecht auf dem durch M gehenden confocalen Hyperboloid; da aber durch M auch eine ellipsoidische Linie von W_k geht, welche zugleich Krümmungslinie des durch M gehenden confocalen Ellipsoids ist, so ist O_1M zugleich Tangente der ellipsoidischen Linie und somit die Richtung eines für alle Punkte M auf dem Kreise constanten Trägheitsradius. Die beiden anderen Hauptträgheitsaxen von M treffen die durch G gezogene Polare. Das Vorhergehende läßt sich so zusammenfassen:

Die von den einzelnen Punkten der Asymptote der Focalhyperbel des Grundellipsoids auf ihre Polaren hinsichtlich dieser Hyperbel gefällten Perpendikel sind die Durchmesser von Kreisen, die auf der Asymptote senkrecht stehen; für alle Punkte auf der Peripherie eines solchen Kreises giebt die Sehne, welche nach dem auf der Asymptote liegenden Endpunkte des Durchmessers gezogen wird, die Richtung des constanten Hauptträgheitsradius an; die beiden anderen Hauptträgheitsaxen schneiden die durch den andern Endpunkt gehende Polare.

Unter den drei Hauptträgheitsradien von einem beliebigen Punkte M im Innern eines Körpers ist also immer Einer ausgezeichnet, entweder der mittlere, wenn M auf dem äußern, oder der größte, wenn M auf dem innern Mantel

der betreffenden Fläche W_k liegt. In jedem Falle geht durch M eine ellipsoidische Linie, die auf einem Kegel liegt, dessen Spitze der Schwerpunkt O ist und dessen Focallinien die secundären optischen Axen dieser Wellenfläche sind [8)]; also bildet die durch OM und den ausgezeichneten Trägheitsradius, welcher eine Tangente des Kegels ist, gelegte Ebene mit den beiden durch OM und die secundären optischen Axen gelegten Ebenen gleiche Winkel, oder:

Construirt man mit dem Werthe k des mittleren oder größten Hauptträgheitsradius eines Punktes M die beiden Axen 8), verbindet M mit dem Schwerpunkte O und legt durch OM und diese Axen zwei Ebenen, so wird eine dritte durch OM und den betreffenden Hauptträgheitsradius gehende Ebene den einen der von den zwei ersten Ebenen gebildeten Winkel halbiren. Hat zugleich die Verbindungslinie OM eine constante Länge, so ist auch die Summe oder Differenz der Winkel constant, die sie mit den Axen 8) einschließt.

§. 2.

Eine weitere Verwendung findet die Wellenfläche, wenn man ihre Beziehungen untersucht zu dem Complex von Geraden, durch welche sich an ein Ellipsoid rectanguläre Tangentialebenen legen lassen. Mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen sei der Punkt M die Spitze eines Kegels, welcher eine der confocalen Flächen (λ') des Grundellipsoids 3), deren Gleichungen in 5) angegeben sind, berührt, so wird

$$12)\qquad \frac{\xi^2}{\lambda-\lambda'}+\frac{\eta^2}{\mu-\lambda'}+\frac{\zeta^2}{\nu-\lambda'}=0$$

die Gleichung dieses Kegels sein. Die Normalen von den drei Confocalen (λ), (μ), (ν), die sich in M schneiden, sind die Axen der ξ, η, ζ. Zwei Erzeugende des Kegels, welche in der Ebene $\xi\zeta$ liegen, MN und MP [N und P sind die Berührungspunkte auf (λ')], entsprechen der Relation

$$13)\qquad \eta=0,\quad \frac{\xi}{\zeta}=\pm\sqrt{\frac{\lambda-\lambda'}{\lambda'-\nu}}.$$

Bewegt sich M auf der Krümmungslinie $\nu=$ const. auf (λ)', so ist $\frac{\xi}{\zeta}$ ebenfalls constant, d. h.:

Durch eine Tangente der Krümmungslinie eines Ellipsoids lege man zwei Ebenen, welche ein confocales Ellipsoid berühren, so ist der Winkel zwischen diesen beiden Ebenen von constanter Größe. (Mannheim, From the proceedings of the royal society, 16. Juni 1881.)

Setzt man in 13) $\frac{\xi}{\zeta}=\pm 1$ oder $2\lambda'=\lambda+\nu$, so ist der Winkel zwischen beiden Tangentialebenen ein rechter, und wenn man mit Rücksicht auf 6) $2\lambda'=k+a-b-c$ setzt, so erhält man das andere Theorem von Mannheim: Die Spitzen der Berührungskegel eines Ellipsoids (λ'), bei welchen die beiden Erzeugenden Eines Hauptschnittes rechtwinklig zu einander sind, liegen auf einer Wellenfläche. Da die Normalen von (λ') in den Berührungspunkten N und P rechtwinklig auf den beiden Tangentialebenen stehen, so liegen sie in der Ebene des Winkels NMP und schneiden sich also in einem Punkte F. Daher giebt Mannheim seinem Satze (den er auf kinematischem Wege bewiesen hat)

nach folgende Form: Bewegt sich ein rechter Winkel, dessen Schenkel ein Ellipsoid berühren, so, daß die Normalen des Ellipsoids (in einem Punkte F) sich schneiden, so beschreibt die Spitze M des Winkels eine Wellenfläche, deren Normale MF ist. F ist der Focus der Ebene des Winkels, denn für eine unendlich kleine Bewegung der Ebene des Rechtecks MNFP sind die Tangenten der von den Punkten N und P beschriebenen Trajectorien senkrecht zu NF und PF, also ist F ein momentaner Drehungspunkt; somit sind die Tangenten der Trajectorien aller Punkte der Ebene senkrecht zu ihren Verbindungslinien mit F, d. h. MF ist die Normale der Wellenfläche in M.

Die Gleichung der Confocalen (λ')

$$14)\quad \frac{x^2}{\frac{1}{2}(k+a-b-c)} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}(k-a+b-c)} + \frac{z^2}{\frac{1}{2}(k-a-b+c)} = 1$$

zeigt, daß dieselbe unter der Voraussetzung $k > a$ entweder ein Ellipsoid oder ein einmantliges Hyperboloid ist. Zu jedem einem bestimmten Werthe von k entsprechenden constanten Trägheitsradius gehört eine bestimmte Fläche (λ') [14)], die durch denselben an (λ') gelegten Tangentialebenen berühren diese Fläche in zwei Punkten, deren Normalen sich schneiden. Da durch jeden Punkt M der Wellenfläche sowohl eine ellipsoidische, als auch eine sie rechtwinklig schneidende sphärische Linie geht, so enthält die durch OM und die Tangente der ersteren gehende Ebene die Normale MF der Wellenfläche, welche als Diagonale des Rechtecks MNFP die Sehne NP halbirt. Hieraus folgt also der Satz:

Die durch den Schwerpunkt und den constanten Trägheitsradius bestimmte Ebene schneidet die Ebene des kleinsten und größten Trägheitsradius, wenn der Punkt auf dem äußern Mantel liegt, oder des kleinsten und mittlern, wenn er auf dem innern Mantel liegt, in der Normale der Wellenfläche.

Die Halbirungslinie des Winkels NMP giebt die Richtung des kleinsten die seines Nebenwinkels die Richtung des größten oder mittleren Trägheitsradius an.

Wenn $mx^2 + ny^2 + pz^2 = 0$ die Gleichung eines Kegels, auf seine Axen bezogen, ist, so ist die Gleichung eines zweiten Kegels, durch dessen Mantellinien sich rectanguläre Tangentialebenen an den ersten legen lassen, auf dieselben Axen bezogen

$$m(n+p)x^2 + n(p+m)y^2 + p(m+n)z^2 = 0.$$

Wenn man dies auf den Kegel 12) anwendet, so findet man

$$15)\quad (\mu + \nu - 2\lambda')\xi^2 + (\nu + \lambda - 2\lambda')y^2 + (\lambda + \mu - 2\lambda')\zeta^2 = 0$$

für die Gleichung eines Kegels, dessen Spitze ($\lambda\mu\nu$) ist und durch dessen Mantellinien sich rectanguläre Tangentialebenen an den Kegel 12) und somit auch an das Ellipsoid (λ') ziehen lassen. Betrachtet man in 15) λ' als constant, die übrigen Größen als veränderlich, so stellt sie alle Complexgeraden, durch die sich an ein Ellipsoid rectanguläre Tangentialebenen legen lassen, vor. Setzt man in 15) $\lambda + \nu = 2\lambda'$ oder $\lambda + \mu = 2\lambda'$, so verwandelt sich diese Gleichung in

$$16)\quad \frac{\xi}{\zeta} = \pm\sqrt{\frac{\mu-\nu}{\lambda-\mu}}$$

oder

$$17)\quad \frac{\xi}{\eta} = \pm\sqrt{\frac{\nu-\mu}{\lambda-\nu}},$$

d. h. der Kegel 15) degenerirt in beiden Fällen in zwei Ebenen, welche in 16) reell und in 17) imaginär sind. Durch Vergleichung mit 6), 7) und 14)

ergiebt sich, daß im ersten Falle die Spitze des Kegels auf dem äußern und im zweiten Falle auf dem innern Mantel von W_k liegt.

Alle Complexgeraden des Systems, welche durch einen Punkt der Wellenfläche gehen, liegen demnach in zwei Ebenen, die sich in der Tangente der ellipsoidischen Linie schneiden und mit der Normale des confocalen Ellipsoids (λ) gleiche Winkel bilden. Liegt der Punkt auf dem äußern Mantel, so sind die Ebenen, also auch die Complexgeraden, reell; liegt er aber auf dem innern Mantel, so sind die Ebenen imaginär, nur ihr Durchschnitt ist reell. Also giebt es für einen Punkt des innern Mantels nur Eine Gerade, nämlich die Tangente der ellipsoidischen Linie, durch welche sich an das Ellipsoid (λ') rectanguläre Tangentialebenen legen lassen.

Die Spitzen sämmtlicher rectangulären Trieder, welche sich um das Ellipsoid (λ') beschreiben lassen, liegen nach 14) auf der Kugel, deren Halbmesser $= \sqrt{\frac{1}{2}(3\,k - a - b - c)}$ ist. Diese Kugel werde von einer Ebene L in einem Kreise K geschnitten; die Projection von (λ') auf L ist eine concentrische Ellipse E; alle Complexgeraden oder Triederkanten, welche in L liegen, bilden Sehnen von K; errichtet man auf denselben in ihren Endpunkten Senkrechte, so werden diese E berühren, also sind die Complexgeraden Tangenten eines concentrischen und mit E coaxialen Kegeschnittes, welcher eine Ellipse oder Hyperbel ist, je nachdem die große Axe von E kleiner oder größer, als der Durchmesser von K. Sind α und β die Halbaxen von E und ist r der Halbmesser von K, so sind $\sqrt{r^2 - \beta^2}$ und $\sqrt{r^2 - \alpha^2}$ die Halbaxen des Kegelschnittes, dessen Tangenten Complexgerade bilden. Bewegt man also L parallel mit sich selbst, so bleiben α und β constant und man erhält ein System von confocalen Kegelschnitten, wozu auch E gehört, deren gemeinsame Brennpunkte wir mit A und B bezeichnen. Im Grenzfalle, wenn E und K sich berühren, degenerirt der Kegelschnitt in die Gerade AB und alle Complexgeraden, welche dieser speciellen Lage von L entsprechen, gehen sowohl durch A, als durch B; somit liegen diese zwei Punkte auf dem äußern Mantel der Wellenfläche W_k. In AB selbst fallen zwei Complexgerade zusammen, welche außer den Punkten A und B noch einem dritten Punkte C zwischen A und B auf dem innern Mantel angehören. Dies geht auch aus folgender Betrachtung hervor:

Auf jeder Ebene L liegen zwei bestimmte Punkte A und B, nämlich die Brennpunkte von E; wird L parallel mit sich selbst bewegt, so durchlaufen A und B zwei auf L senkrechte Gerade; jeder Lage von L gehört einer von den confocalen Kegelschnitten an, dessen Tangenten Complexgerade sind, so lange die Ebene L nicht außerhalb der Wellenfläche W_k ist, in welchem Falle sie keine Complexgerade enthält. Berührt L den äußern Mantel von W_k, so ist die Eine Axe der confocalen Kegelschnitte, welche durch die Mitte von AB senkrecht zu dieser Geraden geht, die einzige Complexgerade von L; sie ist im Berührungspunkte zugleich Tangente der ellipsoidischen Linie von W_k und also eine singuläre Linie des Complexes, weil sie die Grenzfläche W_k oder die Singularitätenfläche des ganzen Complexes in einer ellipsoidischen Linie berührt. Schneidet L den äußern Mantel, ohne den innern zu treffen, so sind die Tangenten einer der confocalen Hyperbeln Complexgerade, worunter zwei singuläre in den Berührungspunkten der Hyperbel mit der Durchschnittscurve von L und W_k. Berührt L den innern Mantel in C, so geht durch C nach dem Obigen nur Eine Complexgerade, welche zugleich Tangente der ellipsoidischen Linie oder Normale des durch

C gehenden Hyperboloids (ν), also singuläre Linie ist. C liegt deswegen auf AB, welche Gerade als Grenzlinie der confocalen Hyperbeln anzusehen ist. Durch die Punkte A und B, die auf dem äußern Mantel liegen, gehen unendlich viele Complexgerade, worunter zwei singuläre (außer der Geraden AB) als Tangenten der ellipsoidischen Linien in A und B. Die Ebene L entspricht in dieser Lage für den Punkt A der Gleichung 16) und steht senkrecht auf einer Focallinie des Tangentialkegels 12). Schneidet L beide Mäntel von W_k, so sind die Complexgeraden Tangenten einer der confocalen Ellipsen, welche sowohl die Durchschnittscurve auf dem äußern, als auch auf dem innern Mantel berührt, und zwar in je zwei Punkten, durch welche also im Ganzen vier singuläre Linien gehen.

Diese Resultate, welche hier durch einfache geometrische Betrachtungen abgeleitet sind, hat Painvin (Nouv. Annales, 1872) ausführlich auf analytischem Wege entwickelt. Sie lassen sich auch auf die Lehre von den constanten Trägheitsradien anwenden, deren Richtungen als Tangenten von ellipsoidischen Linien mit den singulären Linien zusammenfallen. Man erhält dann den Satz:

In einer Ebene L im Innern eines Körpers liegen vier gleiche Hauptträgheitsradien, welche einem bestimmten Hauptträgheitsmomente k entsprechen, wenn L beide Mäntel der nach diesem Werthe von k abgeleiteten Wellenfläche W_k schneidet. Berührt L den innern Mantel, so fallen zwei von diesen vier Trägheitsradien in der Berührungslinie zusammen; schneidet die Ebene nur den äußern Mantel, so enthält sie zwei Trägheitsradien und im Falle der Berührung Einen von dem Werthe k. Alle anderen außerhalb W_k liegenden Ebenen enthalten keinen solchen Hauptträgheitsradius.

Betrachtet man die Normale einer durch O parallel mit L gelegten Ebene als Axe der $\mathfrak{z}$, zieht in derselben durch O Parallelen mit den Axen der confocalen Kegelschnitte, welche die Axen der $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ sein sollen, so erhält man für die Fläche, auf welcher bei einer parallelen Bewegung von L diese Kegelschnitte liegen, für dieses neue Coordinatensystem die Gleichung

$$18)\qquad \frac{\mathfrak{x}^2}{R^2-\beta^2-\mathfrak{z}^2}+\frac{\mathfrak{y}^2}{R^2-\alpha^2-\mathfrak{z}^2}=1.$$

R ist der Halbmesser der Kugel, auf welcher die Spitzen der um (λ') beschriebenen rectangulären Trieder liegen, also ist nach 14)

$$R^2=\tfrac{1}{2}(3\,k-a-b-c).$$

Hat die $\mathfrak{z}$-Axe die Richtung der wahren optischen Axe von W_k, welche zugleich die Axe des um (λ') beschriebenen Rotationscylinders ist, so wird $\alpha^2=\beta^2=\frac{1}{2}(k-a+b-c)$ und die Gleichung 18) verwandelt sich in

$$19)\qquad \mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2=k-b.$$

Legt man durch eine nicht zum Complex gehörende Gerade Ebenen, so bilden die in denselben enthaltenen Complexkegelschnitte die zur Geraden gehörige Complexfläche, demnach sind 18) und 19) die Gleichungen von solchen Flächen, welche unendlich fernen Geraden entsprechen. In dem speciellen Falle 19), wo L senkrecht auf der wahren optischen Axe steht, degeneriren die confocalen Kegelschnitte in ein System von concentrischen Kreisen.

Für eine bestimmte Normale von L sind drei besondere Lagen dieser Ebene zu unterscheiden, L_0, L_1 und L_2; im ersten Falle geht sie durch den Mittelpunkt O, im zweiten berührt sie den innern Mantel in C und dann liegen die Brenn-

punkte A und B auf dem äußern Mantel, im dritten Falle endlich berührt sie den äußern Mantel in C'. Fällt man von O ein Perpendikel OD auf die Ebene L_1, so ist

20) $$OD = \frac{\pi + \pi''}{\lambda - \nu}.$$

π, π', π'' sind die Producte der Halbaxen von den drei confocalen Flächen (λ), (μ), (ν) [5)], die sich in A schneiden; wenn ε der Winkel ist zwischen AB und der Normale von (ν), so ist nach 16) $\operatorname{tg}\varepsilon = \sqrt{\frac{\mu - \nu}{\lambda - \mu}}$, also $\sin\varepsilon = \sqrt{\frac{\mu - \nu}{\lambda - \nu}}$, $\cos\varepsilon = \sqrt{\frac{\lambda - \mu}{\mu - \nu}}$; bezeichnet man ferner die Abstände der Tangentialebenen dieser Flächen von O mit P, P', P'', so ist $P = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda - \mu}\sqrt{\lambda - \nu}}$, $P'' = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda - \nu}\sqrt{\mu - \nu}}$, $OD = P\cos\varepsilon + P''\sin\varepsilon$, woraus sich die Relation 20) ergibt. Da sie μ nicht enthält, so ist OD constant, wenn λ und ν constant bleiben, d. h.:

Die durch die Tangenten einer ellipsoidischen Linie des äußern Mantels einer Wellenfläche an den innern gelegten Tangentialebenen berühren eine concentrische Kugel.

Der Halbmesser des Kreises K, in welchem die Kugel, auf der die Spitzen der um (λ') beschriebenen retangulären Trieder liegen, von der Ebene L geschnitten wird, ist $\sqrt{R^2 - OD^2}$ und die Halbaxen des in L liegenden Complexkegelschnittes sind $\sqrt{R^2 - OD^2 - \alpha^2}$ und $\sqrt{R^2 - OD^2 - \beta^2}$; α und β sind die Halbaxen der Projection E von (λ') auf L. Für L_1 wird $R^2 - OD^2 = \alpha^2$ und für L_2 $R^2 - OD^2 = \beta^2$; im ersten Falle ist K der über der großen Axe von E, im zweiten der über der kleinen Axe als Durchmesser beschriebene Kreis. Ist für L_1 OD constant, so muß es auch α sein, und ist für L_2 OD constant, so muß auch β constant bleiben. Mit Beziehung auf das Vorhergehende hat man nun den Satz:

Die Projectionen eines Ellipsoids (λ') auf den Tangentialebenen einer Wellenfläche Wk sind Ellipsen, deren Axenkreise auf einer concentrischen Kugel liegen. Für eine Tangentialebene des innern Mantels liegen die Brennpunkte der Projectionen auf dem äußern Mantel und der große Axenkreis liegt auf der Kugel, während bei einer Tangentialebene des äußern Mantels dies beim kleinen Axenkreise stattfindet. Im ersten Falle geht die große Axe durch den Berührungspunkt und gibt hier die Polarisationsrichtung für den betreffenden Lichtstrahl an, im zweiten geht die kleine Axe durch den Berührungspunkt, wo sie gleichfalls mit der Polarisationsrichtung übereinstimmt. Berührt die Tangentialebene des innern Mantels zugleich eine concentrische Kugel, so beschreiben die beiden Brennpunkte der Projection ellipsoidische Linien der Wellenfläche oder, was dasselbe ist, Krümmungslinien von Ellipsoiden, und die große Axe der Projection ist constant. Bei den Tangentialebenen des äußern Mantels, die eine concentrische Kugel berühren, ist die kleine Axe constant.

Dieser Satz läßt sich auch in anderer Form aussprechen, wodurch man eine neue Construction sowohl der Wellenfläche, als auch ihrer Fußpunktfläche, der Wellengeschwindigkeitsfläche, erhält, und wobei das Ellipsoid (λ'), welches aus dem Ergänzungsellipsoid 4) abgeleitet ist, zu Grunde liegt:

Die beiden coaxialen Rotationscylinder, welche dem Berührungscylinder eines Ellipsoids (λ') um- und einbeschrieben sind, schneiden die Kugel, auf welcher die Spitzen der um (λ') beschriebenen retangulären Trieder liegen, in zwei Kreisen, deren Mittelpunkte auf der Wellengeschwindigkeitsfläche von W_k liegen und deren Ebenen die Wellenfläche W_k selbst berühren. Der Durchschnitt des Berührungscylinders mit der Ebene des größeren Kreises ist eine Ellipse E, deren große Axe den innern Mantel in einer ellipsoidischen Linie berührt und deren Brennpunkte auf dem äußern Mantel der Wellenfläche liegen, während die kleine Axe des Durchschnitts mit der Ebene des kleinen Kreises den äußern Mantel in einer ellipsoidischen Linie berührt.

Die Durchschnittscurve des Berührungscylinders mit der Kugel hat drei zu einander senkrechte Symmetralebenen; ihre Projection auf der ersten, senkrecht zur Cylinderaxe, ist die Ellipse E, während sie sich auf den zwei anderen als Ellipsen- und Hyperbelbogen projicirt. Betrachtet man die Cylinderaxe als gewöhnlichen (unpolarisirten) Lichtstrahl, so stellt sie die Bahncurve eines Äthertheilchens vor. In einem zweiaxigen Krystalle dagegen sind die Verbindungslinien ihrer höchsten und tiefsten Punkte (welche in der zweiten und dritten Symmetralebene liegen) die Polarisationsrichtungen der Äthertheilchen in den beiden parallelen Tangential- oder Wellenebenen L_1 und L_2.

Bezeichnet man die Quadrate der Abstände des Mittelpunktes O von L_1 und L_2 mit v_1 und v_2 und ihre Richtungscosinus mit l, m, n, so sind v_1 und v_2 die Wurzeln der Gleichung $\frac{l^2}{k-a-v}+\frac{m^2}{k-b-v}+\frac{n^2}{k-c-v}=0$, d. h. der Fußpunktfläche von W_k, oder von

$$21)\quad \begin{aligned} & l^2(k-b-v)(k-c-v) \\ & + m^2(k-c-v)(k-a-v)+n^2(k-a-v)(k-b-v)=0. \end{aligned}$$

Ferner ist $\alpha^2 = R^2 - v_1$ und $\beta^2 = R^2 - v_2$. Für die Quadrate der Abstände der Mittelpunkte beider Kreise von den Berührungspunkten der Wellenfläche auf der großen und kleinen Axe der beiden Ellipsen hat man die Werthe

$$\frac{(k-a-v_1)(k-b-v_1)(k-c-v_1)}{v_1(v_2-v_1)},\quad \frac{(k-a-v_2)(k-b-v_2)(k-c-v_2)}{v_2(v_1-v_2)}.$$

Die Halbaxen des Complexkegelschnittes einer Ebene L im Abstande $\mathfrak{z}$ von O sind $\sqrt{R^2-\mathfrak{z}^2-\beta^2}$ und $\sqrt{R^2-\mathfrak{z}^2-\alpha^2}$. Man ziehe an denselben zwei Tangenten, die sich unter einem rechten Winkel in G schneiden, so liegt dieser Punkt auf dem Kreise, dessen Halbmesser $=\sqrt{2R^2-2\mathfrak{z}^2-\alpha^2-\beta^2}$; $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ seien die Coordinaten von G in Beziehung auf die Axen α und β, so ist $\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2 = 2R^2 - 2\mathfrak{z}^2 - \alpha^2 - \beta^2$ oder

$$22)\quad \frac{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}{v_1+v_2}+\frac{\mathfrak{z}^2}{\frac{1}{2}(v_1+v_2)}=1.$$

G ist die Spitze einer vierseitigen Pyramide, deren Seitenflächen auf einander senkrecht stehen und (λ') berühren. Bleibt die Normale von L unveränderlich, so

sind l, m, n und somit auch v_1 und v_2 constant, also liegt G auf dem abgeplatteten Drehungsellipsoid 22). Aus 21) folgt

$$v_1 + v_2 = l^2(2k - b - c) + m^2(2k - c - a) + n^2(2k - a - b).$$

Ist G' der Endpunkt der z-Axe des Ellipsoids 22) und sind x, y, z die Coordinaten von G' in Beziehung auf die Axen von (λ'), so ist $\frac{1}{2}(v_1 + v_2) = x^2 + y^2 + z^2$, somit

$$23)\quad (x^2+y^2+z^2)^2 = x^2\left(k - \frac{b+c}{2}\right) + y^2\left(k - \frac{c+a}{2}\right) + z^2\left(k - \frac{a+b}{2}\right).$$

Dieß ist die Fußpunktfläche des Ellipsoids

$$24)\qquad \frac{x^2}{k - \frac{b+c}{2}} + \frac{y^2}{k - \frac{c+a}{2}} + \frac{z^2}{k - \frac{a+b}{2}} = 1.$$

Setzt man in den Werthen $\sqrt{R^2 - z^2 - \beta^2}$ und $\sqrt{R^2 - z^2 - \alpha^2}$ der Halbaxen des Complexkegelschnittes von L $v_1 = R^2 - \alpha^2$ und $v_2 = R^2 - \beta^2$, $z^2 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$, so erhält man $\sqrt{\frac{1}{2}(v_2 - v_1)}$ und $\sqrt{\frac{1}{2}(v_1 - v_2)}$, also ist der Complexkegelschnitt von L, wenn diese Ebene durch G' geht, eine gleichseitige Hyperbel, woraus folgt:

Die Ebenen derjenigen Complexkegelschnitte eines Ellipsoids (λ') [14)], welche gleichseitige Hyperbeln sind, berühren ein zweites Ellipsoid 24).

Hieraus folgt ferner, da die Asymptoten dieser Hyperbeln Complexgerade sind:

Die Spitzen der um ein Ellipsoid (λ') beschriebenen vierseitigen Pyramiden, deren Gegenseiten paarweise auf einander senkrecht stehen und sich in zwei retangulären Geraden schneiden in einer Ebene senkrecht zum Halbmesser, liegen auf der Fußpunktfläche eines zweiten Ellipsoids 24).

Der Complexkegel 15), dessen Spitze ($\lambda\mu\nu$) ist, berührt beide Mäntel von W_k oder blos den innern, und zwar je in zwei Punkten, je nachdem seine Spitze außerhalb des äußern Mantels oder zwischen beiden Mänteln sich befindet. Die nach den Berührungspunkten gehenden Erzeugenden des Kegels sind Richtungen von constanten Hauptträgheitsradien, wodurch man einen dem obigen, sich auf die Hauptträgheitsradien in einer Ebene beziehenden, analogen Satz für solche Radien, die durch einen Punkt gehen, erhält.

§. 3.

Das Grundellipsoid 3), welches aus den drei Hauptträgheitsradien $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ für den Punkt O als Schwerpunkt eines Körpers construirt ist, gehört zum System der confocalen Flächen (λ), (μ), (ν) der Gleichung 5), deren Focalellipse durch die Relationen

$$25)\qquad z = 0,\quad \frac{x^2}{a - c} + \frac{y^2}{b - c} = 1$$

bestimmt ist. Zieht man in einem Punkte M oder ($\lambda\mu\nu$) die Normalen dieser drei Flächen und trägt darauf von M aus beiderseits Strecken ab gleich λ, μ und ν, so erhält man die Axen für ein Hilfsellipsoid, welches die yz-Ebene in O

berührt und dessen durch M parallel mit dieser Ebene gelegter Centralschnitt die Halbaxen $\sqrt{a-b}$ und $\sqrt{a-c}$ hat, wovon die erste parallel mit der y-Axe und die zweite parallel mit der z-Axe ist. Versetzt man nun das Hilfsellipsoid parallel mit sich selbst, so daß sein Mittelpunkt die Strecke MO durchläuft, so wird in dieser neuen Lage der genannte Centralschnitt den Gleichungen

$$26) \qquad x = 0, \quad \frac{y^2}{a-b} + \frac{z^2}{a-c} = 1$$

entsprechen. OM wird jetzt der conjugirte Semidiameter von 26) sein, da die Tangential-Ebene von M parallel der yz-Ebene ist, und zwar für jede beliebige Lage des Punktes M im Raume. Soll aber dieser Punkt auf der Wellenfläche W_k bleiben, so ist $\lambda + \nu$ constant, so lange er auf dem äußern Mantel sich bewegt, und $\lambda + \mu$ für den innern. Hierauf beruht folgende neue Erzeugungsart der Wellenfläche:

Bei den Ellipsoiden von gemeinsamem Centralschnitt, wo die Quadratsumme der großen und kleinen oder der großen und mittlern Axe constant ist, beschreiben die Endpunkte des dem Centralschnitte conjugirten Durchmessers eine Wellenfläche, und zwar im ersten Falle den äußern, im zweiten den innern Mantel.

Bewegt sich M auf einer ellipsoidischen Linie von W_k, so sind zwei Axen des Hilfsellipsoids constant und die dritte allein veränderlich; beschreibt dagegen M eine sphärische Linie von W_k, so ist sowohl eine Axe, als auch die Quadratsumme der beiden anderen constant. Dieselbe Wellenfläche W_k ist aber auch von dem Ellipsoid 4) als Ergänzungsellipsoid abgeleitet dadurch, daß man auf den Centralschnitten desselben Perpendikel errichtet gleich ihren Halbaxen. Dieses Ellipsoid gehört zu einem zweiten System von confocalen Flächen, deren Focalellipse man erhält, wenn in 4) $x = 0$ und $k = a$ gesetzt wird; sie ist also identisch mit 26). In der Zeitschrift v. Schlömilch, Cantor und Kahl 1880, S. 346) habe ich eine ähnliche Erzeugungsart der Wellenfläche durch Ellipsoide mit gleichem Centralschnitte angegeben, welche auf die Fläche W_k in folgender Weise sich anwenden läßt:

Bei den Ellipsoiden, deren gemeinschaftlicher Centralschnitt 25) ist und deren große Axe die constante Länge $2\sqrt{k-c}$ hat, beschreiben die auf derselben liegenden Hauptbrennpunkte die beiden Mäntel von W_k.

Man kann aber auch das oben eingeführte Hilfsellipsoid sich von seiner ursprünglichen Lage aus, wo der Mittelpunkt M oder $(\lambda\mu\nu)$ noch auf (λ) liegt, so bewegen lassen, daß M stets auf dieser Fläche bleibt, also die große Halbaxe λ allein constant ist. Wird es dann aus seiner jeweiligen Lage nach O versetzt, so daß es durch die Ellipse 26) geht, so erhält man eine Schaar von Ellipsoiden mit gemeinschaftlichem Centralschnitt und constanter Länge der großen Axe, bei welchen die Endpunkte des dem Centralschnitt conjugirten Durchmessers, das Ellipsoid (λ) und die Hauptbrennpunkte eine neue von (λ) als Ergänzungsellipsoid abgeleitete Wellenfläche W_λ beschreiben.

Werden die Hauptbrennpunkte mit F und F' und die Endpunkte des dem gemeinschaftlichen Centralschnitte 26) conjugirten Durchmessers mit M und M' bezeichnet, so kann man das Vorhergehende so zusammenfassen:

Ist die große Axe der Ellipsoide allein constant, so beschreiben M und M' das Ellipsoid (λ), F und F' die Wellenfläche W_λ. Wenn außerdem noch die

mittlere Axe μ oder die kleine ν constant ist, so bewegen sich M und M' auf einer Krümmungslinie (μ) oder (ν) von (λ); F beschreibt einen sphärischen Kegelschnitt und F' eine ellipsoidische Linie auf W^{λ} (also ebenfalls eine Krümmungslinie, die aber auf einem andern Ellipsoid liegt). Ist endlich die Quadratsumme der großen und kleinen oder der großen und mittleren Axe constant, so bewegen sich M und M' auf der Wellenfläche W_k, während F und F' eine neue Fläche beschreiben, die aus verschiedenen Wellenflächen W_λ angehörenden, sphärischen und ellipsoidischen Linien besteht. Man erhält also folgende neue Erzeugungsart für die Krümmungslinien des Ellipsoids:

Bei den Ellipsoiden mit gemeinschaftlichem Centralschnitt und von constanter Länge der großen und mittleren (oder kleinen) Axe beschreibt einer der Hauptbrennpunkte, wie auch jeder Endpunkt des dem Centralschnitt conjugirten Durchmessers eine Krümmungslinie, wovon jede einem andern Ellipsoid angehört.

§. 4.

Da die ellipsoidischen Linien der Wellenfläche zugleich Krümmungslinien von Ellipsoiden sind, so haben sie auch, wie diese, Brennpunkte, welche auf den Axen liegen. Diese Eigenschaft, wie auch einige andere, die sich anreihen, habe ich l. c. (1881, S. 383) untersucht. Nach einer Notiz im Aperçu historique von Chasles (Cap. V, 48) hat Ch. Dupin zuerst gefunden, daß die Krümmungslinien auf Drehungsflächen liegen und deswegen Brennpunkte haben. Dieselbe Bemerkung hat auch Jacobi in seinem Schreiben an Steiner (Crelle 1834, S. 137) gemacht, wo er am Schlusse anführt, daß die Brennpunkte aus dem Ivory'schen Satze abgeleitet werden können. Durch Vergleichung der Formeln 6) und 7) mit den Gleichungen 6), 7) und 8) l. c. ergibt sich, daß die ellipsoidischen Linien des innern Mantels und des äußern, letztere bis zur Grenze $\lambda\nu = (a - b)(a - c)$, welche dem Drehungscylinder angehört, auf verlängerten Drehungsellipsoiden liegen, deren gemeinschaftlicher Äquatorialkreis in der yz-Ebene liegt und den Halbmesser $\sqrt{k - a}$ hat. Die Brennpunkte der ersteren liegen also auf der x-Axe in den Grenzen $\sqrt{a - b}$ und $\sqrt{a - c}$, diejenigen der zweiten von $\sqrt{a - c}$ bis ∞. Die übrigen ellipsoidischen Linien des äußern Mantels bilden zwei Gruppen: die Einen zwischen den Grenzen $\nu = 0$ und $\nu = (a - b)\dfrac{\lambda - (a - c)}{\lambda - (a - b)}$, welche ebenfalls einem Drehungscylinder angehört, der aber die y zur Axe hat, liegen auf verlängerten Drehungsellipsoiden, deren gemeinschaftlicher Äquatorialkreis in der xz-Ebene den Halbmesser $\sqrt{k - b}$ hat. Ihre Brennpunkte liegen auf der y-Axe zwischen den Grenzen $\sqrt{b - c}$ und ∞. Die anderen ellipsoidischen Linien, welche von den beiden cylindrischen eingeschlossen sind, liegen auf einmantligen Drehungshyperboloiden mit dem gleichen Äquator in der xz-Ebene, und haben also keine Brennpunkte.

Vorstehenden Betrachtungen mögen nun noch einige Schlußbemerkungen als Resumé beigefügt werden, die sich auf die Bedeutung der Wellenfläche als Veranschaulichungsmittel nicht blos in der Optik, sondern auch in der Theorie der Trägheitsmomente, sowie für die Geometrie der Flächen zweiten Grades beziehen.

Man kann O sowohl als Schwerpunkt eines Körpers, als auch im Innern eines zweiaxigen Crystalls liegend annehmen. Sind im letztern Falle $\sqrt{k-a}$, $\sqrt{k-b}$, $\sqrt{k-c}$ die reciproken Werthe der Hauptbrechungscoefficienten, so ist die Fläche W_k, abgeleitet aus dem Ergänzungsellipsoid 4), zugleich die Wellenfläche des Crystalls. Ihre Halbmesser geben die Geschwindigkeiten der beiden in einer Richtung sich fortpflanzenden Strahlen an und die Tangenten der ellipsoidischen Linien in den Endpunkten die Halbmesser der zugehörigen Ätherschwingungen. Diese Tangenten sind aber auch die Richtungen der constanten Hauptträgheitsradien in denselben Endpunkten.

Die Sehnen der singulären Kreise von W_k, welche vom Endpunkte der wahren optischen Axe ausgehen, stimmen bei dem Lloyd'schen Versuche über die innere konische Refraction mit den Polarisationsrichtungen oder Ätherschwingungen der parallel austretenden Strahlen überein, während sie andererseits die Richtungen der constanten Hauptträgheitsradien für die Punkte auf der Peripherie eines solchen Kreises angeben. Da jedem Werthe von k eine besondere Wellenfläche W_k entspricht und alle diese Flächen die gleiche Richtung für ihre wahren optischen Axen haben, welche in der Ebene des größten und kleinsten Hauptträgheitsradius im Schwerpunkte liegen, so erhalten dieselben für die Theorie der Trägheitsmomente die Bedeutung, daß sich in jedem ihrer Punkte constante Hauptträgheitsradien schneiden, welche die Sehnen von Kreisen sind, die die Fläche 11) bilden.

Fällt man von O auf die Tangentialebenen des Ergänzungsellipsoids 4) Perpendikel, so bilden ihre Fußpunkte die Elasticitätsfläche, die Quadrate ihrer Radien sind gleich den elastischen Kräften, welche durch die Bewegung eines Äthermoleculs in gleicher Richtung erregt werden. Construirt man aber die Fußpunktfläche vom Grundellipsoid 3), so sind die Halbmesser dieser Fläche gleich den ihrer Richtung entsprechenden Trägheitsradien.

Weitere Analogien bieten die Cauchy'schen Polarisationsellipsoide einerseits für die Optik und die Cauchy-Poinsot'schen und Binet'schen Ellipsoide andererseits für die Theorie der Trägheitsmomente dar.

Da die Wellenfläche für den Complex von Geraden, durch welche sich an ein Ellipsoid retanguläre Tangentialebenen legen lassen, Singularitätenfläche (Surface limite) ist, so dient sie, wie im Obigen an verschiedenen Beispielen nachgewiesen wurde, zur Auffindung mancher Eigenschaften des Ellipsoids, zu deren Veranschaulichung die mit den confocalen Complexkegelschnitten versehene Ebene L wesentlich beiträgt. Endlich ist noch die Beziehung der Wellenfläche zu den Krümmungslinien des Ellipsoids zu erwähnen, da sie aus solchen, verschiedenen confocalen Flächen zweiten Grades angehörigen Linien gebildet ist.

III. Abschnitt. Anwendung auf die Theorie des physischen Pendels.

Wenn ein Körper um eine feste Axe pendelartig schwingt, so ist die Länge l des isochronen einfachen Pendels gleich dem Trägheitsmoment des Körpers dividirt durch das statische Moment, beide in Beziehung auf die Schwingungsaxe genommen, oder

$$(1.)\quad l = \frac{v^2 + d^2}{d};$$

v ist der Trägheitsradius, welcher einer durch den Schwerpunkt O gehenden Geraden parallel mit der Schwingungsaxe entspricht, und d der Abstand der-

selben von O. OJ ist das von O auf die Schwingungsaxe gefällte Perpendikel, also J der Aufhängpunkt, durch den unter Umständen mehrere Schwingungsaxen senkrecht zu OJ gehen, und es soll die Frage untersucht werden: Welches ist der Ort der Punkte J, sowie auch die Richtung der zugehörigen Schwingungsaxen, wenn $l = \text{const.}$? In diesem Falle werden also die Schwingungen des Körpers isochron sein.

Sind $a > b > c$ die Quadrate der drei durch O gehenden Hauptträgheitsradien, so ist

$$(2.)\quad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$$

das Grundellipsoid. Bezeichnet man das von O auf eine Tangential-Ebene von (2.) gefällte Perpendikel mit v, so ist v ein Radius der Fußpunktfläche von (2.) oder der inversen Fläche des Cauchy-Poinsot'schen Centralellipsoids

$$(3.)\quad ax^2 + by^2 + cz^2 = 1.$$

Errichtet man auf einem Centralschnitte der Fußpunktfläche eine Senkrechte in O, und trägt darauf zwei Strecken ON und On ab gleich den Halbaxen des Centralschnitts, so liegen die Punkte N und n auf der Wellengeschwindigkeitsfläche

$$(4.)\quad \frac{x^2}{a-v^2} + \frac{y^2}{b-v^2} + \frac{z^2}{c-v^2} = 0.$$

Aus (1.) erhält man $v^2 = ld - d^2$ und durch Substitution in (4.)

$$(5.)\quad \frac{x^2}{a-ld+d^2} + \frac{y^2}{b-ld+d^2} + \frac{z^2}{c-ld+d^2} = 0.$$

Betrachtet man hier d als veränderlich und setzt $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$, so repräsentirt diese Gleichung die Grenzfläche für den Ort der Punkte J, welche mit (J) bezeichnet werden soll.

Ist in (5.) d constant, so stellt diese Gleichung einen Kegel vom zweiten Grade vor; durch Veränderung des Werthes von d erhält man eine Reihe von Kegeln, die confocal sind; ihre Focallinien entsprechen den Gleichungen:

$$(6.)\quad y = 0,\ \frac{z^2}{x^2} + \frac{c-b}{a-b} = 0.$$

Diese Linien sind also die Asymptoten der Focalhyperbel des Grundellipsoids.

Hieraus folgt, daß die Fläche (J) durch eine Reihe von sphärischen Kegelschnitten gebildet wird, die auf confocalen Kegeln liegen, deren Focallinien unabhängig sind von l und also auch von d. Jeder Halbmesser v der Fußpunktfläche des Grundellipsoids ist gleich dem seiner Richtung entsprechenden Trägheitsradius; ist v constant, so beschreiben diese Trägheitsradien einen Kegel vom zweiten Grade, der die Fußpunktfläche in einer sphärischen Curve schneidet und dessen Ergänzungskegel (4.) ist. Durch Veränderung des Werthes von v erhält man wieder die Kegel (5.), nur giebt die Gleichung (4.) auf den Mantellinien derselben die Punkte N und n der Wellengeschwindigkeitsfläche an, während (5.) auf denselben Mantellinien die Punkte J der Fläche (J) bestimmt. Führt man nun eine neue Variable $v_1 = d - \frac{l}{2}$ ein, so erhält (5.) die Form

$$(7.)\quad \frac{x^2}{\left(\frac{l^2}{4} - a\right) - v_1^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{l^2}{4} - b\right) - v_1^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{l^2}{4} - c\right) - v_1^2} = 0.$$

Dies ist eine zweite Wellengeschwindigkeitsfläche, die mit V_1 bezeichnet werden soll, und welche unter der Voraussetzung $\frac{l^2}{4} > a$ aus der Fußpunktfläche des Ellipsoids

$$(8.)\quad \frac{x^2}{\frac{l^2}{4}-a}+\frac{y^2}{\frac{l^2}{4}-b}+\frac{z^2}{\frac{l^2}{4}-c}=1$$

abgeleitet ist. Die Fläche (J) entsteht also aus V_1, indem man sämmtliche Radien der letzteren um eine constante Strecke $\frac{l}{2}$ verlängert. Hieraus folgt, daß sie aus zwei Mänteln besteht, wie jede Wellengeschwindigkeitsfläche, und daß sie vier singuläre Punkte hat, in welchen beide Mäntel zusammenstoßen, und die auf den Focallinien (6.) liegen. Sie ist die eine Grenzfläche der Aufhängpunkte für isochrone Schwingungen: die Punkte des äußeren Mantels sollen mit J, diejenigen des inneren mit i und die Punkte zwischen beiden Mänteln, die gleichfalls Aufhängpunkte sind, mit J_0 bezeichnet werden.

Um eine Vorstellung zu bekommen über die Vertheilung der Punkte J und ihrer Axen für isochrone Schwingungen im Raum, denke man sich für einen bestimmten Werth von v, also auch von d, die Kugel, deren Halbmesser d ist, und welche die Fläche J in einem sphärischen Kegelschnitt trifft, oder vielmehr in zwei congruenten Kegelschnitten, welche eine Kugelzone begrenzen. Diejenigen Punkte J_0, welche nicht bloß einem bestimmten Werth, sondern auch einer bestimmten Richtung von v entsprechen, liegen auf einem Großkreis der Kugel, welcher beide Kegelschnitte berührt; die Mantellinien des Cylinders, welcher die Kugel in diesem Großkreis berührt, sind die zugehörigen Schwingungsaxen. Verändert v die Richtung, aber nicht den Werth, so erhält man andere Großkreise, welche in der erwähnten Kugelzone liegen und beide Kegelschnitte berühren.

Aus (1.) folgt

$$(9.)\quad d=\frac{l}{2}\pm\sqrt{\frac{l^2}{4}-v^2}.$$

Also gehören zu einem bestimmten Werthe von l (wobei stets vorausgesetzt wird, daß $\frac{l^2}{4} > a$ ist) zwei Werthe von d oder zwei verschiedene Flächen (J), welche aus V_1 oder (7.) entstehen, indem man entweder, wie oben angegeben, $\frac{l}{2}$ auf der Verlängerung eines Radius von V_1 oder auf der entgegengesetzten Seite auf dem Radius selbst abträgt. Zunächst soll aber bloß der erste Fall ins Auge gefaßt werden. Die Fläche V_1 schneidet jede Hauptebene in zwei Curven, wovon eine ein Kreis ist; die Halbmesser dieser drei Kreise sind

$$A=\sqrt{\frac{l^2}{4}-a},\quad B=\sqrt{\frac{l^2}{4}-b},\quad C=\sqrt{\frac{l^2}{4}-c},$$

A ist in der yz-, B in der zx- und C in der xy-Ebene. Also schneidet auch die Fläche (J) die Hauptebene in drei Kreisen, deren Halbmesser $A+\frac{l}{2}$, $B+\frac{l}{2}$, $C+\frac{l}{2}$ sind; durch dieselben gehen drei Kugeln mit dem Mittel-

punkt O, A', B', C', welche (J) in diesen Kreisen berühren, und zwar A' den inneren Mantel in der yz-Ebene, B' sowohl den inneren als auch den äußeren in der zx- und C' den äußeren in der xy-Ebene.

Bei A' und C' liegen die Aufhängpunkte auf den zwei Kreisen, in welchen diese Kugeln (J) berühren, die zugehörigen Schwingungsaxen sind die Mantellinien der Cylinder, welche die Kugeln in diesen Kreisen berühren. Dagegen ist auf B' jeder Punkt ein Aufhängpunkt; die vier Durchschnittspunkte von B' mit den Geraden (6.) (welche in der Theorie des Lichts den wahren optischen Axen entsprechen) seien $O_1O_2O_3O_4$; durch jeden dieser Punkte gehen unendlich viele Schwingungsaxen, welche senkrecht sind entweder zu O_1O_3 oder zu O_2O_4. Wird also der Körper z. B. in O_1 aufgehängt, so macht er isochrone Schwingungen um jede Axe, welche durch O_1 geht und senkrecht zu OO_1 ist. Durch alle anderen Punkte J_0 auf B' als Aufhängpunkte gehen nur zwei Schwingungsaxen, welche man erhält, indem man durch J_0 und O_1O_3 oder O_2O_4 zwei Großkreise legt und auf ihren Ebenen in J_0 Perpendikel errichtet.

Jede der concentrischen Kugeln zwischen A' und B' schneidet die Fläche (J) in zwei sphärischen Kegelschnitten; nimmt man auf einer solchen Kugel einen Punkt J_0 an und legt durch denselben zwei Großkreise, welche die Kegelschnitte berühren, so sind die auf den Ebenen dieser Kreise in J_0 errichteten Perpendikel die beiden Schwingungsaxen von J_0, d. h. wenn der Körper in J_0 aufgehängt wird, und um eines dieser Perpendikel als Axe schwingt, so ist die Schwingungszeit gleich derjenigen des einfachen Pendels von der Länge l. Der Punkt J_0 muß im Innern von (J) und auf der von den beiden Kegelschnitten gebildeten Kugelzone liegen; diese Zonen werden um so breiter, je mehr sich die Kugel B' nähert, wo die Kegelschnitte in die Punkte $O_1O_2O_3O_4$ sich verwandeln, so daß die Zone der Aufhängpunkte J_0 gleich der ganzen Oberfläche von B' ist. Für die Kugeln zwischen B' und C' werden die Zonen zwischen den sphärischen Kegelschnitten schmaler und reduciren sich endlich in C' auf den Berührungskreis mit (J).

Da die Grenzfläche der Aufhängpunkte (J) zwei Mäntel hat, so schneidet sie jede durch O gehende Gerade in vier Punkten, wovon zwei, J und i, auf der einen Seite von O liegen, und zwar J auf dem äußeren und i auf dem inneren Mantel. Durch diese Gerade gehen zwei sich rechtwinklig schneidende confocale Kegel; die durch J und i gehenden Normalen derselben sind die Schwingungsaxen dieser Punkte. Legt man also durch OJ Tangentialebenen an die übrigen zwischen den genannten liegenden confocalen Kegel, so sind die in den Punkten J_0 zwischen J und i auf diesen Tangentialebenen errichteten Perpendikel die Schwingungsaxen für alle Punkte zwischen J und i.

Das Vorhergehende läßt sich nun so zusammenfassen:

Alle äußeren Aufhängpunkte für isochrone Schwingungen eines Körpers liegen auf oder zwischen den beiden Mänteln einer Fläche (J) (5.), welche von einer Wellengeschwindigkeitsfläche (7.) durch Verlängerung ihrer Radien um die halbe Länge des isochronen einfachen Pendels abgeleitet ist. Für die Punkte auf einem Mantel von (J) giebt es nur eine Schwingungsaxe, für die anderen zwischen beiden Mänteln zwei. Durch die vier Punkte endlich, in welchen beide Mäntel zusammenstoßen, gehen unendlich viele Schwingungsaxen. Also gehen überhaupt alle Axen für isochrone

Schwingungen zwischen den beiden Mänteln der Grenzfläche der Aufhängpunkte (J) hindurch.

Die Gleichung (9.) giebt zwei Werthe für d; da $\frac{l^2}{4} > a$ vorausgesetzt wird, und $v^2 < a$ ist, so sind beide Werthe stets reell; für

$$d = \frac{l}{2} - \sqrt{\frac{l^2}{4} - v^2}$$

erhält man eine zweite Grenzfläche der Aufhängpunkte (J'), indem man $\frac{l}{2}$ auf den Radien von V_1 gegen O hin abträgt. Die Fläche (J') wird also ganz von (J) umschlossen; sie schneidet die Hauptebenen in drei Kreisen, deren Halbmesser $A - \frac{l}{2}$, $B - \frac{l}{2}$, $C - \frac{l}{2}$ sind, und durch welche die concentrischen Kugeln A'', B'', C'' gehen. Der Mittelpunkt O liegt immer innerhalb von (J'), und beide Flächen haben das System der confocalen Kegel gemein, welche auch (J') in sphärischen Kegelschnitten treffen. Überhaupt lassen sich die oben angegebenen Eigenschaften von (J) auch auf diese neue Fläche übertragen, deren Punkte J' und i' auf dem äußeren und inneren Mantel und J'_0 zwischen beiden Mänteln man innere Aufhängpunkte nennen kann. Hieraus folgt also der Satz:

Auf einer durch den Schwerpunkt O gehenden Geraden liegen beiderseits je vier Aufhängpunkte für isochrone Schwingungen, durch welche nur eine Schwingungsaxe geht; zwei dieser Axen durch J und i' sind parallel und stehen senkrecht auf den beiden anderen durch i und J', welche also ebenfalls parallel sind. Für die weiteren Punkte J_0 auf Ji und J'_0 auf J'i' (diese beiden Strecken schließen einander stets aus) giebt es je zwei Schwingungsaxen, nämlich die Perpendikel, welche in J_0 oder J'_0 auf den Tangentialebenen errichtet werden, die man durch die Gerade an die confocalen Kegel legen kann. Für alle übrigen Punkte auf der Geraden, entweder zwischen i und i' oder außerhalb J und J' giebt es keine Axen, um welche der Körper Schwingungen machen kann, welche denjenigen des einfachen Pendels von der Länge l isochron sind. Hat die Gerade die Richtung einer Asymptote der Focalhyperbel des Grundellipsoids, so liegen auf ihr vier Punkte mit unendlich vielen Schwingungsaxen, also giebt es für jeden Körper im Ganzen acht solcher Punkte, welche einer bestimmten Länge l des isochronen einfachen Pendels entsprechen.

Diese acht Punkte haben von O die Entfernungen $d = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} - b}$.

Die Summe der beiden Werthe von d in (9.) ist gleich l und ihr Product gleich v^2, somit ist $Ji' = iJ' = l$ und $OJ \,.\, Oi' = Oi \,.\, OJ' = v^2$; legt man nun durch O eine Ebene senkrecht zu OJ, welche das Cauchy-Poinsot'sche Ellipsoid in einer Ellipse und die Fußpunktfläche des Grundellipsoids in der inversen Curve (deren Radien v mit den gleichgerichteten der Ellipse ein constantes Product liefern) schneidet, und die mit (v) bezeichnet werden soll, so kann man sich über die den einzelnen Punkten der Geraden OJ entsprechenden Schwingungsaxen folgende Vorstellung machen: Man beschreibe über $Ji' = l$ als Durchmesser eine Kugel, so wird sie die Curve (v) in den Endpunkten ihrer

kleinen Axe berühren; durch diese Endpunkte und Ji' lege man einen Großkreis, so sind dessen Tangenten in J und i' die Schwingungsaxen dieser Punkte. Der Mittelpunkt der Kugel liegt auf V_1. Rückt derselbe gegen O hin, so wird die Kugel die Gerade OJ in den Punkten J_0 und J'_0 ($J_0J'_0 = l$) und die Curve v in zwei Punkten schneiden, welchen zwei gleiche Werthe von v entsprechen. Die Tangenten der durch diese Punkte und $J_0J'_0$ bestimmten Großkreise sind die beiden Schwingungsaxen von J_0 und von J'_0. Je mehr sich die Kugel, deren Durchmesser immer gleich l ist, O nähert, um so weiter gehen die Schwingungsaxen sowohl in J_0 als auch in J'_0 aus einander. Im zweiten Grenzfall, wenn die Kugel durch i und J' geht, wird dieser Winkel gleich 180°, und sie berührt die Curve (v) in den Endpunkten ihrer großen Axe.

Hat die Gerade OJ die Richtung OO_1, so wird (v) ein Kreis, dessen Halbmesser v unter einander gleich sind, und es giebt nur zwei Kugeln vom Durchmesser l, welche durch diesen Kreis gehen, aber unendlich viele Großkreise, welche sich in den singulären Punkten O_1, O_3 auf (J) oder O'_1, O'_3 auf (J') schneiden.

Die beiden Flächen (J) und (J') können auch als Fußpunktflächen aufgefaßt werden und zwar von den Parallelflächen der Wellenfläche

$$(10.)\quad \frac{\left(\frac{l^2}{4}-a\right)x^2}{\left(\frac{l^2}{4}-a\right)-r^2}+\frac{\left(\frac{l^2}{4}-b\right)y^2}{\left(\frac{l^2}{4}-b\right)-r^2}+\frac{\left(\frac{l^2}{4}-c\right)z^2}{\left(\frac{l^2}{4}-c\right)-r^2}=0,$$

von welcher die Wellengeschwindigkeitsfläche V_1 die Fußpunktfläche ist. Diese Parallelflächen haben den Abstand $\frac{l}{2}$ beiderseits vom Fußpunkt der Normalen an gerechnet.

Es verdient noch bemerkt zu werden, daß die Tangenten der ellipsoidischen Curven der Wellenfläche (10.) die Richtung des constanten Hauptträgheitsradius gleich $\frac{l}{2}$ für ihre Berührungspunkte angeben, und daß sie den Schwingungsaxen der auf den Flächen (J) und (J') liegenden Aufhängpunkte parallel sind.

Wenn die Vorraussetzung $\frac{l^2}{4} > a$ nicht zutrifft, so nimmt die Fläche V_1 einen anderen Charakter an und gehört zu den noch wenig untersuchten Flächen, welche aus dem einmantligen und zweimantligen Hyperboloid auf ähnliche Art abgeleitet werden, wie die Wellengeschwindigkeitsfläche aus dem Ellipsoid.

Schließlich möge noch an einem speciellen Beispiel gezeigt werden, wie ein Theil der hier vorgetragenen Theorie praktisch nachgewiesen werden kann.

Wenn die Kantenlängen eines rechtwinkligen Parallelepipeds 2α, 2β, 2γ sind, so ist

$$a = \tfrac{1}{3}(\beta^2+\gamma^2),\quad b = \tfrac{1}{3}(\gamma^2+\alpha^2),\quad c = \tfrac{1}{3}(\alpha^2+\beta^2),$$

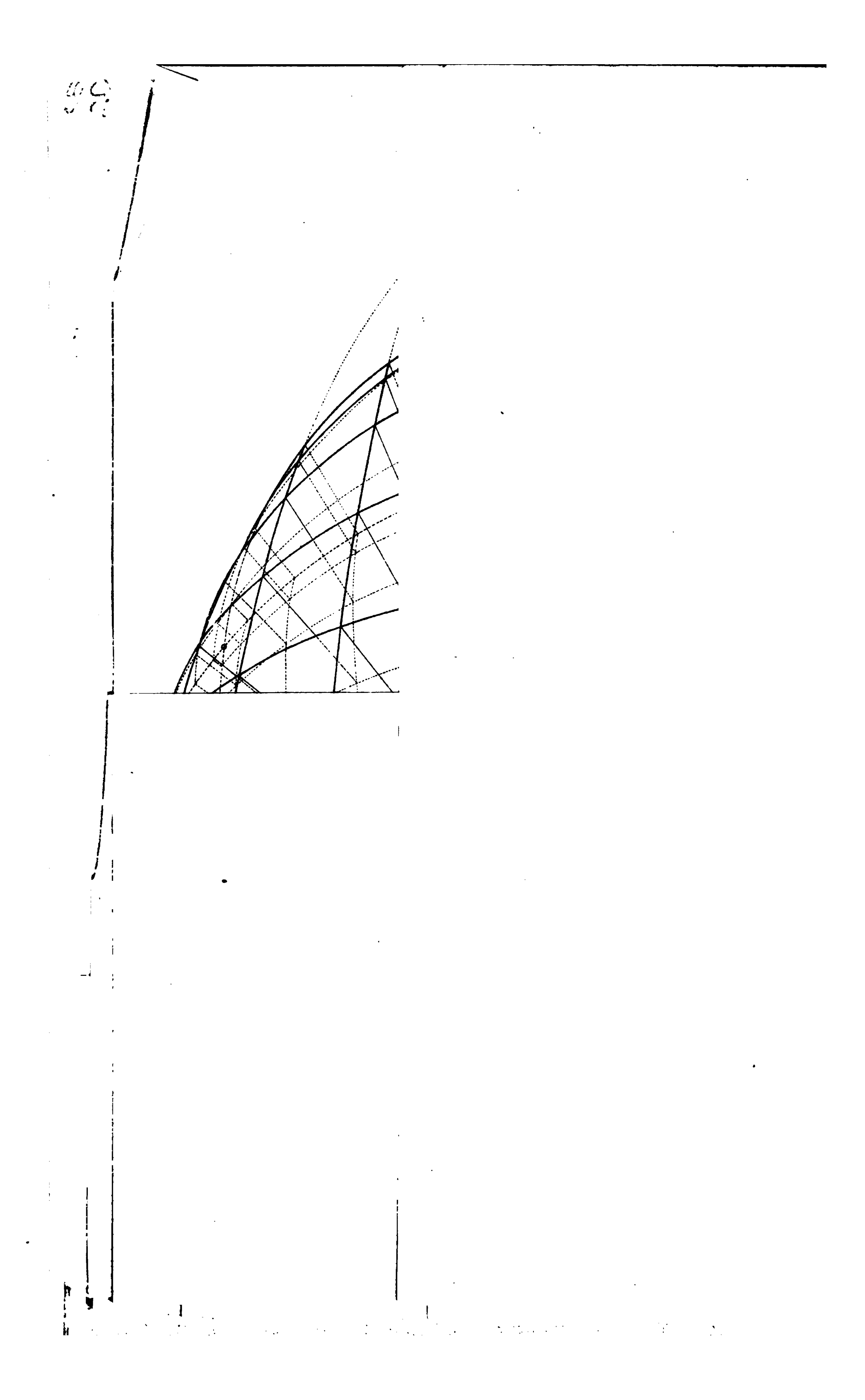
also wird die Gleichung (6.)

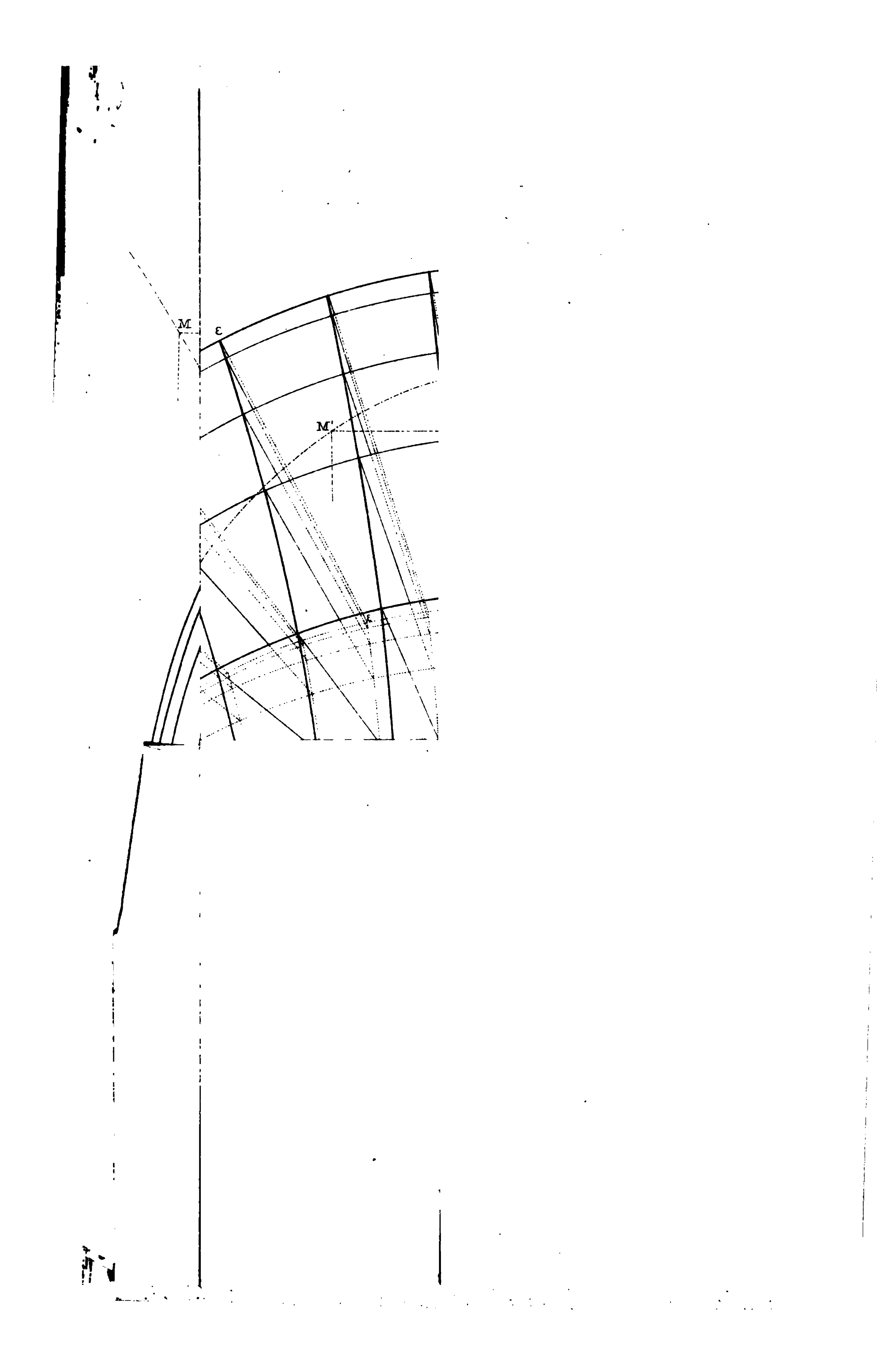
$$y = 0,\ \frac{z^2}{x^2} + \frac{\beta^2-\gamma^2}{\beta^2-\alpha^2} = 0.$$

Wird nun das Parallelepiped an einem Draht aufgehängt, welcher einer von den beiden Richtungen dieser Gleichung entspricht, so werden die Schwingungen für alle durch einen Punkt dieses Drahts gehenden Axen isochron sein.

Berichtigungen.

Seite	4	Zeile	19	von	oben lies $L''M'$ statt $L''M$.
„	4	„	25	„	„ $M'N$ statt MN.
„	10	„	13	„	„ $2pqdpdq$ statt $pqdpdq$.
„	11	„	8	„	unten $\{(1+q^2)s - pqt\}$ statt $\{(1+q^2)s - pqt)\}s$.
„	13	„	1	„	„ $\{(1+q^2) - pqt\}$ statt $\{(1+p^2)s - pqt\}$.
„	32	„	2	„	oben enthalten statt erhalten.
„	48	„	16	„	„ 34 statt 31.
„	48	„	9	„	unten 35 „ 34.
„	79	„	16	„	„ $x' - x$ statt $x' - z$.
„	86	„	17	„	„ $x' + \alpha z' = a$ statt $= b$.
„	96	„	2	„	oben $\frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n} = x$ „ $= z$.
„	109	„	12	„	unten R und R' statt R' und R.
„	128	„	21	„	„ $+$ statt $-$.
„	128	„	18	„	„ $+$ „ $-$.
„	147	„	21 u. 22	„	oben Product statt Rechteck.
„	199	„	6	„	unten $y'z$ statt yz'.
„	216	„	9	„	oben unter rechten Winkeln statt hin.
„	216	„	5	„	unten F^2 statt G^2.
„	217	„	8	„	oben $\cos\vartheta \,.\, ds$ statt $\cos\vartheta$.
„	218	„	10	„	„ $E\left(\frac{dG}{dp}\right)^2$ statt $E\left(\frac{dE}{dp}\right)^2$
„	218	„	11	„	unten $\sqrt{G}$ statt $\sqrt{g}$
„	219	„	21	„	oben angeben statt angebend.
„	220	„	22	„	„ $2n - 4$ „ $2 - 4$.
„	226	„	9 u. 10	„	„ $+$ statt $-$.
„	226	„	9	„	unten $\frac{1}{10} f''$ statt $\frac{1}{10} f'$.
„	227	„	1	„	oben $\sin\psi \frac{d\psi}{dp}$ statt $\sin\psi \frac{d\psi}{dq}$.
„	230	„	4	„	„ $- r\cos\varphi \,.\, r'\sin\varphi'$ die statt der.
„	230	„	13	„	„ $(p^2 + q^2 + qq' + q'^2 - \ldots)$ statt $(p^2 + q^2 + qq' + q^2 - \ldots)$
„	230	„	1	„	unten $-\frac{1}{90}$ statt $+\frac{1}{90}$.
„	231	„	3	„	oben $g'p$ statt gp'.
„	231	„	4	„	„ $+ q'^2$ statt $- q'^2$.
„	231	„	8	„	unten $3R^2$, $180R^4$ statt $3R^4$, $180R^2$.
„	231	„	5	„	„ wenn man statt wenn.
„	276	„	4	„	„ PBC statt PAB.





M
ε
M′
k

A_0

D

B

C''

S

P

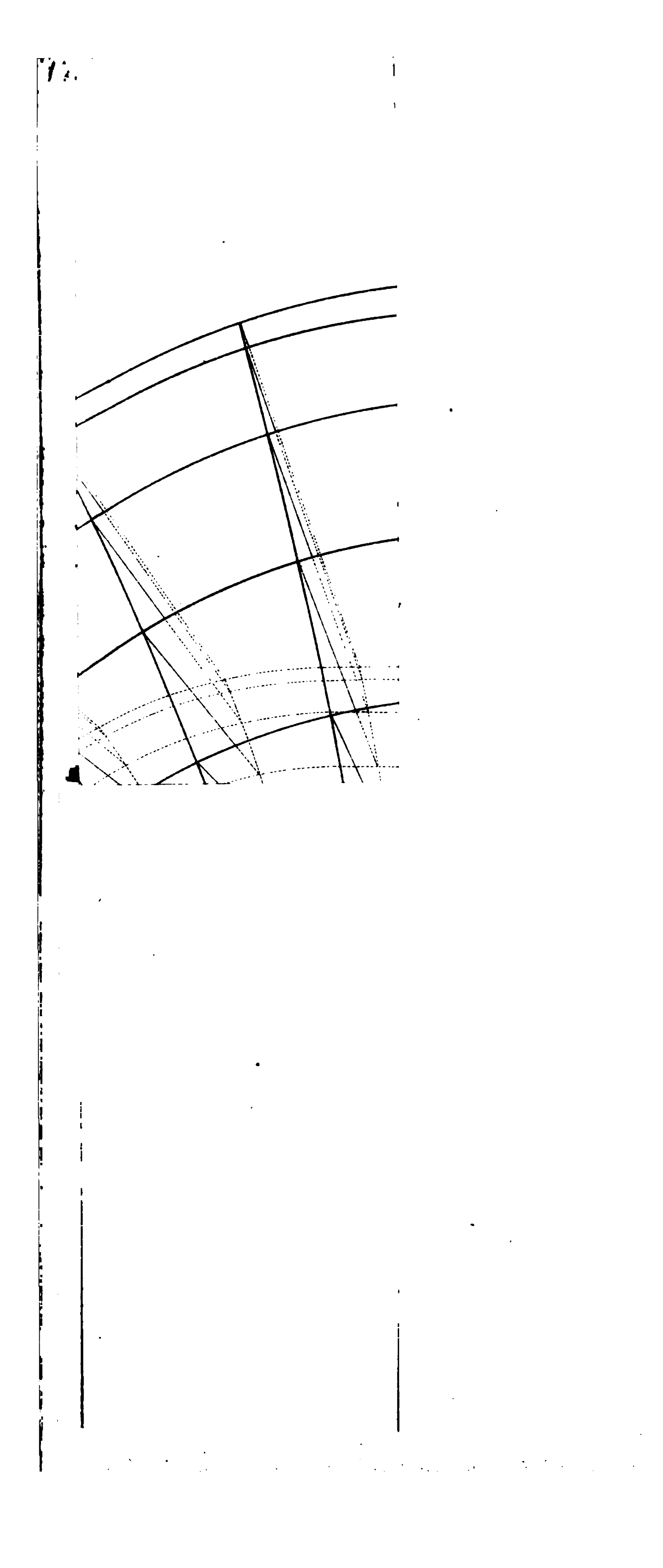
Q^1

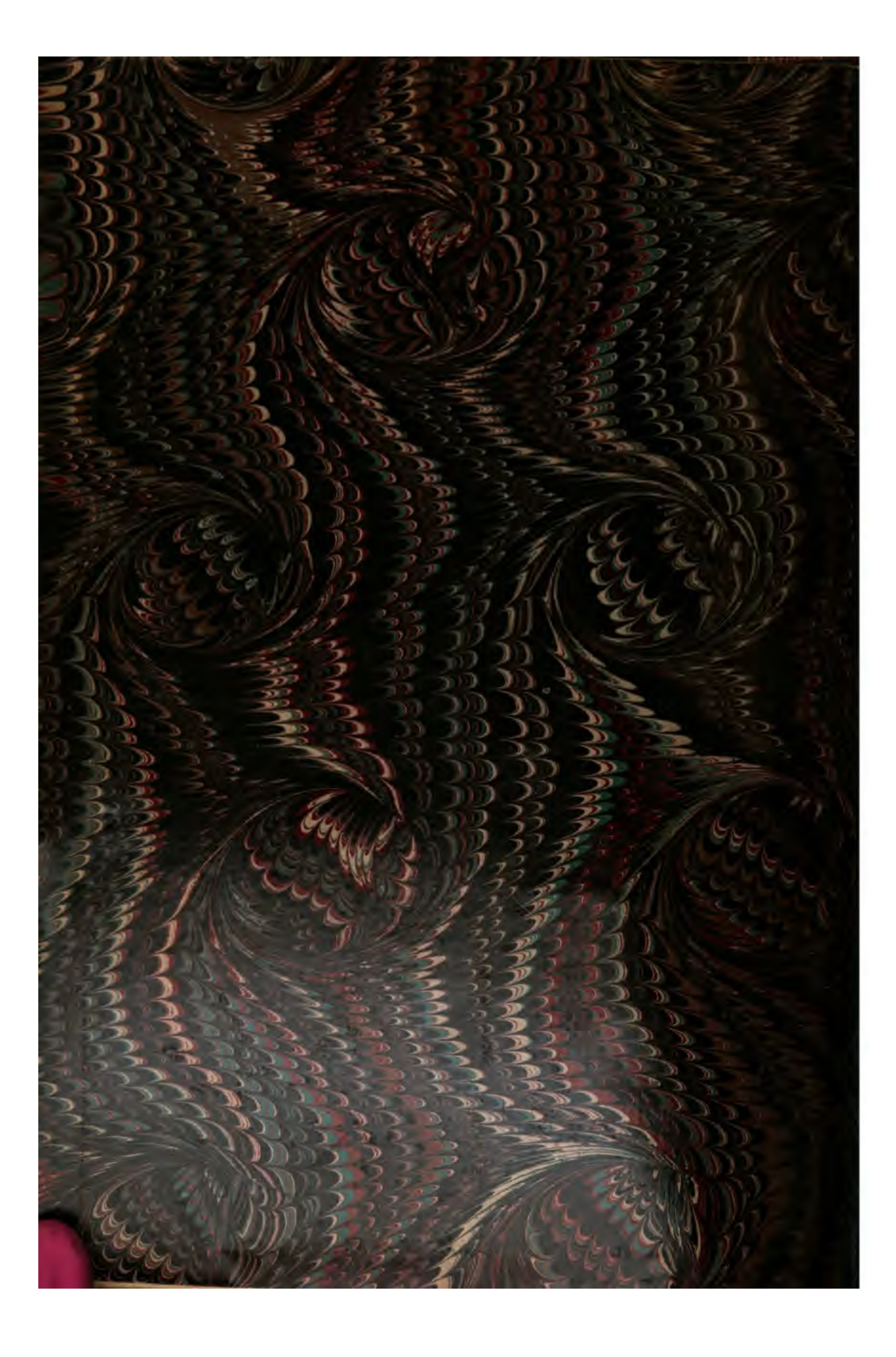
n

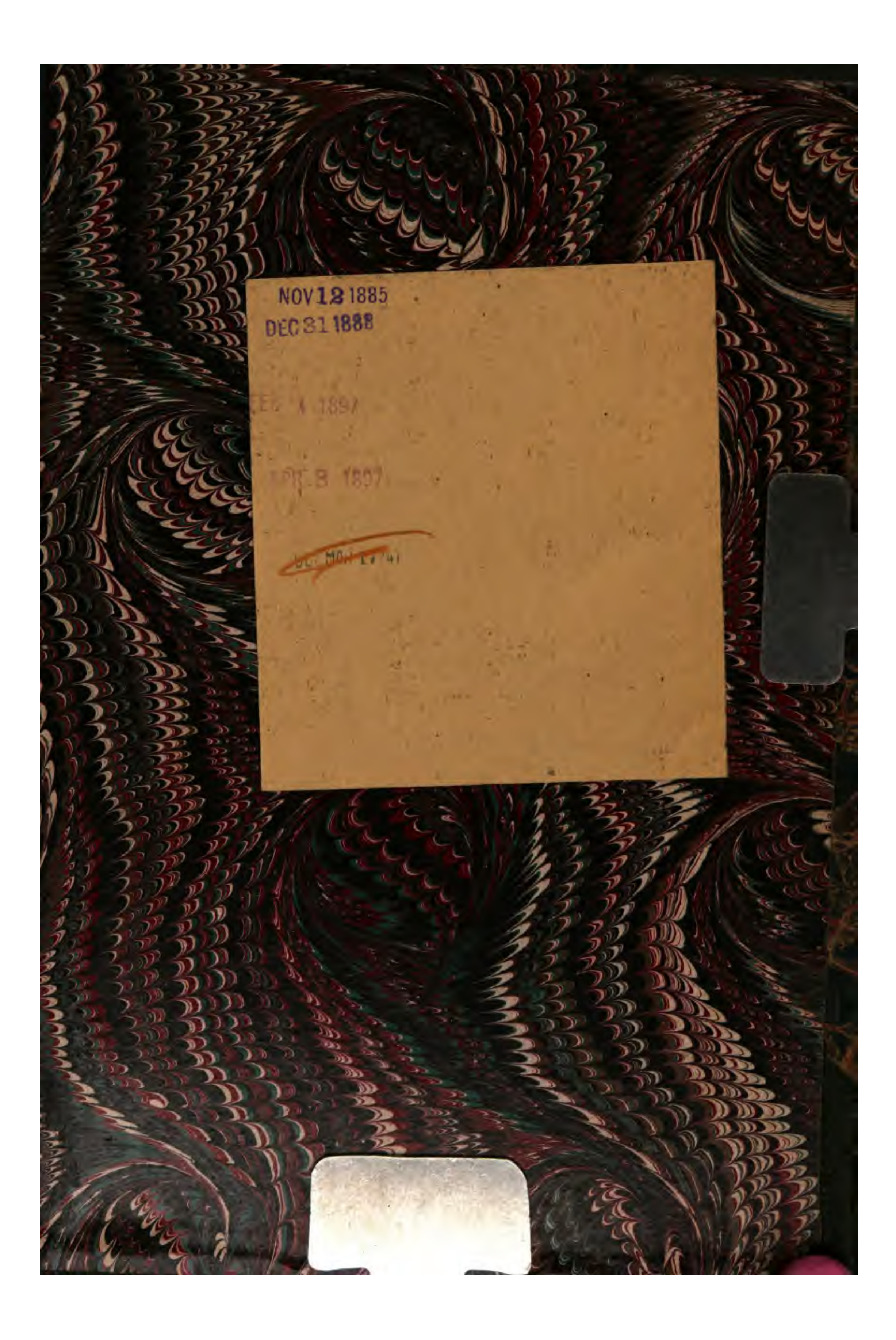
N

S^1

m^2







NOV 12 1885
DEC 31 1888

